



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ: «Ανισώσεις και ολοκληρώματα»

ΕΡΓΑΣΙΑ 1^η

1. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση να αποδείξετε ότι :

$$\int_1^3 f^2(x) dx \geq \int_1^3 6f(x) dx - 18$$

2. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^4 x^2 dx$

β) Να αποδείξετε ότι $\int_1^4 (f^2(x) - 2xf(x)) dx \geq -21$

3. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\int_0^2 f(x) dx = 5$

Να αποδείξετε ότι :

α) $f^2(x) + 16 \geq 8f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ β) $\int_0^2 f^2(x) dx \geq 8$

ΕΡΓΑΣΙΑ 2^η

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

ii. $\int_1^3 \left(x + \frac{1}{x} \right) dx > 4$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1 - \ln x$.

i. Να βρείτε τη ελάχιστη τιμή της f

ii. Να αποδείξετε ότι $\ln(1+x^2) \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx < \frac{1}{3}$

3. Έστω η συνάρτηση $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα

ii. Να αποδείξετε ότι $0 \leq \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \leq 1 - \frac{1}{e}$

4. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\int_0^1 f(x) dx = 1$

i. Να αποδείξετε ότι : $f^2(x) - 2f(x) + 1 \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$

ii. $\int_0^1 f^2(x) dx \geq 1$



5. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\int_0^1 f^2(x)dx = 1$

i. Να αποδείξετε ότι : $f^2(x) - 2f(x)e^x + e^{2x} \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$

ii. $\int_0^1 e^x f(x)dx \leq \frac{e^2 + 1}{4}$

6. Να αποδείξετε ότι :

i. $\frac{e^x}{x^2 + 1} \geq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$ ii. $\int_0^1 e^x dx \geq \int_0^1 (x^2 + 1)dx$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο : $f(x) = 2 - e^{-x^2}$.

i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f ii. Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 (2 - e^{-x^2})dx \geq 2$

ΕΡΓΑΣΙΑ 3^η

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο : $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

ii. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της f στο $[1,2]$

iii. Να αποδείξετε ότι $0 \leq \int_1^2 \frac{x-1}{x+2} dx \leq \frac{1}{4}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο : $f(x) = \ln(1+x^2)$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \leq \ln 2$

3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\sin x > x$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι η

συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα και στη συνέχεια να

αποδείξετε ότι:

i. $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{3}{\pi}$ για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ και ii. $\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\eta\mu x}{x} dx \leq \frac{1}{2}$.

4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της ανισότητας $e^x \geq 1+x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i. $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$ και ii. $\frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$.

**ΕΡΓΑΣΙΑ 4^η**

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x^2$.
 - α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
 - β) Να αποδείξετε ότι: $\int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx < \frac{1}{3}$
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x + 6$.
 - α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
 - β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 6} dx \leq \frac{2}{5}$
3. Να αποδείξετε ότι:
 - α) $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$
 - β) $\int_1^2 x^x dx \geq e - 1$
4. Να αποδείξετε ότι:
 - α) $\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1$ για κάθε $x > 1$
 - β) $1 < \int_2^{e+1} \frac{1}{\ln x} dx < e$
5. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει ότι $f(1) = \frac{7}{3}$ και $(x^2 + 2)f'(x) + 2xf(x) = 4x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - α) Να βρείτε τον τύπο της f
 - β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
 - γ) Να αποδείξετε ότι: $6 \leq \int_{-2}^4 f(x) dx \leq 15$
6. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha < \beta$, τότε να αποδείξετε ότι:
 - α) $f(x) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(x - \alpha)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$
 - β) $2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq f'(\beta)(\beta - \alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta - \alpha)$
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-vx}$ με $x \in \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{N}^*$.
 - α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
 - β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
 - γ) Να αποδείξετε ότι: $2 \leq e^2 v^2 \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} xe^{-vx} dx \leq e$

**ΕΡΓΑΣΙΑ 5^η**

1. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι $f(1)=e$ και $f(x) = e^x - xf'(x)$ για κάθε $x > 0$.
- α) Να βρείτε τον τύπο της f β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(2, f(2))$
δ) Να αποδείξετε ότι: $\int_1^2 f(x) dx \leq \frac{3e^2}{8}$
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = \frac{2t+3}{t+2}$, $t \in [1, 4]$
- i. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^4 f(t) dt$
- Έστω η συνάρτηση $g(x) = \int_1^4 f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{t}{x^2}} dt$, $x > 0$.
- ii. Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{1}{x^2}} \leq e^{\frac{t}{x^2}} \leq e^{\frac{4}{x^2}}$, για κάθε $t \in [1, 4]$ και $x > 0$.
iii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
3. Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f'(x) + f(x) > 2xe^{-x}$, $x \in [0, 1]$. Να δείξετε ότι $3 \int_0^1 e^x f(x) dx > 1$.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, $f(0)=0$ και να ισχύει $f'(x) + 2xf(x) > 2xe^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx > \frac{e-1}{e}$.
5. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, $f(0)=0$, $f(\pi)=\pi$.
Να δείξετε ότι $0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$
6. Δίνεται η $f(x) = -\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ και $\varepsilon: y = x - \pi$ εφαπτομένη της.
Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi$