



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ: «Ολοκλήρωση αντίστροφης συνάρτησης»

ΕΡΓΑΣΙΑ 1^η

1. α) Η συνάρτηση f είναι 1-1 και παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$$

β) Να αποδείξετε ότι: $\int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^e \sqrt{\ln x} dx = e$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = \ln(1 + \epsilon \phi x)$. Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη β) ισχύει η σχέση $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx + \int_0^{\ln 2} f^{-1}(x)dx = \frac{\pi \ln 2}{4}$

3. Έστω η συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} β) Να αποδείξετε ότι: $\int_0^2 \left(\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt[3]{x^2 + 2x} \right) dx = 6$

4. Η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow (0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη και 1-1. Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \ln(f(x))dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} \frac{f^{-1}(x)}{x} dx$$

5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{2x + \eta \mu x}$, με $x \geq 0$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^{2\sqrt{\pi}} x f^{-1}(x) dx$

6. Έστω η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει συνεχή f' στο $[\alpha, \beta]$ και είναι $f'(x) > 0$,

για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι: $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} \frac{x}{f'(f^{-1}(x))} dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$

ΕΡΓΑΣΙΑ 2^η

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο: $f(x) = x^3 + 2x + 3$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^6 f^{-1}(x) dx$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3$, με $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1" και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$



3. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x) + f(x) + 2 = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το $\int_0^4 f(x)dx$.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\sqrt{e}) = 2$ και:
 $xf'(x) \ln x + f(x) = 0$ για κάθε $x > 1$
i. Να βρείτε τον τύπο της f ii. Να ορίσετε την $f^{-1}(x)$
iii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln x} dx + \int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx$
5. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{x^2}$
i. Να ορίσετε την $f^{-1}(x)$
ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x+e^{x^2}} dx + \int_1^e \frac{1}{1+x+\sqrt{\ln x}} dx$.
6. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(2, 5)$ και ισχύει:
 $\int_0^2 xf''(x)dx = 0$.
i. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της B .
ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$, ώστε $f''(\xi) = 0$.
iii. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:
 $I = \int_{-1}^5 \left(\frac{1}{3} f\left(\frac{x+1}{3}\right) + f^{-1}(x) \right) dx$.
7. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x) = x - \ln x + e^x$, με $x \in (1, +\infty)$
i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$
ii. Να βρεθούν τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2020$ έχει μοναδική λύση στο $(1, +\infty)$
iv. Έστω $\Pi = \int_2^e f(x)dx + \int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x)dx$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi - 2 \ln 2$.

ΕΡΓΑΣΙΑ 3^η

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x$.
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.
β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx$.
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x + 3$
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.
β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^6 f^{-1}(x)dx$.



3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2x^3 - 3$
- α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.
- β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-3}^0 f^{-1}(x)dx$.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x + 1$
- α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.
- β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f^{-1}(x)dx$.
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.
- α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.
- β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^e f^{-1}(x)dx$.
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 2x - 5$.
- α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.
- β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_{-4}^{e-3} f^{-1}(x)dx$.
7. Δίνεται η $f(x) = \ln x - x - e^x$, $x > 1$.
- α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.
- β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x)dx$.
8. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $[1, 10]$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 8)$ και $B(10, 13)$.
- Να δείξετε ότι: $\int_1^{10} f(x)dx + \int_8^{13} f^{-1}(x)dx = 122$
9. Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, που ικανοποιεί την σχέση
- $$e^{f(x)} + f(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$$
- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 β) Να ορίσετε την αντίστροφη
- γ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^e f(x)dx$
10. Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\sqrt{e}) = 2$,
- $$xf'(x)\ln x + f(x) = 0, x > 1$$
- α) Να βρείτε τον τύπο της f β) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
- γ) Να ορίσετε την αντίστροφη δ) Να υπολογίσετε: $\int_0^{e^2} \frac{1}{\ln x} dx + \int_1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{x}} dx$.