

Α΄ Γυμνασίου

Θεματική ενότητα: Αριθμοί-Άλγεβρα

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 55

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
Αρ1. Χρησιμοποιούν κατάλληλα όρους όπως: παράγοντας, διαιρέτης, πολλαπλάσιο, διαιρεί, διαιρείται. Αρ2. Αναγνωρίζουν και εκφράζουν συμβολικά την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης και τη χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων. Αρ3. Διερευνούν και εφαρμόζουν απλές ιδιότητες της διαιρετότητας και τα κριτήρια της διαιρετότητας. Αρ4. Αναγνωρίζουν πρώτους αριθμούς και εφαρμόζουν το κόσκινο του Ερατοσθένη για να βρίσκουν τους πρώτους αριθμούς. Αρ5. Αναλύουν ένα φυσικό αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και χρησιμοποιούν αυτή την ανάλυση για να προσδιορίσουν πρώτους παράγοντες, ΜΚΔ, σχετικά πρώτους αριθμούς, πολλαπλάσια και ΕΚΠ δύο ή περισσότερων αριθμών. Αρ6. Διερευνούν και εφαρμόζουν έννοιες από	Φυσικοί Αριθμοί – Διαιρετότητα Ευκλείδεια διαίρεση, ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων (6 ώρες)	Οι μαθητές, με δραστηριότητες και προβλήματα μαθηματικού περιεχομένου, διερευνούν στοιχεία της δομής των φυσικών αριθμών, αιτιολογούν και συζητούν τις λύσεις τους. (ενδεικτικές δραστηριότητες ΑρΔ1, ΑρΔ2)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) παρ. Α1.4 και Α1.5.

τη θεωρία αριθμών (παραγοντοποίηση φυσικών, παράγοντες, πολλαπλάσια, πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί, διαιρετότητα, ΜΚΔ, ΕΚΠ) στην επίλυση προβλημάτων.			
Αρ7. Διερευνούν συστήματα αρίθμησης φυσικών αριθμών (πχ το δυαδικό) και συγκρίνουν με το δεκαδικό.	Φυσικοί αριθμοί • θεσιακά συστήματα αρίθμησης (2 ώρες)	Το σημαντικό είναι η ανάδειξη στοιχείων του δεκαδικού συστήματος (ομαδοποίηση σε δυνάμεις του 10, αξία θέσης ψηφίου) μέσα από την διερεύνηση ενός άλλου συστήματος αρίθμησης (δυαδικό) και όχι η εξάσκηση στις μετατροπές αριθμών από το ένα σύστημα στο άλλο. (ενδεικτική δραστηριότητα ΑρΔ3)	http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/gymnasio/09_09_2010_ekpaideftiko_yliko_a_gymnasiou_enotita1.pdf σελ 39–42.
Αρ8. Αναγνωρίζουν και αναπαριστούν ακεραίους αριθμούς σε διαφορετικά πλαίσια. Αρ9. Συγκρίνουν και διατάσσουν ακέραιους αριθμούς, χρησιμοποιώντας την αριθμογραμμή και συνειδητοποιούν ότι κάθε ακέραιος αριθμός έχει επόμενο. Αρ10. Διερευνούν τη σχέση των ακεραίων με τους φυσικούς αριθμούς (κάθε φυσικός είναι ακέραιος, ύπαρξη ελάχιστου φυσικού και όχι ελάχιστου ακεραίου, ύπαρξη επόμενου). Αρ11. Αναγνωρίζουν την απόλυτη τιμή ακεραίων αριθμών ως την απόστασή τους από το 0.	Ακέραιοι αριθμοί • επέκταση των φυσικών στους ακεραίους (14 ώρες)	Οι μαθητές, με τις δραστηριότητες, διερευνούν και καταλήγουν στους κανόνες ορισμού των πράξεων, μέσω μοντέλων/μεταφορών. Επιπλέον, διερευνούν όψεις της δομής των ακεραίων (πχ ύπαρξη επόμενου) και των πράξεών τους (πχ η αφαίρεση ως πρόσθεση, οι ερμηνείες του "-" ως προσήμου και συμβόλου πράξης). (ενδεικτικές δραστηριότητες ΑρΔ4, ΑρΔ5, ΑρΔ6, ΑρΔ7, ΑρΔ8)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) Α μέρος, κεφ. 7ο Ψηφιακό περιβάλλον: http://www.eyliko.gr/resource/resource.aspx?id=665 (πολλαπλασιασμός ρητών με μοντέλο θερμοκρασίας) http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_161_g_1_t_1.html?from=topic_t_1.html Οδηγίες: Α-ΑρΔ5-Πρόσθεση με θ-α κάρτες.doc http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_162_g_2_t_1.html?from=topic_t_1.html

Αναγνωρίζουν τους αντίθετους αριθμούς ως ετερόσημους με ίσες αποστάσεις από το 0. <i>Αρ12.</i> Προσθέτουν ακέραιους αριθμούς χρησιμοποιώντας στην αρχή μοντέλα-μεταφορές και καταλήγουν στον ορισμό της πρόσθεσης ακεραίων. <i>Αρ13.</i> Κατανοούν την έννοια των αντίθετων ως τους αριθμούς με άθροισμα 0. <i>Αρ14.</i> Αφαιρούν ακέραιους χρησιμοποιώντας μοντέλα-μεταφορές και αναγνωρίζουν την αφαίρεση ακεραίων ως πρόσθεση του αντίθετου. Αφαιρούν ακέραιους μετατρέποντας την αφαίρεση σε πρόσθεση του αντιθέτου. <i>Αρ15.</i> Αναγνωρίζουν τις διαφορετικές ερμηνείες του συμβόλου « - » ως προσήμου και ως σύμβολου πράξης. <i>Αρ16.</i> Συγκρίνουν το νόημα της πρόσθεσης ως αύξησης και της αφαίρεσης ως ελάττωσης στους φυσικούς με το νόημα των αντίστοιχων πράξεων στους ακέραιους. <i>Αρ17.</i> Πολλαπλασιάζουν ακέραιους χρησιμοποιώντας στην αρχή μοντέλα-μεταφορές και καταλήγουν στον ορισμό του πολλαπλασιασμού ακεραίων.			1.html Οδηγίες: Α-ΑρΔ7-Αφαίρεση με θ-α κάρτες.doc
--	--	--	---

Αρ18. Διαιρούν ακέραιους χρησιμοποιώντας τη διαίρεση ως αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού.			
Αρ19. Αναγνωρίζουν το κλάσμα ως μια αναπαράσταση του αποτελέσματος της διαίρεσης δύο φυσικών και τα ισοδύναμα κλάσματα ως διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου αποτελέσματος. Αρ20. Αναγνωρίζουν ως θετικό ρητό αριθμό το αποτέλεσμα της διαίρεσης δύο φυσικών αριθμών, δηλαδή ένα κλάσμα. Αρ21. Αναπαριστούν στην αριθμογραμμή τους θετικούς ρητούς και αισθητοποιούν τους αρνητικούς. Αναγνωρίζουν το σύνολο των ρητών. Αρ22. Συγκρίνουν και διατάσσουν ρητούς αριθμούς, χρησιμοποιώντας την αριθμογραμμή και αναγνωρίζουν ότι ένας ρητός δεν έχει επόμενο. Αρ23. Αναγνωρίζουν την απόλυτη τιμή ρητών αριθμών ως την απόστασή τους από το 0. Αρ24. Επεκτείνουν τις πράξεις των ακεραίων στους ρητούς. Αρ25. Αναγνωρίζουν τους αντίστροφους ως τους αριθμούς με γινόμενο 1 και τη διαίρεση ως τον πολλαπλασιασμό με τον αντίστροφο του	Ρητοί αριθμοί • επέκταση των ακεραίων στους ρητούς, πυκνότητα ρητών (16 ώρες)	Οι μαθητές εξοικειώνονται με τους ρητούς μέσω αναπαραστάσεών τους (π.χ. κλάσματα πάνω στην αριθμογραμμή). Με δραστηριότητες αποκτούν ευχέρεια στους υπολογισμούς με χρήση ιδιοτήτων των πράξεων. Τα προβλήματα δίνουν νόημα στις υπολογιστικές τεχνικές, αποφεύγοντας τη μονοδιάστατη εξάσκηση με πολύπλοκες παραστάσεις. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τη μεταβλητή ως γενικευμένο αριθμό, διατυπώνοντας συμβολικά τις ιδιότητες των πράξεων. (ενδεικτική δραστηριότητα ΑρΔ9)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά, ΟΕΔΒ, 2010) Α μέρος, παρ. 2.2 και 2.3 (ισοδύναμα κλάσματα, σύγκριση κλασμάτων), κεφ. 7ο (ρητοί αριθμοί).

διαίρετη. Αρ26. Γενικεύουν και εκφράζουν συμβολικά τον αντίθετο ενός αριθμού (-α), τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών καθώς και την αφαίρεση ως πρόσθεση του αντιθέτου ($\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$) και τη διαίρεση ως πολλαπλασιασμό του αντιστρόφου ($\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$). Αρ27. Διατυπώνουν και χρησιμοποιούν τον ορισμό των δυνάμεων με βάση ρητό και εκθέτη φυσικό. Αρ28. Προσδιορίζουν το πρόσημο της δύναμης ρητού αριθμού με βάση τον ορισμό. Αρ29. Υπολογίζουν την τιμή μιας αριθμητικής παράστασης με ρητούς (που μπορεί να περιέχει και δυνάμεις και παρενθέσεις) χρησιμοποιώντας την προτεραιότητα των πράξεων. Αρ30. Μοντελοποιούν προβλήματα χρησιμοποιώντας τις πράξεις και τις ιδιότητες των ρητών.			
A1. Διερευνούν αριθμητικές και γεωμετρικές κανονικότητες και διατυπώνουν το γενικό τους όρο λεκτικά και συμβολικά με μια αλγεβρική παράσταση. A2. Προσδιορίζουν ένα	Κανονικότητες–Συναρτήσεις • αλγεβρική και γραφική αναπαράσταση κανονικοτήτων (4 ώρες)	Η ανάγκη συμβολικής διατύπωσης του γενικού όρου μιας κανονικότητας οδηγεί στη χρήση της μεταβλητής. Η αναπαράσταση μιας κανονικότητας σε σύστημα	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) σελ. 74 (ασκ 15), παρ. 6.1 (παράσταση σημείων στο επίπεδο) Ψηφιακό περιβάλλον:

σημείο (ως διατεταγμένο ζεύγος) σε σύστημα αξόνων. A3. Αναπαριστούν κανονικότητες με εικόνες, με πίνακες και με σημεία σε σύστημα ημιαξόνων ή αξόνων και μεταβαίνουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη.		συντεταγμένων είναι ένα σημαντικό εργαλείο που θα αξιοποιηθεί αργότερα στις συναρτήσεις. (ενδεικτική δραστηριότητα AΔ1)	http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_328_g_3_t_2.html?open=activities&from=category_g_3_t_2.html
A4. Χρησιμοποιούν γράμματα για να εκφράσουν μεγέθη σε τύπους (σε καταστάσεις καθημερινής ζωής, φυσικής, κλπ) A5. Μοντελοποιούν προβλήματα με χρήση αριθμητικών και αλγεβρικών παραστάσεων. A6. Μεταφράζουν από λεκτικές εκφράσεις σε απλές αλγεβρικές παραστάσεις και αντίστροφα (π.χ. το διπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 3, $2\alpha+3$). A7. Υπολογίζουν την αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης και κατασκευάζουν πίνακες τιμών. A8. Χρησιμοποιούν την επιμεριστική ιδιότητα για να απλοποιήσουν γραμμικές αλγεβρικές παραστάσεις (αναγωγή ομοίων όρων). A9. Αναγνωρίζουν στοιχεία της δομής μιας αλγεβρικής παράστασης (π.χ. η $2x+3$ είναι άθροισμα, το $2x$ είναι γινόμενο).	Αλγεβρική παράσταση • μεταβλητές και αλγεβρικές παραστάσεις (6 ώρες)	Με δραστηριότητες μοντελοποίησης καταστάσεων, μετάφρασης λεκτικών διατυπώσεων, και υπολογισμού αριθμητικών τιμών, αναδεικνύεται η ανάγκη χρήσης μεταβλητών και αλγεβρικών παραστάσεων. Επιπλέον, η αναγωγή όμοιων όρων υποστηρίζεται αρχικά με μοντέλα / μεταφορές και στη συνέχεια με την επιμεριστική ιδιότητα. (ενδεικτική δραστηριότητα AΔ2)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) σελ 16, 72, 74 Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.1. http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/gymnasio/1_03_2011_ekpaideftiko_yliko_enotita_4.pdf σελ 1–11.

A10. Αναγνωρίζουν πότε ένας αριθμός είναι λύση εξίσωσης σε διαφορετικές μορφές εξισώσεων. A11. Αναγνωρίζουν ποσά ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα και επιλύουν προβλήματα με πίνακες και με εξισώσεις της μορφής $αβ=γχ$ και $α/β=γ/χ$. A12. Διερευνούν και διατυπώνουν τις ιδιότητες της ισότητας με βάση μοντέλα – μεταφορές. A13. Μοντελοποιούν προβλήματα με γραμμικές εξισώσεις της μορφής $αχ+β=γ$ και τις επιλύουν αριθμητικά, με μοντέλα–μεταφορές και αλγεβρικά με τις ιδιότητες της ισότητας.	Ισότητα – Ανισότητα • η εξίσωση ($αχ+β=γ$) ως εργαλείο επίλυσης προβλημάτων. • μετασχηματισμοί εξίσωσης. (7 ώρες)	Οι διαδικασίες δοκιμής και ελέγχου και των αντίστροφων πράξεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν παράλληλα με την μέθοδο των ισοδύναμων ισοτήτων. Η χρήση μοντέλων / μεταφορών (ζυγαριά, πλακίδια) οδηγεί τόσο στη διατύπωση των ιδιοτήτων της ισότητας, όσο και στη διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης. Η επίλυση των εξισώσεων πρέπει να γίνεται με ιδιότητες της ισότητας και όχι με μνημονικούς κανόνες (πχ όταν αλλάζει μέλος, αλλάζει πρόσημο), οι οποίοι αποκρύπτουν το νόημα της διαδικασίας. (ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ3, ΑΔ4)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάχος κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.2 (μόνο για εξισώσεις με άγνωστο στο ένα μέλος) http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/gymnasio/1_1_03_2011_ekpaideftiko_yliko_enotita_4.pdf σελ. 12-19 (μόνο για εξισώσεις με άγνωστο στο ένα μέλος).
---	--	---	--

Θεματική ενότητα: Γεωμετρία – Μέτρηση

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 32

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
Γ1. Διερευνούν τα γεωμετρικά σχήματα και διαμορφώνουν ορισμούς. Γ2. Αναγνωρίζουν σχέσεις μεταξύ των βασικών σχημάτων και τις εφαρμόζουν σε απλές καταστάσεις. Γ3. Χρησιμοποιούν κανόνα, διαβήτη ή άλλα εργαλεία για να διατυπώσουν και να	Γεωμετρικά σχήματα • αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση των γεωμετρικών σχημάτων • ανάλυση των βασικών γεωμετρικών σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες • κατασκευές και	Η αναφορά στα βασικά γεωμετρικά σχήματα γίνεται μέσα από την παρατήρηση/διερεύνηση οικείων στους μαθητές σχημάτων του χώρου. Ο εκπαιδευτικός με κατάλληλα ερωτήματα εντοπίζει και ανατρέπει διάφορες	Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά., Γεωμετρία, Κεφάλαιο 1^ο & 3^ο Α- ΓΔ3-Κατασκευάζοντας παραλληλόγραμμα Φύλλο εργασίας: Φύλλο εργασίας-Α- ΓΔ3-Κατασκευάζοντας

ελέγχουν εικασίες σχετικά με τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων (είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες και ως προς τις πλευρές, είδη τετραπλεύρων, γωνίες που σχηματίζονται από δύο παράλληλες και μία τέμνουσα). Γ4. Διερευνούν και αιτιολογούν τις ιδιότητες των σχημάτων με επαγωγικούς, συλλογισμούς και (μη τυπικές) αποδείξεις (άθροισμα των γωνιών του τριγώνου, ιδιότητες των τετραπλεύρων, ταξινόμηση των τετραπλεύρων). Γ5. Εφαρμόζουν τις γνώσεις των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων στην επίλυση προβλημάτων. Γ6. Χρησιμοποιούν κανόνα, διαβήτη ή άλλα εργαλεία για να σχεδιάσουν γεωμετρικά σχήματα. Διαχωρίζουν την κατασκευή με βαθμολογημένα όργανα από τη γεωμετρική κατασκευή με κανόνα και διαβήτη. Γ7. Επιλύουν προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών.	σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων. (26 ώρες)	παρανοήσεις με χρήση αντιπαραδειγμάτων αναδεικνύοντας την ανάγκη ύπαρξης καθολικά αποδεκτών ορισμών. Παρουσιάζει σύνθετα γεωμετρικά σχήματα και ζητά από τους μαθητές να προσδιορίσουν τα βήματα της κατασκευής τους και στη συνέχεια να τα κατασκευάσουν με χρήση γεωμετρικών οργάνων ή λογισμικού. Ενδεικτικές δραστηριότητες ΓΔ1, ΓΔ2, ΓΔ3, ΓΔ4, ΓΔ5, ΓΔ6, ΓΔ7.	παράλληλόγραμμο Α- ΓΔ4-Κατασκευάζοντας είδη τετραπλεύρων. Φύλλο εργασίας:Φύλλο εργασίας-Α-ΓΔ4-Κατασκευάζοντας είδη τετραπλεύρων Α-ΓΔ5-εξωτερική τριγώνου
Μ1. Συνδέουν τη σύγκριση των ευθυγράμμων τμημάτων, των τόξων του ίδιου ή ίσων κύκλων και των γωνιών με τις διαδικασίες και τα όργανα μέτρησης. Μ2. Υπολογίζουν μήκη χρησιμοποιώντας ιδιότητες ή σχέσεις (π.χ. την περίμετρο “μη	Μέτρηση μήκους, μέτρηση γωνίας • άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις μήκους / γωνίας • μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες μέτρησης μήκους /γωνίας (6 ώρες)	Οι μαθητές, είναι σημαντικό να κατανοήσουν ότι η μέτρηση μιας γωνίας με μοιρογνωμόνιο αποτελεί εφαρμογή της μεθόδου σύγκρισης γωνιών μέσω της μετατροπής τους σε επίκεντρες (το μοιρογνωμόνιο είναι ένα	Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά., Γεωμετρία, Κεφάλαιο 1^ο.

συμβατικών” ευθύγραμμων σχημάτων). M3. Υπολογίζουν γωνίες χρησιμοποιώντας ιδιότητες ή σχέσεις. M4. Επιλύουν προβλήματα υπολογισμού μηκών και γωνιών με τη χρήση κατάλληλων μονάδων μέτρησης (με βάση την ακρίβεια που απαιτείται).		βαθμονομημένο ημικύκλιο, στο οποίο η γωνία γίνεται επίκεντρη έτσι ώστε η διάμετρός του να συμπίπτει με μια πλευρά της γωνίας). (ενδεικτική δραστηριότητα MΔ1)	
---	--	---	--

Θεματική ενότητα: Στοχαστικά Μαθηματικά

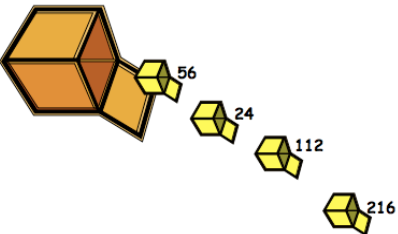
Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 14

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
Σ7. Διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα και αφορούν διαφορετικά χαρακτηριστικά της περίπτωσης που εξετάζεται. Σ8. Συλλέγουν δεδομένα καθορίζοντας κριτήρια επιλογής και αιτιολογούν τις επιλογές τους. Σ9. Κατασκευάζουν απλά κυκλικά διαγράμματα και χρονοδιαγράμματα. Σ10. Επιλέγουν κατάλληλες μορφές αναπαράστασης και επιχειρηματολογούν για τις επιλογές τους. Σ11. Ερμηνεύουν πίνακες και στατιστικά διαγράμματα, καταλήγουν σε συμπεράσματα και κάνουν προβλέψεις.	Δεδομένα • συλλογή, αναπαράσταση, και ερμηνεία δεδομένων (5 ώρες)	Οι μαθητές είναι σημαντικό να χρησιμοποιούν πραγματικά δεδομένα που συλλέγουν οι ίδιοι ως πλαίσιο αναφοράς για τις έννοιες της Στατιστικής. Επίσης είναι σημαντικό να αναπτύξουν κριτική στάση απέναντι σε τρόπους παρουσίασης των δεδομένων που ίσως είναι παραπλανητικοί. Για την κατασκευή απλών κυκλικών διαγραμμάτων δίνονται έτοιμοι κύκλοι χωρισμένοι σε ίσα τόξα (π.χ. 4 ή 6 ή 12) και δεδομένα που μπορούν να παρασταθούν σε αυτούς. Ενδεικτική δραστηριότητα ΣΔ1	Μέρος του 4^{ου} κεφαλαίου του βιβλίου: Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας, κ.ά.) με κατάλληλες τροποποιήσεις

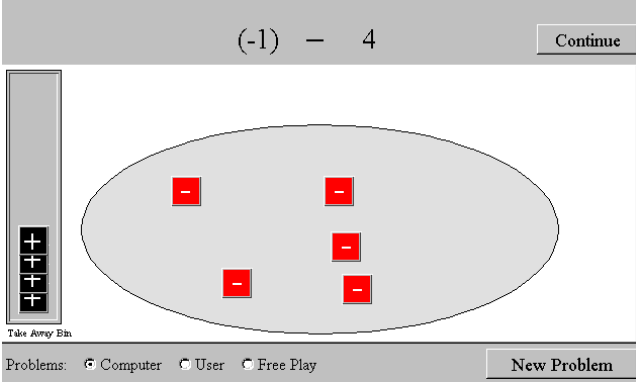
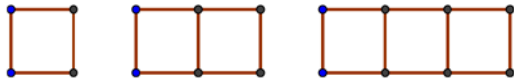
Σ12. Εικάζουν ή/και προσδιορίζουν την διάμεσο τιμή, την επικρατούσα τιμή και την μέση τιμή με βάση την αναπαράσταση των δεδομένων. Σ13. Χρησιμοποιούν τα μέτρα θέσης για να περιγράψουν δεδομένα, να κάνουν συγκρίσεις και να εξάγουν συμπεράσματα.	Μέτρα θέσης (3 ώρες)	Οι μαθητές είναι σημαντικό να αναπτύξουν μεθόδους προσδιορισμού των μέτρων θέσης, πέρα από τις καθαρά υπολογιστικές. Ενδεικτική δραστηριότητα ΣΔ2.	Μέρος του 4^{ου} κεφαλαίου του βιβλίου: Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας, κ.ά.) με κατάλληλες τροποποιήσεις http://illuminations.nctm.org/activitydetail.aspx?ID=160 Οδηγίες: Οδηγίες-A-ΣΔ2-Διάμεσος_Μέση τιμή
Σ14. Περιγράφουν χαρακτηριστικά των δεδομένων που προκύπτουν από τις αναπαραστάσεις τους χρησιμοποιώντας ενδεχομένως και εκφράσεις όπως: εύρος, συστάδες δεδομένων, κενά, απόμακρη τιμή. Σ15. Εξηγούν χαρακτηριστικά των δεδομένων (όπως λόγοι ύπαρξης απόμακρων τιμών) ή πιθανούς λόγους για την μεταβλητότητα των δεδομένων.	Μεταβλητότητα (1 ώρα)	Η ηλικιακή περίοδος, για παράδειγμα, είναι ένας από τους πιθανούς λόγους της μεταβλητότητας του ύψους των μαθητών (οι έφηβοι έχουν διαφορετικό ύψος από τα παιδιά των μικρών τάξεων του Δημοτικού). Ωστόσο υπάρχουν και άλλοι λόγοι, επειδή έφηβοι της ίδιας ηλικίας δεν έχουν το ίδιο ύψος.	
Π1. Προσδιορίζουν και περιγράφουν το δειγματικό χώρο (δ.χ.) ενός πειράματος τύχης που πραγματοποιείται σε δυο ή περισσότερα στάδια χρησιμοποιώντας κατάλληλες αναπαραστάσεις. Π2. Μεταφράζουν τα ενδεχόμενα από τη φυσική γλώσσα σε στοιχεία του δειγματικού χώρου.	Πειράματα τύχης - Δειγματικοί χώροι • περιγραφή σύνθετων δειγματικών χώρων και ενδεχομένων (2 ώρες)	Οι μαθητές περιγράφουν το δειγματικό χώρο που προκύπτει από παιχνίδια χρησιμοποιώντας λίστα ή δέντροδιάγραμμα ή πίνακα διπλής εισόδου και κατόπιν εκφράζουν με στοιχεία του δειγματικού χώρου κάποια ενδεχόμενα.	Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου (Αργυράκης, Βουργανός, κ.ά.) σελ 167-172 www.math.uah.edu/stat/applets/DiceSampleExperiment.xhtml
Π3. Υπολογίζουν την πιθανότητα ενός	Πιθανότητα ενδεχομένου	Οι μαθητές είναι σημαντικό να	www.shodor.org/interactivate/activities/Adjusta

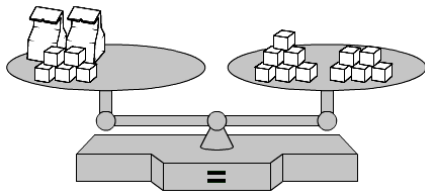
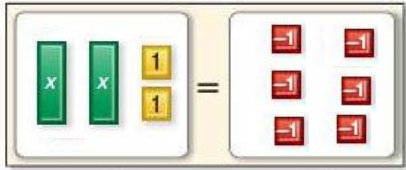
σύνθετου ενδεχομένου χρησιμοποιώντας τον κλασσικό ορισμό των Πιθανοτήτων. Π4. Παρατηρούν ότι η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου πλησιάζει την τιμή της πιθανότητας, όταν έχουμε μεγάλο αριθμό εκτελέσεων του ίδιου πειράματος (Νόμος των Μεγάλων Αριθμών).	σχετική συχνότητα και πιθανότητα σε σύνθετα πειράματα τύχης (3 ώρες)	κατανοήσουν ότι, όσο αυξάνει ο αριθμός των εκτελέσεων ενός πειράματος τύχης, τότε η σχετική συχνότητα του ενδεχομένου τείνει να σταθεροποιηθεί «γύρω» από την πιθανότητα. Προτείνεται να παρουσιαστούν και παραδείγματα όπου τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα. Ενδεικτικές δραστηριότητες ΠΔ1, ΠΔ2.	bleSpinner
--	--	--	----------------------------

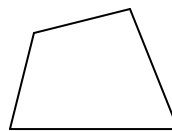
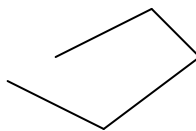
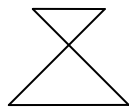
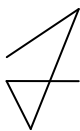
Ενδεικτικές Δραστηριότητες

A/A	Περιγραφή δραστηριότητας	ΠΜΑ
ΑρΔ1	Μία μαγική μηχανή πολλαπλασιάζει τους αριθμούς που εισέρχονται σε αυτή με έναν αριθμό. Η εικόνα δείχνει τους αριθμούς που βγήκαν από τη μηχανή. Να βρείτε με ποιον αριθμό μπορεί να πολλαπλασιάζει η μηχανή τους αριθμούς που της βάζουμε. 	Αρ5
ΑρΔ2	Ο Αντρέας παίζει ποδόσφαιρο κάθε 4 ημέρες, ο Μιχάλης κάθε 5 ημέρες και ο Μαρίνος κάθε 8 ημέρες. Αν σήμερα παίζουν ποδόσφαιρο και οι τρεις μαζί, τότε να υπολογίσετε μετά από πόσες ημέρες θα συμβεί το ίδιο για δεύτερη φορά.	Αρ6
ΑρΔ3	Ένας αριθμός μετατρέπεται από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα και δίνει τετραψήφιο αριθμό. Ποιος θα μπορούσε να είναι ο αρχικός αριθμός;	Αρ7
ΑρΔ4	Σε ένα παιχνίδι, δύο ομάδες παιδιών απαντούν σε ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση η ομάδα παίρνει μια θετική κάρτα και για κάθε λάθος παίρνει μια αρνητική. Για παράδειγμα, αν η ομάδα Α έχει 5 θετικές κάρτες (+5) και πάρει άλλες δύο θετικές (+2), θα έχει 7 θετικές, δηλαδή σύνολο +7 πόντους. Αυτό μπορούμε να το εκφράσουμε με την πρόσθεση: $(+5) + (+2) = +7$. α) Το σχήμα 1 περιγράφει την κατάσταση μιας ομάδας που είχε 3 αρνητικές και πήρε δύο ακόμη αρνητικές. Μπορείτε να εκφράσετε αυτή την κατάσταση με μια πράξη;	Αρ12, Αρ13

	β) Περιγράψτε με λόγια και με μια πράξη την κατάσταση που περιγράφει το σχήμα 2. Ποιο είναι το σύνολο πόντων της ομάδας; γ) Χρησιμοποιήστε αυτό το παιχνίδι για να πείτε τι μπορεί να σημαίνουν οι επόμενες πράξεις και υπολογίστε τα αποτελέσματά τους: $(+3)+(+4)$ $(-2)+(-5)$ $(-8)+(-3)$ $(-7)+(-5)$ Μπορείτε να σκεφτείτε έναν κανόνα για να κάνετε αυτές τις προσθέσεις, χωρίς κάθε φορά να σκέφτεστε τις κάρτες; δ) Χρησιμοποιήστε αυτό το παιχνίδι για να πείτε τι μπορεί να σημαίνουν οι επόμενες πράξεις και υπολογίστε τα αποτελέσματά τους: $(+3)+(-5)$ $(-2)+(+3)$ $(-5)+(+3)$ $(+7)+(-4)$ Μπορείτε να σκεφτείτε έναν κανόνα για να κάνετε αυτές τις προσθέσεις, χωρίς κάθε φορά να σκέφτεστε τις κάρτες;	
ΑρΔ5	Στην εφαρμογή χρησιμοποιείται το διακριτό μοντέλο των θετικών και αρνητικών καρτών όπου με την αλληλοαναίρεση ίδιου αριθμού θετικών και αρνητικών καρτών, αισθητοποιούν και κατανοούν την πράξη της πρόσθεσης ακεραίων αριθμών διεύθυνση ιστοσελίδας: http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_161_g_1_t_1.html?from=topic_t_1.html Οδηγίες:A-ΑρΔ5-Πρόσθεση με θ-α κάρτες.doc	Αρ12, Αρ13
ΑρΔ6	Σε μια παραλλαγή του παιχνιδιού με τις κάρτες, μπορούν από μια ομάδα να αφαιρούνται κάρτες, θετικές ή αρνητικές. Έτσι, για παράδειγμα, όταν αφαιρούνται 5 θετικές κάρτες από 10, μένουν 5, δηλαδή $(+10)-(+5)=+5$. α) Πως μπορούμε να εκφράσουμε (με πράξη) την κατάσταση μιας ομάδας που είχε 5 αρνητικές κάρτες και της αφαιρέθηκαν 3 αρνητικές; Ποιο είναι τώρα το σκορ της ομάδας; β) Μια ομάδα έχει σκορ +25. Με ποιους τρόπους μπορεί να αυξήσει το σκορ της σε +28; Με ποιους τρόπους μπορεί να μειωθεί το σκορ της σε +20; γ) Πώς θα μπορούσαν από μια ομάδα που δεν έχει ούτε θετικές ούτε αρνητικές κάρτες να αφαιρεθούν 5 θετικές κάρτες; 3 αρνητικές; γ) Χρησιμοποιήστε το παιχνίδι με τις κάρτες για να πείτε τι μπορεί να σημαίνουν οι	Αρ14, Αρ15

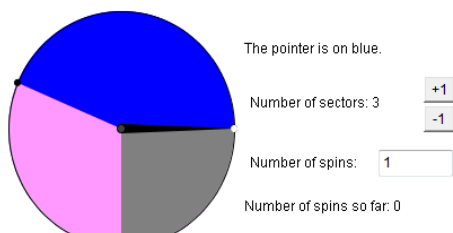
	παρακάτω πράξεις και υπολογίστε τα αποτελέσματά τους: $(+3)-(-5)$ $(-2)-(+3)$ $(-5)-(+3)$ $(+7)-(-4)$ $(-7)-(-5)$ δ) Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την πρόσθεση για να κάνετε τις αφαιρέσεις, χωρίς κάθε φορά να σκέφτεστε τις κάρτες;	
ΑρΔ7	Στην εφαρμογή χρησιμοποιείται το διακριτό μοντέλο των θετικών και αρνητικών καρτών όπου με το τέχνασμα πρόσθεσης ίδιου αριθμού θετικών και αρνητικών καρτών, αισθητοποιούν και κατανοούν την αφαίρεση ακέραιων αριθμών. Με κατάλληλη χρήση της εφαρμογής κατανοούν σε ένα πραγματικό πλαίσιο ότι η αφαίρεση με έναν ακέραιο αριθμό ισοδυναμεί με την πρόσθεση του αντίθετου αριθμού (διεύθυνση ιστοσελίδας: http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_162_g_2_t_1.html?from=topic_t_1.html Οδηγίες: Α-ΑρΔ7-Αφαίρεση με θ-α κάρτες.doc  The screenshot shows a digital interface for a math application. At the top, there's a display showing $(-1) - 4$ and a 'Continue' button. Below this is a large oval area containing several red cards with minus signs. To the left of the oval is a vertical stack of cards with plus signs. At the bottom, there's a 'New Problem' button and some navigation options like 'Computer', 'User', and 'Free Play'.	Αρ13, Αρ14
ΑρΔ8	Ένα ρομποτάκι κινείται πάνω στην αριθμογραμμή μέσω ενός τηλεχειριστηρίου-αριθμομηχανής. Το +5 ερμηνεύεται ως "5 βήματα δεξιά", ενώ το -5 ερμηνεύεται ως "5 βήματα αριστερά". Αν υποθέσουμε ότι το ρομποτάκι ξεκινάει από τη θέση 0, ποια θα είναι η καινούρια του θέση, όταν πληκτρολογήσουμε: α) +3 β) -5 γ) +3+5 ε) +5-3 η) -4-7 θ) -5+8 ι) +3+5-4 ια) -2+3-5 ιβ) -4-2+6-1 Πώς μπορούμε να οδηγήσουμε το ρομποτάκι από τη θέση 5 στη θέση -2 με δύο κινήσεις; Μπορείτε να διατυπώσετε έναν κανόνα, για να βρίσκουμε εκ των προτέρων τη θέση του;	Αρ12, Αρ13, Αρ15
ΑρΔ9	Υπολογίστε την τιμή της αριθμητικής παράστασης $\frac{2}{5} \cdot 10 - 3 \cdot (-2) - \frac{1}{2}(-3 + 7 - 2)$ καταγράφοντας σε κάθε κίνηση που κάνετε τον ορισμό ή την ιδιότητα που χρησιμοποιείτε.	Αρ27, Αρ30
ΑΔ1	Χρησιμοποιώντας σπέρτα κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο (1ο σχήμα) και κατόπιν προσθέτουμε δίπλα του άλλο ένα τετράγωνο (2ο σχήμα), κι άλλο ένα τετράγωνο (3ο σχήμα), κοκ  The diagrams show three stages of constructing squares using sticks. The first diagram shows a single square (1 square). The second diagram shows two squares sharing a common side (2 squares). The third diagram shows three squares in a row, sharing common sides (3 squares). α) Να βρείτε πόσα σπέρτα χρειάζονται για 4 τετράγωνα, για 10 τετράγωνα, για 57 τετράγωνα β) Να παραστήσετε τα ζεύγη (αριθμός τετραγώνων, αριθμός σπέρτων) σε ένα σύστημα αξόνων.	Α1, Α2, Α3

AΔ2	Στο ταξί πληρώνουμε 1,19€ για «σημαία» και 0,68€ για κάθε χιλιόμετρο. Πόσα χρήματα θα πληρώσουμε (α) για μια διαδρομή 7 χιλιομέτρων, (β) για μια διαδρομή x χιλιομέτρων.	A5
AΔ3	Στο διπλανό σχήμα οι τσάντες έχουν το ίδιο βάρος και κάθε κυβάκι ζυγίζει 50 g. Η ζυγαριά ισορροπεί. Υπολογίστε πόσο ζυγίζει κάθε τσάντα. Περιγράψτε τον τρόπο που θα το υπολογίζατε, αν είχατε μπροστά σας τη ζυγαριά και δεν είχατε χαρτί και μολύβι. Πώς θα περιγράφατε τον παραπάνω τρόπο με τη διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης;	 A12, A13
AΔ4	Στο διπλανό σχήμα περιγράφεται μια ισότητα (τα δύο x εκφράζουν τον ίδιο αριθμό). Μπορείτε να βρείτε το x χωρίς χαρτί και μολύβι; Περιγράψτε τον τρόπο που λύσατε το πρόβλημα, πρώτα με λόγια και μετά με τη διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης.	 A12, A13
ΓΔ1	Δίνονται στους μαθητές μοντέλα ή εικόνες διάφορων στερεών σχημάτων (φυσικών ή γεωμετρικών) και ζητείται να εντοπίσουν βασικά γεωμετρικά σχήματα που γνωρίζουν από το Δημοτικό. Οι μαθητές διερευνούν τα στερεά, καταγράφουν τα ονόματα των σχημάτων που αναγνωρίζουν, παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους και τα συγκρίνουν με εκείνα των συμμαθητών τους. (Το είδος και το πλήθος των βασικών σχημάτων που θα εντοπίσουν οι μαθητές εξαρτάται από το είδος των στερεών που θα δοθούν προς διερεύνηση). Αξιοποιώντας τα αποτελέσματα την δραστηριότητας και με κατάλληλα ερωτήματα, ο διδάσκων προκαλεί μια συζήτηση στην τάξη για την ανάγκη συστηματικής καταγραφής των βασικών γεωμετρικών σχημάτων και σαφήνειας στην απόδοση των ονομάτων, στην περιγραφή των σχέσεων και των ιδιοτήτων. Στο πλαίσιο αυτό γίνεται μια ενημέρωση των μαθητών για το νόημα και την οργάνωση της θεωρίας στη Γεωμετρία και τα Μαθηματικά γενικότερα.	Γ1
ΓΔ2	Ο διδάσκων απευθύνει το ερώτημα “τι είναι τετράπλευρο” και χρησιμοποιεί τις απαντήσεις των μαθητών για να τους καθοδηγήσει στη διατύπωση του ορισμού. Στην πολύ πιθανή απάντηση “ένα σχήμα με τέσσερις πλευρές”, παρουσιάζει διαδοχικά τα παρακάτω σχήματα και ζητά κάθε φορά από τους μαθητές να εντοπίσουν εκείνο το χαρακτηριστικό που δε συνδέεται με την εικόνα που έχουν για την έννοια “τετράπλευρο”.	Γ1



ΓΔ3	Με το Χελωνόκοσμο διερευνούν βασικές ιδιότητες των παραλληλογράμμων χρησιμοποιώντας εργαλεία συμβολικής έκφρασης και δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων. Κατασκευάζουν παραλληλόγραμμα, ορθογώνια, ρόμβους και τετράγωνα. Εκτελούν τις διαδικασίες με διαφορετικές τιμές πλευρών ή γωνιών τις οποίες παράλληλα μπορούν να μεταβάλλουν δυναμικά χρησιμοποιώντας τα διαθέσιμα υπολογιστικά εργαλεία. Κατασκευάζουν παραλληλόγραμμα και τις διάφορες μορφές του, χρησιμοποιώντας τις λιγότερες δυνατές μεταβλητές. Διαπραγματεύονται τις σχέσεις εγκλεισμού των διάφορων μορφών παραλληλογράμμου (αρχείο: Α-ΓΔ3-Κατασκευάζοντας παραλληλόγραμμα) Φύλλο εργασίας: Φύλλο εργασίας-Α-ΓΔ3- Κατασκευάζοντας παραλληλόγραμμα).	Γ3, Γ4, Γ6, Α4, Α5
ΓΔ4	Με το Χελωνόκοσμο διερευνούν βασικές ιδιότητες των τετραπλεύρων χρησιμοποιώντας εργαλεία συμβολικής έκφρασης και δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων. Διορθώνουν παραμετρικές διαδικασίες, ώστε να κατασκευάζουν τετράπλευρα, παραλληλόγραμμα και τραπέζια και κατανοούν βασικές ιδιότητές τους (αρχείο: Α-ΓΔ4- Κατασκευάζοντας είδη τετραπλεύρων. Φύλλο εργασίας: Φύλλο εργασίας-Α-ΓΔ4- Κατασκευάζοντας είδη τετραπλεύρων)	Γ3, Γ4, Γ6, Α4, Α5
ΓΔ5	Ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν ένα οξυγώνιο και ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο και να συγκρίνουν τις εξωτερικές με τις εσωτερικές γωνίες κάθε τριγώνου. Αναδεικνύεται η ανεπάρκεια των μετρήσεων για την αιτιολόγηση της σχετικής ιδιότητας (κάθε εξωτερική είναι μεγαλύτερη από κάθε απέναντι εσωτερική γωνία) και χρησιμοποιείται το αρχείο Α-ΓΔ5-εξωτερική τριγώνου για να αναδειχθεί η σημασία της αιτιολόγησης με ένα νοητικό πείραμα.	Γ4

ΓΔ6	Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου χρησιμοποιείται ως βασικό αποτέλεσμα για τον προσδιορισμό μιας σχέσης ανάμεσα στο άθροισμα των γωνιών και το πλήθος των πλευρών ενός τυχαίου πολυγώνου. Οι μαθητές κατασκευάζουν πολύγωνα με 4, 5, 6, 7 και 8 πλευρές, τα χωρίζουν σε τρίγωνα με διαγώνιες που άγονται από μία κορυφή και καταγράφουν σε πίνακα το είδος του πολυγώνου, το πλήθος των τριγώνων στα οποία χωρίζεται και το άθροισμα των γωνιών του. Από τα στοιχεία του πίνακα συνάγουν με επαγωγικό τρόπο τη ζητούμενη γενική σχέση.	Γ4, Γ5
ΓΔ7	Για εμβάθυνση στην έννοια της γεωμετρικής κατασκευής, αναπτύσσεται μια δραστηριότητα στην οποία οι μαθητές: α) δημιουργούν ένα γεωμετρικό σχήμα που έχει δεδομένες ιδιότητες και β) περιγράφουν τα βήματα της κατασκευής ενός δεδομένου γεωμετρικού σχήματος. Παράδειγμα: • Να κατασκευάσετε με χρήση του χάρακα, του μοιρογνωμονίου και του διαβήτη (ή με χρήση λογισμικού) ένα παραλληλόγραμμο του οποίου οι πλευρές έχουν μήκη 5,1cm και 3,2cm και σχηματίζουν γωνία 52°. • Να περιγράψετε τον τρόπο που κατασκευάστηκε με χρήση του χάρακα και του μοιρογνωμονίου (ή με χρήση λογισμικού) το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ στο οποίο οι διαγώνιες έχουν μήκη ΑΓ = 6cm, ΒΔ = 3,5cm και σχηματίζουν γωνία 66°.	Γ6, Γ7
ΜΔ1	Οι μαθητές καταγράφουν και σχεδιάζουν τα διάφορα είδη γωνιών (μηδενική, κυρτή, οξεία, ορθή, αμβλεία, ευθεία, μη κυρτή, πλήρης) και τις ταξινομούν ως προς το μέτρο με διάφορους τρόπους (γραμμική διάταξη, διάγραμμα ροής κλπ)	Μ1
ΣΔ1	Με αφορμή ένα διάγραμμα, όπως το διπλανό, που παρουσιάζει τα ποσοστά τηλεθέασης ανάμεσα σε δύο τηλεοπτικές εκπομπές, οι μαθητές κρίνουν και αξιολογούν τη δήλωση που έκαναν οι συντελεστές της εκπομπής Α, όταν παρουσίαζαν και συνέκριναν τα ποσοστά τηλεθέασης και η οποία ήταν ότι: «Το γράφημα δείχνει ξεκάθαρα ότι η εκπομπή Α είναι πιο δημοφιλής από την εκπομπή Β και στην πραγματικότητα είναι σχεδόν τρεις φορές πιο δημοφιλής».	Σ5
ΣΔ2	Μέσα από το δυναμικό χειρισμό δεδομένων οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν και να κατασκευάσουν καταστάσεις με μικρά σύνολα δεδομένων τα οποία θα ικανοποιούν κάποια κριτήρια ως προς το πλήθος, το εύρος ή τα μέτρα θέσης, με σκοπό να κατανοήσουν βαθύτερα και πιο διαισθητικά διάφορες πτυχές ή/και ιδιότητες εννοιών της στατιστικής, να αναπτύξουν στρατηγικές ελέγχου κάποιων παραμέτρων ανοικτών	Σ6, Σ7

	προβλημάτων καθώς και στρατηγικές για τη διερεύνηση τέτοιων προβλημάτων. Διεύθυνση ιστοσελίδας http://illuminations.nctm.org/activitydetail.aspx?ID=160 Οδηγίες: Οδηγίες-A&B-Σ Διάμεσος_ Μέση τιμή																					
ΠΔ1	Ρίχνοντας δυο ζάρια τι πιθανότητα έχουμε να φέρουμε δυο βάρια και τι πιθανότητα να φέρουμε ένα 6 κι ένα 5; Τι είναι πιο εύκολο να φέρουμε: ζαριά με άθροισμα μεγαλύτερο από 7 ή ζαριά με γινόμενο μικρότερο από 7;	Π3																				
ΠΔ2	Σε ένα τροχό τύχης www.shodor.org/interactivate/activities/AdjustableSpinner που είναι χωρισμένος σε 2 ή περισσότερους άνισους κυκλικούς τομείς με διαφορετικά χρώματα θέλουμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα, όταν γυρίσουμε το δείκτη, να πετύχουμε κάποιο συγκεκριμένο χρώμα πχ το μπλε. <table><tr><th colspan="4">Probability</th></tr><tr><th></th><th>Count</th><th>Experimental</th><th>Theoretical</th></tr><tr><td>Blue</td><td>214</td><td>42.8%</td><td>43.61%</td></tr><tr><td>Pink</td><td>150</td><td>30.00%</td><td>31.39%</td></tr><tr><td>Gray</td><td>136</td><td>27.2%</td><td>25.00%</td></tr></table> Εκτελώντας αρχικά μικρό αριθμό δοκιμών και κατόπιν ολοένα και μεγαλύτερο ζητάμε από τους μαθητές να σημειώσουν σε ένα φύλλο εργασίας τις τιμές της σχετικής συχνότητας για το μπλε χρώμα μετά από 5, 10 50, 100, 500, 1000, 2000, 5000 κλπ δοκιμές. Ζητάμε κατόπιν οι μαθητές να εκτιμήσουν την πιθανότητα να πετύχουμε το μπλε χρώμα και συζητάμε με ποιον τρόπο έφτασαν στην εκτίμησή της.	Probability					Count	Experimental	Theoretical	Blue	214	42.8%	43.61%	Pink	150	30.00%	31.39%	Gray	136	27.2%	25.00%	Π4
Probability																						
	Count	Experimental	Theoretical																			
Blue	214	42.8%	43.61%																			
Pink	150	30.00%	31.39%																			
Gray	136	27.2%	25.00%																			

Β΄ Γυμνασίου

Θεματική ενότητα: Αριθμοί – Άλγεβρα

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 46

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
Αρ1. Διερευνούν τις δεκαδικές αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών και κάνουν μετατροπές από τη μία μορφή στην άλλη. Αρ2. Αναγνωρίζουν, μέσα από προβλήματα, την αναγκαιότητα εισαγωγής και χρήσης των τετραγωνικών ριζών θετικών αριθμών και υπολογίζουν τετραγωνικές ρίζες με δοκιμές, με διαδοχικές προσεγγίσεις και με χρήση υπολογιστή τσέπης. Αρ3. Διερευνούν την ύπαρξη αριθμών που δεν είναι ρητοί και αναγνωρίζουν τους άρρητους. Αρ4. Αναπαριστούν γεωμετρικά και τοποθετούν στην ευθεία αριθμούς της μορφής $\sqrt{a}$. Αρ5. Αναγνωρίζουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Διερευνούν τις σχέσεις των συνόλων των φυσικών, των ακεραίων, των ρητών, των άρρητων και των πραγματικών. Αρ6. Συγκρίνουν και διατάσσουν πραγματικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας την ευθεία. Αρ7. Επεκτείνουν τις πράξεις των ρητών και τις ιδιότητές τους στους πραγματικούς.	Άρρητοι αριθμοί • άρρητοι, επέκταση από τους ρητούς στους πραγματικούς, πυκνότητα (8 ώρες)	Είναι σημαντικό, μέσα από δραστηριότητες, να αναδειχθούν: α) η αναγκαιότητα εισαγωγής των τετραγωνικών ριζών και των άρρητων αριθμών, β) τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των άρρητων, καθώς και τα κοινά χαρακτηριστικά τους με τους ρητούς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (ενδεικτική δραστηριότητα ΑρΔ1)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) κεφ. 2^ο.

Αρ8. Διερευνούν την ιδιότητα της πυκνότητας των πραγματικών αριθμών. Αρ9. Χρησιμοποιούν τους πραγματικούς αριθμούς στην επίλυση προβλημάτων.			
A1. Αναγνωρίζουν συμμεταβαλλόμενα ποσά (μεταβλητές) σε συγκεκριμένες καταστάσεις και διακρίνουν ποιο ποσό εξαρτάται από το άλλο. A2. Αναγνωρίζουν σχέσεις που είναι συναρτήσεις (σε κάθε τιμή της μιας αντιστοιχεί μόνο μία τιμή της άλλης) και τις διακρίνουν από σχέσεις που δεν είναι συναρτήσεις. Αναγνωρίζουν ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή σε μια συνάρτηση. A3. Σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση συναρτήσεων χρησιμοποιώντας πίνακες τιμών. A4. Εξετάζουν αν ένα σημείο (διατεταγμένο ζεύγος) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. A5. Υπολογίζουν, γραφικά και αλγεβρικά, τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής για δεδομένες τιμές της ανεξάρτητης και αντιστρόφως. A6. Μοντελοποιούν μια κατάσταση με μια συνάρτηση λεκτικά, αριθμητικά (με πίνακα τιμών), γεωμετρικά (με γραφική παράσταση) και συμβολικά (με τύπο). A7. Βρίσκουν τις τιμές που μπορεί να πάρει η	Κανονικότητες– Συναρτήσεις • συμμεταβολή μεγεθών, πολλαπλές αναπαραστάσεις συνάρτησης (7 ώρες)	Η συμμεταβολή μεγεθών είναι οικεία στους μαθητές από την καθημερινή τους ζωή αλλά και από προηγούμενες σχολικές εμπειρίες. Οι δραστηριότητες θα πρέπει να εισάγουν την έννοια της συνάρτησης και των αναπαραστάσεών της με άμεση αναφορά σε καταστάσεις και προβλήματα (μοντελοποίηση). Η ικανότητα να μεταφράζουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (όπου είναι δυνατόν) είναι στοιχείο κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης. (ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ1)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 3.1 και 3.2. http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/gymnasiou/11_03_2011_ekpaideftiko_yliko_enotita_4.pdf σελ 20-34 (μόνο δραστηριότητες).

ανεξάρτητη μεταβλητή από τη γραφική παράσταση και από τις συνθήκες της κατάστασης. A8. Επιλύουν προβλήματα που μοντελοποιούνται με συναρτήσεις. Αιτιολογούν τις απαντήσεις τους χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις των συναρτήσεων (γραφικές παραστάσεις, πίνακες τιμών, τύπους) και μεταβαίνουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (όπου είναι δυνατόν).			
A9. Προσδιορίζουν τη σχέση που συνδέει τις αντίστοιχες τιμές δυο ανάλογων ποσών. A10. Διερευνούν συγκεκριμένες συναρτήσεις της μορφής $y=ax$. Σχεδιάζουν τη γραφική παράστασή τους και διαπιστώνουν ότι είναι ευθεία. Εξηγούν γιατί η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή και διερευνούν το ρόλο του a. A11. Διερευνούν τη μεταβολή του y για οποιαδήποτε μοναδιαία αύξηση του x σε συναρτήσεις της μορφής $y=ax$. Συγκρίνουν με συναρτήσεις που η αντίστοιχη μεταβολή του y δεν είναι σταθερή (πχ τετραγωνικές) A12. Επιλύουν (αλγεβρικά και γραφικά) προβλήματα ανάλογων ποσών χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $y=ax$.	Κανονικότητες-Συναρτήσεις • ανάλογα ποσά, η συνάρτηση $y=ax$. (4 ώρες)	Μέσα από προβλήματα ανάλογων ποσών μπορεί να εισαχθεί και να διερευνηθεί η συνάρτηση $y=ax$ και οι αναπαραστάσεις της. Η χρήση της γραφικής παράστασης από τους μαθητές ως εργαλείο διερεύνησης και αιτιολόγησης αποτελεί σημαντικό στόχο των δραστηριοτήτων. (ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ2, ΑΔ3, ΑΔ4)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 3.3. B-ΑΔ3-Ανάλογα ποσά και η $\psi=ax-1$, B-ΑΔ3-Ανάλογα ποσά και η $\psi=ax-2$ Φύλλο εργασίας- B-ΑΔ3-Ανάλογα ποσά και η $\psi=ax$ B-ΑΔ4-Η μεταβολή της τεταγμένης στην $\psi=ax$
A13. Μοντελοποιούν και επιλύουν (γραφικά και αλγεβρικά) προβλήματα με συναρτήσεις της μορφής $y=ax+b$.	Κανονικότητες-Συναρτήσεις • η συνάρτηση $y=ax+b$ (4 ώρες)	Μέσω της $y=ax+b$ πρέπει να αρχίσει να αναδεικνύεται ο ρόλος των γραμμάτων στην άλγεβρα ως μεταβλητών (x, ψ) ή ως	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 3.4.

A14. Διερευνούν τη συνάρτηση $y=ax+\beta$. Εξετάζουν το ρόλο του α (σταθερή μεταβολή του y για οποιαδήποτε μοναδιαία αύξηση του x) και του β («σημείο» τομής με τον άξονα των y). A15. Βρίσκουν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της $y=ax+\beta$ με τους άξονες. A16. Χρησιμοποιούν τις γραφικές παραστάσεις για την επίλυση εξισώσεων της μορφής $ax+\beta=y$.		παραμέτρων (α, β). Ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ5.	
A17. Προσδιορίζουν τη σχέση που συνδέει δυο αντιστρόφως ανάλογα ποσά. A18. Διερευνούν τη συνάρτηση $y = \alpha/x$ και τη γραφική της παράσταση. A19. Επιλύουν προβλήματα αντιστρόφως ανάλογων ποσών χρησιμοποιώντας διάφορες αναπαραστάσεις της συνάρτησης $y=\alpha/x$.	Κανονικότητες-Συναρτήσεις • αντιστρόφως ανάλογα ποσά, η συνάρτηση $y=\alpha/x$ (2 ώρες)	Μέσω δραστηριοτήτων πρέπει να αναδειχθούν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των αντιστρόφως ανάλογων ποσών και της υπερβολής σε αντιδιαστολή με τα ανάλογα ποσά και την ευθεία. (ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ6, ΑΔ7)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 3.5. B-AΔ7-Η υπερβολή
A20. Διερευνούν τις ιδιότητες των δυνάμεων με βάση ρητό και εκθέτη φυσικό, τις διατυπώνουν συμβολικά και τις αιτιολογούν χρησιμοποιώντας τον ορισμό της δύναμης. A21. Καταλήγουν στον ορισμό των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη, επεκτείνουν τις ιδιότητες των δυνάμεων με φυσικό εκθέτη και τις χρησιμοποιούν σε προβλήματα. A22. Χρησιμοποιούν την τυποποιημένη μορφή για να εκφράσουν μεγάλους και μικρούς αριθμούς. A23. Υπολογίζουν την τιμή απλών αριθμητικών	Αλγεβρική παράσταση • αναπαραστάσεις αριθμών, σύντομη γραφή αριθμού (8 ώρες)	Οι μαθητές από τον ορισμό των δυνάμεων, μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων, οδηγούνται στις ιδιότητες και από τις ιδιότητες στη διατύπωση του ορισμού της δύναμης με αρνητικό εκθέτη. Επιδίωξη είναι μια ισορροπία ανάμεσα στην εννοιολογική κατανόηση και στη διαδικαστική γνώση.	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κα, ΟΕΔΒ, 2010), παρ. 7.8, 7.9, 7.10.

παραστάσεων που περιέχουν και δυνάμεις.			
A24. Διερευνούν κανονικότητες και εκφράζουν το γενικό όρο τους με μια αλγεβρική παράσταση. A25. Μοντελοποιούν ένα πρόβλημα με μια αλγεβρική παράσταση. A26. Απλοποιούν απλές αλγεβρικές παραστάσεις με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας (απαλοιφή παρένθεσης και αναγωγή ομοίων όρων). A27. Υπολογίζουν την αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης για δεδομένες τιμές των μεταβλητών. Διακρίνουν το ρόλο της μεταβλητής σε μια παράσταση από το ρόλο του αγνώστου σε μια εξίσωση. A28. Αναγνωρίζουν στοιχεία της δομής μιας αλγεβρικής παράστασης (πχ η $x+4(x-3)$ είναι άθροισμα με όρους το x και το γινόμενο $4(x-3)$, που έχει παράγοντες το 4 και το $x-3$ κλπ).	Αλγεβρική παράσταση • μεταβλητές, αλγεβρικές παραστάσεις και απλοί μετασχηματισμοί (5 ώρες)	Με δραστηριότητες μοντελοποίησης καταστάσεων, μετάφρασης λεκτικών διατυπώσεων, και υπολογισμού αριθμητικών τιμών, αναδεικνύεται η ανάγκη χρήσης αλγεβρικής παράστασης. (ενδεικτική δραστηριότητα AΔ8)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.1.
A29. Μοντελοποιούν προβλήματα με γραμμικές εξισώσεις της μορφής $ax+b=c$ (με άγνωστο και στα δύο μέλη) και τις επιλύουν αριθμητικά και γραφικά (σύνδεση με συναρτήσεις της μορφής $y=ax+b$). Ελέγχουν αν η λύση της εξίσωσης είναι και λύση του προβλήματος. A30. Επιλύουν την εξίσωση $ax+b=c$ (και άλλες που περιέχουν παρενθέσεις ή/και κλάσματα και ανάγονται σε αυτήν),	Ισότητες–ανισότητες • η εξίσωση $(ax+b=c)$ ως εργαλείο επίλυσης προβλημάτων • μετασχηματισμοί εξίσωσης. (8 ώρες)	Μέσα από δραστηριότητες οι μαθητές διατυπώνουν τις ιδιότητες της ισότητας και επιλύουν εξισώσεις. Είναι σκόπιμο η χρήση πρακτικών κανόνων να μην οδηγήσει στην απώλεια του νοήματος, αλλά να υπάρχουν συνεχείς αναφορές στις αντίστοιχες μαθηματικές ιδέες. Έμφαση στην επίλυση προβλημάτων εξισώσεων και τη	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.2 και 1.4.

χρησιμοποιώντας αρχικά διάφορα μοντέλα – μεταφορές και στη συνέχεια τις ιδιότητες της ισότητας. A31. Αναγνωρίζουν αν ένας αριθμός είναι λύση της εξίσωσης ή/και του αντίστοιχου προβλήματος. A32. Αναγνωρίζουν ότι μια εξίσωση μπορεί να έχει άπειρες λύσεις ή καμία λύση.		σύνδεσή τους με τις συναρτήσεις. (ενδεικτικές δραστηριότητες AΔ9, AΔ10)	
---	--	---	--

Θεματική ενότητα: Γεωμετρία – Μέτρηση

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 47

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
Γ1. Αναγνωρίζουν τη διαφορά ανάμεσα σε ευθύγραμμο τμήμα και διάνυσμα. Γ2. Αναπαριστούν θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές με τη βοήθεια διανυσμάτων.	Προσανατολισμός στο χώρο • θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές • δόμηση του χώρου και συντεταγμένες (3 ώρες)	(ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ1)	Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Π. Βλάμος κ.ά., Γεωμετρία, Κεφ. 2^ο (μόνο η παρ. 2.5).
Γ3. Διερευνούν και αιτιολογούν τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων με επαγωγικούς συλλογισμούς και (μη τυπικές) αποδείξεις. Γ4. Χρησιμοποιούν κανόνα, διαβήτη ή άλλα εργαλεία για να σχεδιάσουν γεωμετρικά σχήματα.	Γεωμετρικά σχήματα • ανάλυση των γεωμετρικών σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες • κατασκευές και σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων (6 ώρες)	Οι μαθητές θα κατασκευάσουν τα ζητούμενα σχήματα (π.χ. κατασκευή του κοινού σημείου των τριών μεσοκαθέτων, τριών διχοτόμων, τριών υψών ή τριών διαμέσων ενός τριγώνου, κατασκευή κανονικών πολυγώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο) και αξιοποιώντας τις δυνατότητες κίνησης και μέτρησης του λογισμικού, θα εντοπίσουν	Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Π. Βλάμος κ.ά., Γεωμετρία, Κεφ. 3^ο. B-ΓΔ2-Σχέση εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας B-ΓΔ3-Κέντρα τριγώνου

		αναλλοιώτες σχέσεις και θα διατυπώσουν ιδιότητες. (ενδεικτικές δραστηριότητες ΓΔ1, ΓΔ2)	
Γ5. Αναγνωρίζουν τη σημασία της μεταφοράς και της στροφής στις γεωμετρικές κατασκευές και την αιτιολόγηση ιδιοτήτων των σχημάτων. Γ6. Κατασκευάζουν το σχήμα που προκύπτει από τη μεταφορά ή τη στροφή ενός σχήματος και αναγνωρίζουν τη σχέση του με το αρχικό. Γ7. Αναγνωρίζουν σχήματα με άξονα συμμετρίας ή κέντρο συμμετρίας και κατασκευάζουν τα συμμετρικά γεωμετρικών σχημάτων ως προς διάφορους άξονες ή κέντρα σε πραγματικό και ψηφιακό περιβάλλον. Γ8. Εντοπίζουν τις γεωμετρικές ιδιότητες της αξονικής και της κεντρικής συμμετρίας.	Μετασχηματισμοί • μεταφορά και στροφή • αξονική συμμετρία (Ανάκλαση) • κεντρική συμμετρία (12 ώρες)	Ο μετασχηματισμός «παράλληλη μεταφορά» έχει χρησιμοποιηθεί έμμεσα στην κατασκευή της παράλληλης προς δοθείσα ευθεία (μεταφορά του γνώμονα) και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αιτιολόγηση της ισότητας των γωνιών που σχηματίζονται από δύο παράλληλες και μια τέμνουσα. Η «ανάκλαση» ως προς άξονα αξιοποιεί την έννοια της μεσοκάθετης. Ο δυναμικός χαρακτήρας των μετασχηματισμών αναδεικνύεται με τη χρήση λογισμικού. (ενδεικτικές δραστηριότητες ΓΔ4, ΓΔ5, ΓΔ6)	Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Π. Βλάμος κ.ά., Γεωμετρία, Κεφάλαιο 2^ο (μόνο η παρ. 2.5). http://www.e-lyliko.gr/Lists/List7/simmetria.aspx B-ΓΔ4-Μετασχηματισμοί σημείου
Μ1. Αναγνωρίζουν τη σχέση ανάμεσα σε μήκος διαμέτρου, μήκος κύκλου και μήκος τόξου και αιτιολογούν τους σχετικούς τύπους.	Μέτρηση μήκους • μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες μέτρησης μήκους (2 ώρες)	Η μέτρηση του κύκλου με μοίρες και μονάδες μήκους προσφέρεται για μια συζήτηση σχετικά με τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των δύο μονάδων μέτρησης.	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κ.α, ΟΕΔΒ, 2010) κεφ.3 (παράγραφοι 3.3, 3.4)
Μ2. Αναγνωρίζουν και κατασκευάζουν ισεμβαδικές επιφάνειες με βάση ιδιότητες και σχέσεις	Μέτρηση επιφάνειας • Άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις	Για τη δημιουργία των τύπων εμβαδού των γεωμετρικών σχημάτων είναι	Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Π. Βλάμος κ.ά., Γεωμετρία, Κεφ.

για να αιτιολογήσουν τους γνωστούς τύπους εμβαδού. <i>M3.</i> Διερευνούν και διατυπώνουν το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του και τα χρησιμοποιούν για τον υπολογισμό μηκών και τον προσδιορισμό ορθών γωνιών. <i>M4.</i> Υπολογίζουν το εμβαδό κυκλικού δίσκου και κυκλικού τομέα. <i>M5.</i> Επιλύουν προβλήματα υπολογισμού εμβαδών με τη χρήση κατάλληλων μονάδων μέτρησης (με βάση την ακρίβεια που απαιτείται).	επιφανειών. Μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες μέτρησης επιφανειών (16 ώρες)	Βασικός ο μετασχηματισμός τους σε απλούστερα σχήματα με διατήρηση του εμβαδού. (ενδεικτικές δραστηριότητες <i>MΔ1, MΔ2, MΔ3, MΔ4</i>)	1° & 3°. B-MΔ3-Πυθαγόρειο θεώρημα B-MΔ4-Εμβαδόν κυκλικού δίσκου
<i>M6.</i> Υπολογίζουν γωνίες (κλίσεις) χρησιμοποιώντας ιδιότητες ή σχέσεις (όμοια ορθογώνια τρίγωνα, λόγος ευθυγράμμων τμημάτων). <i>M7.</i> Χρησιμοποιούν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς (εφαπτομένη, ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας) για τον υπολογισμό γωνιών. <i>M8.</i> Χρησιμοποιούν το Πυθαγόρειο θεώρημα και την Τριγωνομετρία για την επίλυση ενός ορθογωνίου τριγώνου σε σχετικά προβλήματα.	Τριγωνομετρία (8 ώρες)	Με αφετηρία την ερμηνεία των πινακίδων οδικής κυκλοφορίας (κλίση δρόμου) γίνεται μια πρώτη αναφορά στην έννοια της ομοιότητας τριγώνων και στην ανάγκη εισαγωγής τριγωνομετρικών αριθμών. (ενδεικτική δραστηριότητα <i>MΔ5</i>)	Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Π. Βλάμος κ.ά., Γεωμετρία, Κεφ. 2°.

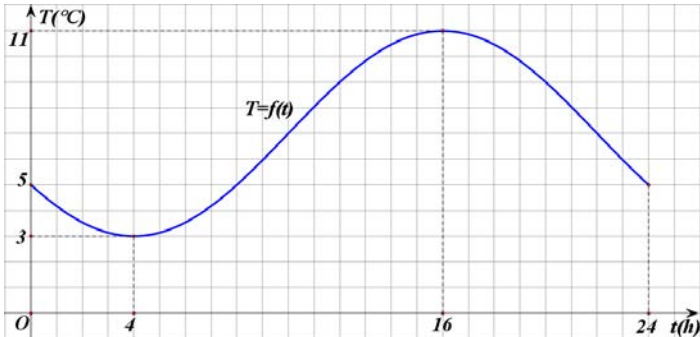
Θεματική ενότητα: Στοχαστικά μαθηματικά

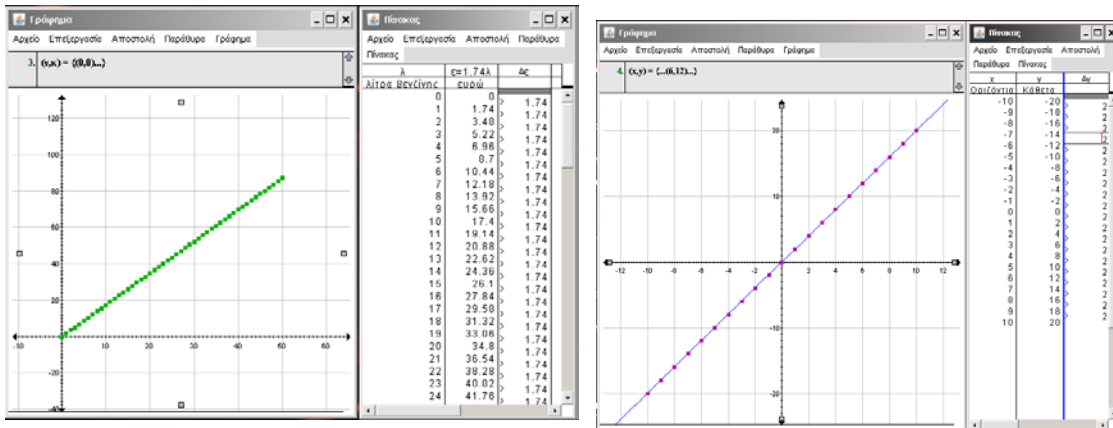
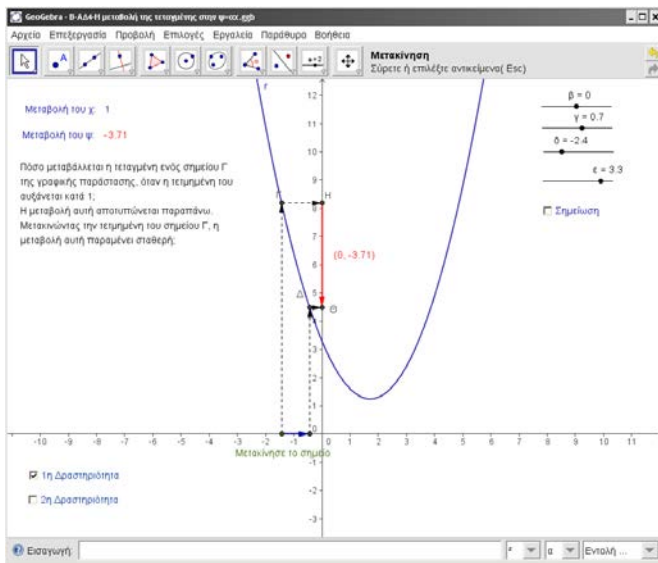
Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 7

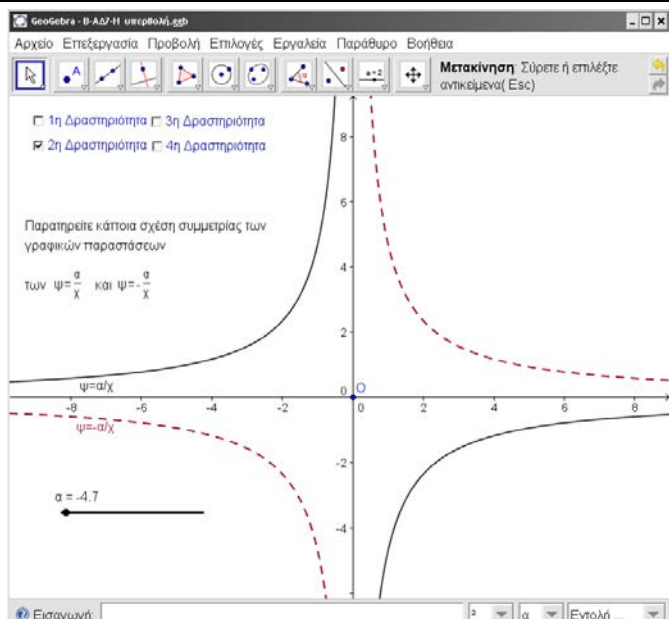
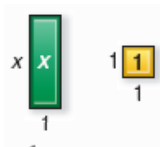
Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
Σ1. Διατυπώνουν ερωτήματα που αφορούν το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον και που να μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα από πραγματικές ή υποθετικές καταστάσεις. Σ2. Διακρίνουν τους πιθανούς τρόπους συλλογής δεδομένων (απογραφή – διαρκής καταγραφή- δειγματοληψία). Σ3. Κατασκευάζουν κυκλικά διαγράμματα και διαγράμματα διασποράς. Σ4. Αναγνωρίζουν ότι η συσχέτιση ανάμεσα σε δύο χαρακτηριστικά δεν είναι κατ' ανάγκη σχέση αιτίου αποτελέσματος. Σ5. Αναγνωρίζουν εσφαλμένους ή/ και παραπλανητικούς τρόπους κατασκευής και παρουσίασης στατιστικών διαγραμμάτων που σχετίζονται με το εμβαδόν. Σ6. Εξετάζουν κριτικά στατιστικές έρευνες και ερμηνείες τους.	Δεδομένα • Συλλογή, αναπαράσταση, ερμηνεία δεδομένων (4 ώρες)	(ενδεικτική δραστηριότητα ΣΔ1)	Μέρος του 4^{ου} κεφαλαίου του βιβλίου: Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας κλπ) με κατάλληλες τροποποιήσεις.
Σ7. Διερευνούν ιδιότητες της μέσης τιμής.	Μέτρα θέσης (2 ώρες)	(ενδεικτική δραστηριότητα ΣΔ2)	Μέρος του 4ου κεφαλαίου του βιβλίου: Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας κλπ) με κατάλληλες τροποποιήσεις http://illuminations.net.org/activitydetail.aspx?ID=160

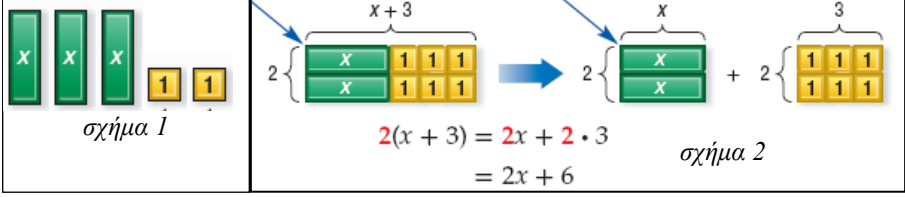
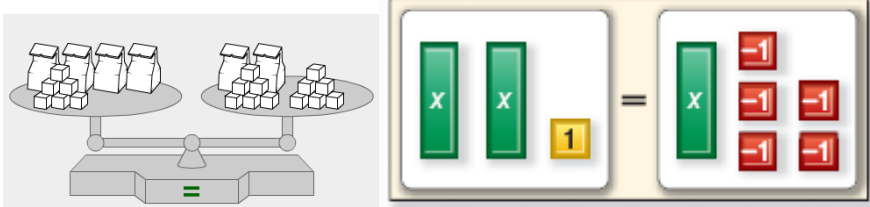
			Οδηγίες: Οδηγίες- Β-ΣΔ2- Διάμεσος_ Μέση τιμή
Σ8. Διερευνούν την έννοια της μεταβλητότητας και τα χαρακτηριστικά της.	Μεταβλητότητα (1 ώρα)	Η μεταβλητότητα των δεδομένων για το ύψος ενός ανθρώπου εκτός από τον παράγοντα της ηλικίας, μπορεί να οφείλεται και σε σφάλματα μέτρησης.	

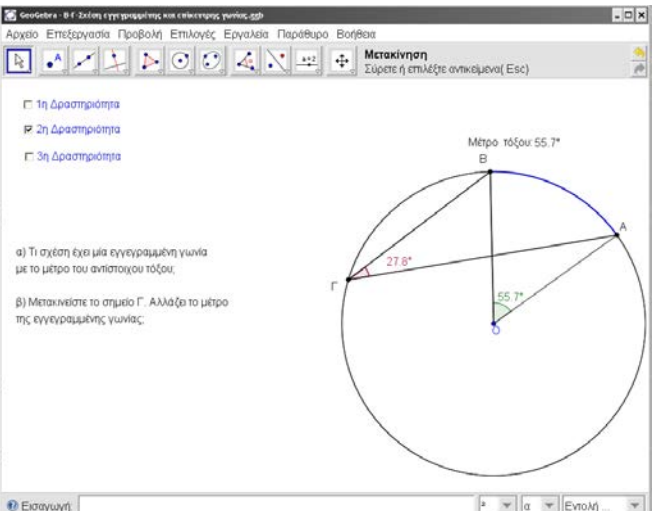
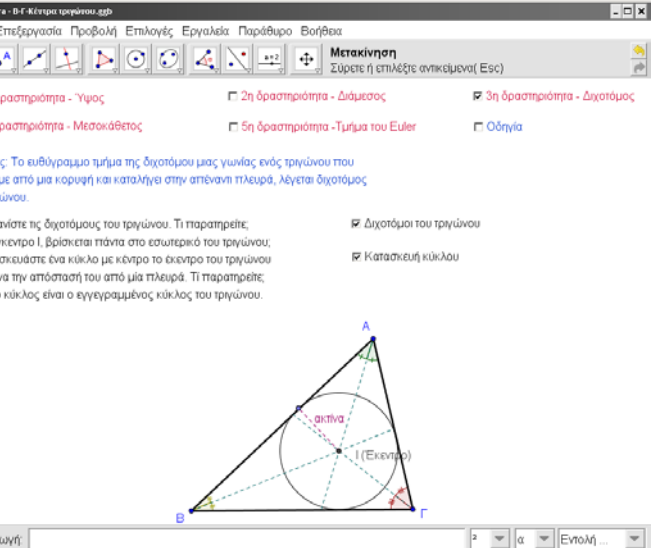
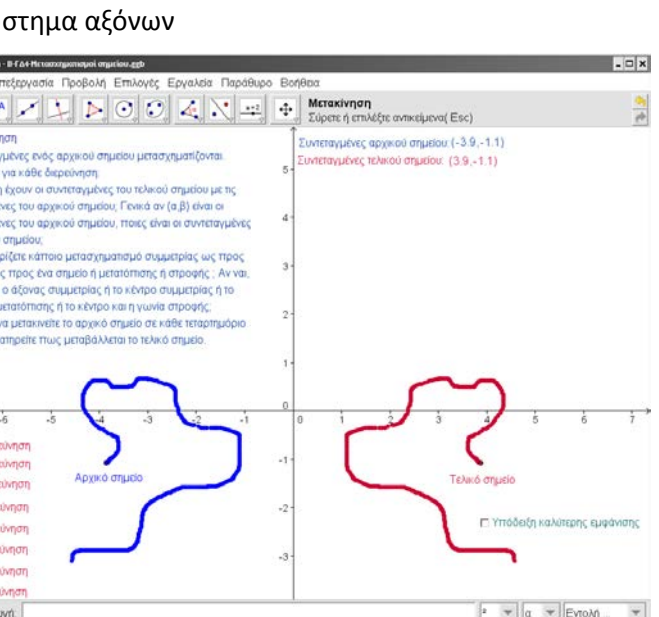
Ενδεικτικές δραστηριότητες

A/A	Περιγραφή δραστηριότητας	ΠΜΑ														
ΑρΔ1	Μια μικρή αίθουσα του σχολείου μας έχει δάπεδο σχήματος τετραγώνου πλευράς 4 m. Μια άλλη αίθουσα έχει επίσης δάπεδο σχήματος τετραγώνου, αλλά διπλάσιου εμβαδού. Πόσο είναι το μήκος της πλευράς του δαπέδου της δεύτερης αίθουσας;	Αρ2, Αρ3														
ΑΔ1	Η παρακάτω γραφική παράσταση δείχνει τη θερμοκρασία T (σε βαθμούς Κελσίου) ενός τόπου κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου.  α) Ποια είναι η ελάχιστη και ποια η μέγιστη θερμοκρασία; Ποια ώρα του 24ώρου συμβαίνουν; Ποια σημεία της γραφικής παράστασης δείχνουν την ελάχιστη και τη μέγιστη θερμοκρασία; β) Ποια είναι η θερμοκρασία στις 2 τη νύχτα, στις 2 το μεσημέρι και στις 11 το βράδυ; Ποια ώρα η θερμοκρασία είναι 6°C; γ) Τι εκφράζει με βάση το πρόβλημα το σημείο (20, 9) της γραφικής παράστασης; δ) Ποιες άλλες πληροφορίες μπορούμε να αντλήσουμε από αυτή τη γραφική παράσταση;	Α4, Α5, Α8														
ΑΔ2	Το 60% της μάζας του μοσχαρίσιου κρέατος είναι νερό. Με βάση αυτή την πληροφορία συμπληρώστε τον πίνακα: <table><tr><td>μάζα κρέατος σε Kg (x)</td><td>2</td><td>6</td><td>8</td><td></td><td>20</td><td></td></tr><tr><td>μάζα νερού σε Kg (y)</td><td></td><td></td><td></td><td>6</td><td></td><td></td></tr></table>	μάζα κρέατος σε Kg (x)	2	6	8		20		μάζα νερού σε Kg (y)				6			Α9, Α10, Α12
μάζα κρέατος σε Kg (x)	2	6	8		20											
μάζα νερού σε Kg (y)				6												

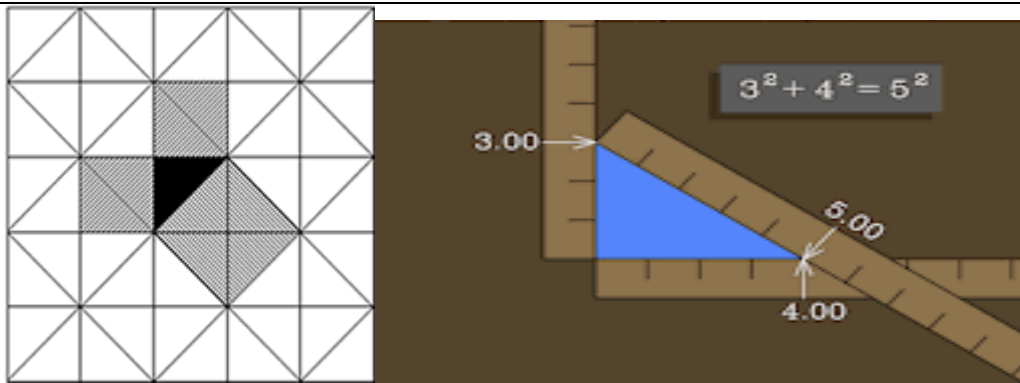
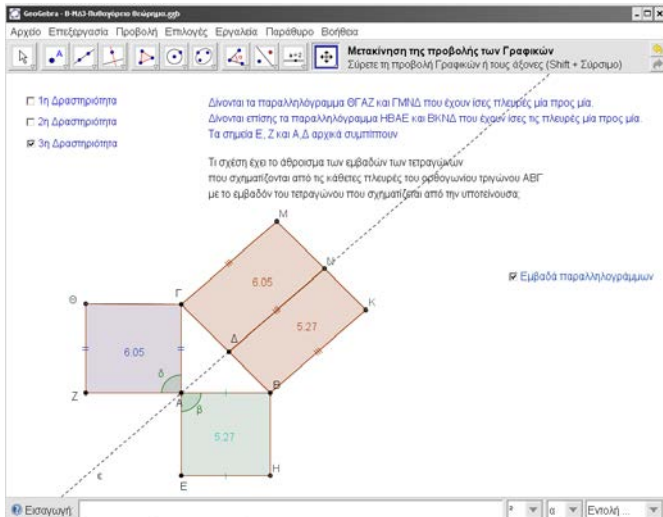
	Είναι η "μάζα κρέατος" (x) και η "μάζα νερού" (y) ποσά ανάλογα; Ποια σχέση συνδέει τα δύο ποσά; Ποιες τιμές μπορεί να πάρει η μεταβλητή x; Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, περιγράψτε και εξηγήστε τα χαρακτηριστικά της (για παράδειγμα, το σχήμα της, κάποια σημεία της κλπ).																	
AΔ3	 Χρησιμοποιούν τη δυνατότητα πολλαπλών αναπαραστάσεων (τύπος, πίνακας τιμών, γραφική αναπαράσταση) των μαθηματικών αντικειμένων του F-Probe, για να μεταβούν από τα ανάλογα ποσά στη συνάρτηση $\psi=\alpha x$ και να διερευνήσουν το ρόλο του α στη γραφική της παράσταση (αρχεία;B-AΔ3-Ανάλογα ποσά και η $\psi=\alpha x$-1, B-AΔ3-Ανάλογα ποσά και η $\psi=\alpha x$-2 Φύλλο εργασίας:Φύλλο εργασίας-B-AΔ3-Ανάλογα ποσά και η $\psi=\alpha x$).	A4, A5, A7, A8, A9, A10																
AΔ4	Με το Geogebra διερευνούν τη μεταβολή της τεταγμένης ενός σημείου που ανήκει σε μία ευθεία της μορφής $\psi=\alpha x$, όταν η τετμημένη του αυξάνεται μοναδιαία και διαπιστώνουν ότι η μεταβολή αυτή είναι σταθερή και ισούται με την κλίση α της ευθείας. Διαπιστώνουν ότι αυτό δεν ισχύει σε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων που δεν είναι ευθείες. (αρχείο: B-AΔ4-H μεταβολή της τεταγμένης στην $\psi=\alpha x$). 	A11																
AΔ5	Ο Παύλος πήγε για κούρεμα. Όταν γύρισε στο σπίτι του, κοίταξε στον καθρέφτη του και είπε: «Είναι πολύ κοντά!». Αποφάσισε να μην ξανακόψει τα μαλλιά του για μεγάλο διάστημα και να μετράει πόσο γρήγορα μεγαλώνουν. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει το μήκος των μαλλιών του Παύλου (σε εκατοστά) όπως το μετρούσε κάθε μήνα: <table><tr><td>Χρόνος (σε μήνες)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>Μήκος (σε εκατοστά)</td><td>2</td><td>3,5</td><td>5</td><td>6,5</td><td></td><td></td><td></td></tr></table> 1. Πόσο μακριά ήταν τα μαλλιά του Παύλου μετά το κούρεμα;	Χρόνος (σε μήνες)	0	1	2	3	4	5	6	Μήκος (σε εκατοστά)	2	3,5	5	6,5				A13, A14, A16
Χρόνος (σε μήνες)	0	1	2	3	4	5	6											
Μήκος (σε εκατοστά)	2	3,5	5	6,5														

	2. α. Πόσο μακριά θα είναι τα μαλλιά του σε πέντε μήνες; β. Γιατί είναι εύκολο να υπολογιστεί αυτό το μήκος; 3. α. Πόσο μακριά θα είναι τα μαλλιά του Παύλου μετά από ένα χρόνο, αν συνεχίσουν να μεγαλώνουν με τον ίδιο ρυθμό και δεν κουρευτεί; β. Σχεδιάστε ένα γράφημα που να δείχνει πώς μεγαλώνουν τα μαλλιά του Παύλου στη διάρκεια ενός έτους, αν δεν κουρευτεί. Περιγράψτε το σχήμα του γραφήματος. γ. Μετά από πόσους μήνες τα μαλλιά του Παύλου θα έχουν μήκος 29 εκατοστά; δ. Γράψτε έναν τύπο για να υπολογίζετε το μήκος των μαλλιών αν ξέρετε πόσοι μήνες πέρασαν απ' το κούρεμα. 4. Τα μαλλιά της Σοφίας είναι 20 εκατοστά μακριά και μεγαλώνουν με σταθερό ρυθμό 1,4 εκατοστά κάθε μήνα. Γράψτε έναν τύπο για να υπολογίζετε το μήκος των μαλλιών της Σοφίας μετά από κάποιους μήνες. Σχεδιάστε ένα γράφημα.		
AΔ6	Για ένα ορθογώνιο οικόπεδο γνωρίζουμε ότι έχει εμβαδόν 240 m^2, αλλά δεν γνωρίζουμε τις διαστάσεις του. Αν το μήκος είναι 20m, πόσο είναι το πλάτος του; Πόσο μεγάλο και πόσο μικρό μπορεί να είναι το μήκος; Να εξετάσετε αν οι διαστάσεις του είναι ανάλογα ποσά. Αν το μήκος είναι x και το πλάτος ψ μπορείτε να εκφράσετε το ψ ως συνάρτηση του x; Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Από τη γραφική παράσταση μπορείτε να προσδιορίσετε τις διαστάσεις, ώστε το οικόπεδο να είναι τετράγωνο;	A17, A18, A19	
AΔ7	Με το Geogebra διερευνούν το ρόλο του a στη γραφική παράσταση της $\psi=a/x$, τη σχέση των γραφικών παραστάσεων $\psi=a/x$ και $\psi=-a/x$, τη συμμετρία των κλάδων της υπερβολής ως προς την αρχή των αξόνων, τη μεταβολή της τεταγμένης όταν αυξάνεται η τετμημένη, τις τιμές που δεν μπορούν να πάρουν οι δύο μεταβλητές και την ύπαρξη ελάχιστης ή μέγιστης τιμής του ψ (αρχείο: B-AΔ7-Η υπερβολή).		A7, A18
AΔ8	Για να "δούμε" μια αλγεβρική παράσταση (όπως η $3x + 2$), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ορθογώνια μήκους x και πλάτους 1 για το x και τετράγωνα πλευράς 1 για το 1. Έτσι, η παράσταση $3x+2$ μπορεί να απεικονιστεί όπως στο σχήμα 1. Χρησιμοποιώντας αυτά τα "πλακάκια", μπορούμε να βρούμε το διπλάσιο της παράστασης $x+3$, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.		A26, A28

	 α) Χρησιμοποιώντας τα πλακάκια γράψτε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις: $2x+3x$, $5x-2x$, $2x+5x+2$, $(2x+3)+(5x+3)$ β) Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα, για να απλοποιήσετε τις ίδιες παραστάσεις; γ) Κάποιος μαθητής έγραψε: $2x+5+6x=13x$. Είναι σωστό ή λάθος; Εξηγήστε την απάντησή σας με τους δύο τρόπους που χρησιμοποιήσατε στα δύο προηγούμενα ερωτήματα.	
ΑΔ9	Στα παρακάτω σχήματα περιγράφονται δύο (διαφορετικές) εξισώσεις. Στο ένα σχήμα όλα τα σακουλάκια έχουν το ίδιο βάρος και η ζυγαριά ισορροπεί. Στο άλλο σχήμα τα πλακάκια με το γράμμα x εκφράζουν το ίδιο αριθμό. Μπορείτε να βρείτε (χωρίς χαρτί και μολύβι) το βάρος που έχει κάθε σακουλάκι και τον αριθμό που εκφράζει το x; Περιγράψτε τον τρόπο που λύσατε κάθε πρόβλημα, πρώτα με λόγια και μετά με μαθηματικές σχέσεις. 	Α30
ΑΔ10	Δύο γραφεία νοικιάζουν αυτοκίνητα. Το γραφείο «ΤΑΞΙΔΙΑ» παίρνει για δικαίωμα ενοικίασης 30 € και 0,20€ για κάθε χιλιόμετρο. Το γραφείο «ΔΕΛΦΟΙ» παίρνει 6€ για δικαίωμα ενοικίασης και 0,50€ για κάθε χιλιόμετρο. (α) Να βρείτε τις συναρτήσεις που δίνουν το ποσό που πρέπει να πληρώσουμε σε κάθε γραφείο για x χιλιόμετρα διαδρομής. (β) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων. (γ) Για πόσα χιλιόμετρα θα πληρωθεί και στα δύο γραφεία το ίδιο ποσό; Μπορείτε να απαντήσετε με περισσότερους από έναν τρόπους; Σχόλιο: η απάντηση στο ερώτημα (γ) μπορεί να βρεθεί γραφικά, αριθμητικά από τους πίνακες τιμών και αλγεβρικά με εξίσωση.	Α29
ΓΔ1	Ως υλικό μιας εισαγωγικής δραστηριότητας που αναδεικνύει την έννοια του προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος χρησιμοποιούνται διάφορες πραγματικές καταστάσεις οι οποίες περικλείουν τις έννοιες της διεύθυνσης και φοράς: • Η επίδραση της διεύθυνσης του αέρα και της βαρύτητας στην τροχιά ενός βέλους που εκτοξεύεται στον ουρανό. • Η επίδραση της διεύθυνσης του αέρα στη διαδρομή ενός αεροπλάνου ή της διεύθυνσης του ρεύματος ενός ποταμού στη διαδρομή ενός πλοιαρίου που τον διασχίζει κάθετα. Οι μαθητές χρησιμοποιούν βέλη για την αναπαράσταση και μελέτη αυτών των καταστάσεων, αναζητούν έναν όρο για να διαφοροποιήσουν το προσανατολισμένο από το μη προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα και συζητούν την προέλευση του όρου “διάνυσμα”.	Γ1, Γ2

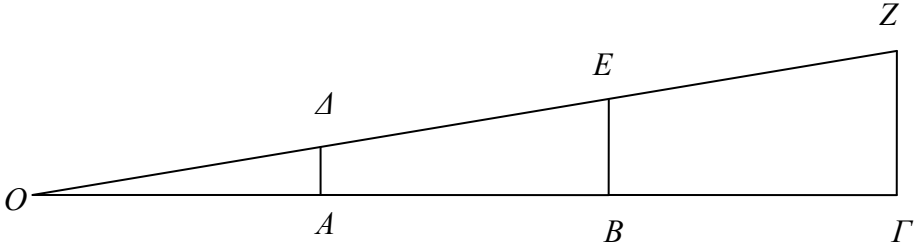
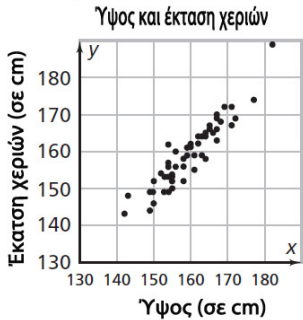
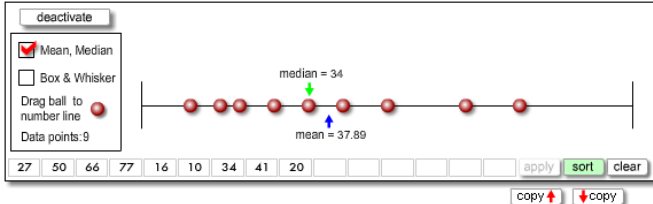
ΓΔ2	Με το Geogebra κατανοούν τον ορισμό του μέτρου ενός τόξου και τη σχέση των μέτρων της εγγεγραμμένης γωνίας ενός τόξου και της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας (αρχείο: (B-ΓΔ2-Σχέση εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας)).		Γ3
ΓΔ3	Με το Geogebra εμφανίζουν ύψη, διαμέσους, διχοτόμους και μεσοκάθετους τριγώνου, διερευνούν τη θέση των σημείων τομής τους σε διαφορετικά είδη τριγώνων και τη σχετική τους θέση (αρχείο B-Γ-Κέντρα τριγώνου).		Γ4
ΓΔ4	Με το Geogebra σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων διερευνούν τη σχέση ενός σημείου (τελικού) ως προς ένα άλλο σημείο (αρχικό). Το αρχικό σημείο έχει υποστεί έναν μετασχηματισμό (συμμετρία ως προς άξονα ή στροφή ως προς σημείο ή μετατόπιση κατά ένα διάνυσμα). Βρίσκουν τη σχέση που έχουν οι συντεταγμένες τους και γενικεύουν (αρχείο: B-ΓΔ4-Μετασχηματισμοί σημείου).		Γ5, Γ6

ΓΔ5	Αναλύουν τη γνωστή από την προηγούμενη τάξη κατασκευή της μεσοκαθέτου ε ενός ευθύγραμμου τμήματος AB και εξετάζουν τη σχέση των σημείων A και B ως προς την ε (“αξονική συμμετρία ή ανάκλαση”). Για να αναδειχθεί η σχέση ανάμεσα σε μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος και τον άξονα συμμετρίας μιας ανάκλασης χρησιμοποιείται το πρόβλημα: «Τα δυο τρίγωνα είναι συμμετρικά ως προς άξονα. Να προτείνετε έναν γεωμετρικό τρόπο ώστε να σχεδιάσετε τον άξονα συμμετρίας»	Γ7, Γ8
ΓΔ6	Για να αναδειχθεί η σημασία ενός γεωμετρικού μετασχηματισμού (κεντρική συμμετρία) στην ανακάλυψη και αιτιολόγηση μιας ιδιότητας του ορθογωνίου τριγώνου (ιδιότητα της διαμέσου προς την υποτείνουσα) χρησιμοποιείται το πρόβλημα: «Η AM είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ABΓ. α. Να σχεδιάσετε το συμμετρικό τρίγωνο του ABΓ ως προς κέντρο M β. Τι είδους τετράπλευρο προκύπτει και γιατί; γ. Να εξετάσετε αν η διάμεσος AM είναι το μισό της υποτείνουσας BΓ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.»	Γ8
ΜΔ1	Βασική δραστηριότητα για τη δημιουργία των τύπων εμβαδού των γεωμετρικών σχημάτων είναι ο μετασχηματισμός τους σε απλούστερα σχήματα με διατήρηση του εμβαδού. Χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας οι μαθητές καθοδηγούνται μέσω κατάλληλων ερωτήσεων να λύσουν το πρόβλημα μετασχηματισμού ενός παραλληλογράμμου και ενός τριγώνου σε ισοδύναμο ορθογώνιο. Στη συνέχεια αυτής της δραστηριότητας διατυπώνουν και αιτιολογούν τους αντίστοιχους τύπους εμβαδού. Τα επόμενα σχήματα δείχνουν έναν από τους πολλούς τρόπους επίλυσης του προβλήματος:	Μ2
ΜΔ2	Οι μαθητές κατασκευάζουν τετράγωνα στις πλευρές ενός ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου (βλ. το διακοσμητικό μοτίβο στο σχήμα αριστερά) και χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης εμβαδού το ίδιο το ορθογώνιο τρίγωνο επαληθεύουν τη σχέση του Πυθαγόρειου θεωρήματος. Στη συνέχεια επαληθεύουν τη σχέση αυτή στο ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές μήκους 3cm και 4cm και υποτείνουσα μήκους 5cm.	Μ3

																										
ΜΔ3	Με το Geogebra κατανοούν γεωμετρικά το Πυθαγόρειο θεώρημα μετασχηματίζοντας ίσα παραλληλόγραμμα σε ισεμβαδικά τετράγωνα και ορθογώνια, δημιουργώντας ταυτόχρονα τα τετράγωνα των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου. (αρχείο: B-ΜΔ3-Πυθαγόρειο θεώρημα).	Μ2, Μ3 																								
ΜΔ4	Στο Sketchpad μεταβάλλουν δυναμικά την ακτίνα ενός κύκλου και με την δυνατότητα του λογισμικού να πινακοποιεί τιμές μεταβλητών, “ανακαλύπτουν” μέσα από μία διαδικασία μοντελοποίησης τον τύπο του εμβαδού κυκλικού δίσκου και εμφανίζουν τη γραφική παράσταση της συναρτησιακής σχέσης ‘ακτίνας’ και ‘εμβαδού’. Συνδέουν τη γραφική παράσταση με το είδος της συγκεκριμένης συναρτησιακής σχέσης και τα μέτρα των εμπλεκόμενων μεγεθών (αρχείο: B-ΜΔ4-Εμβαδόν κυκλικού δίσκου).	Μ4, Α1 <thead> <tr> <th>Ακτίνα κύκλου</th> <th>Περίμετρος</th> <th>Εμβαδόν κυκλικού δίσκου</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1,00 εκ.</td> <td>6,28 εκ.</td> <td>3,14 εκ.²</td> </tr> <tr> <td>2,00 εκ.</td> <td>12,57 εκ.</td> <td>12,57 εκ.²</td> </tr> <tr> <td>3,00 εκ.</td> <td>18,85 εκ.</td> <td>28,27 εκ.²</td> </tr> <tr> <td>4,00 εκ.</td> <td>25,13 εκ.</td> <td>50,27 εκ.²</td> </tr> <tr> <td>5,00 εκ.</td> <td>31,42 εκ.</td> <td>78,54 εκ.²</td> </tr> <tr> <td>6,00 εκ.</td> <td>37,70 εκ.</td> <td>113,10 εκ.²</td> </tr> <tr> <td>4,00 εκ.</td> <td>25,13 εκ.</td> <td>50,27 εκ.²</td> </tr> </tbody>	Ακτίνα κύκλου	Περίμετρος	Εμβαδόν κυκλικού δίσκου	1,00 εκ.	6,28 εκ.	3,14 εκ. ²	2,00 εκ.	12,57 εκ.	12,57 εκ. ²	3,00 εκ.	18,85 εκ.	28,27 εκ. ²	4,00 εκ.	25,13 εκ.	50,27 εκ. ²	5,00 εκ.	31,42 εκ.	78,54 εκ. ²	6,00 εκ.	37,70 εκ.	113,10 εκ. ²	4,00 εκ.	25,13 εκ.	50,27 εκ. ²
Ακτίνα κύκλου	Περίμετρος	Εμβαδόν κυκλικού δίσκου																								
1,00 εκ.	6,28 εκ.	3,14 εκ. ²																								
2,00 εκ.	12,57 εκ.	12,57 εκ. ²																								
3,00 εκ.	18,85 εκ.	28,27 εκ. ²																								
4,00 εκ.	25,13 εκ.	50,27 εκ. ²																								
5,00 εκ.	31,42 εκ.	78,54 εκ. ²																								
6,00 εκ.	37,70 εκ.	113,10 εκ. ²																								
4,00 εκ.	25,13 εκ.	50,27 εκ. ²																								

 The right side of the interface shows a yellow circle with a point Z at its center. Below the circle is a slider for the radius, labeled 'ακτίνα κύκλου'." data-bbox="230 605 745 825"/>

| **ΜΔ5** | Το πρόβλημα ερμηνείας μιας πινακίδας οδικής κυκλοφορίας που δείχνει την κλίση ενός δρόμου και το παρακάτω σχήμα χρησιμοποιούνται ως υλικό μιας δραστηριότητας που αναδεικνύει την ισότητα των λόγων ΑΔ:ΟΑ, ΒΕ:ΟΒ, ΓΖ:ΟΓ στα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΔ, ΟΒΕ, ΟΓΖ. Οι μαθητές διαπιστώνουν την ισότητα των λόγων και των γωνιών των τριών τριγώνων, | **Μ6** |

	εξετάζουν τη μορφή τους και αναζητούν ένα όρο για να εκφράσουν αυτή τη σχέση (μεγέθυνση, ομοιότητα). 	
ΣΔ1	Οι μαθητές διερευνούν το εξής ερώτημα: «Ποια είναι η σχέση που έχει το άνοιγμα των χεριών ενός ατόμου, όταν βρίσκονται σε έκταση με το ύψος του;» Συλλέγουν δεδομένα από μαθητές, τα αναπαριστούν σε διάγραμμα διασποράς, όπως το διπλανό, και επιχειρηματολογούν σχετικά, τεκμηριώνοντας τις απόψεις τους με βάση τα στοιχεία που συνέλεξαν, το διάγραμμα που δημιούργησαν και τις γνώσεις που έχουν από την Άλγεβρα και τις συναρτήσεις. Επίσης προσπαθούν να βρουν περιπτώσεις όπου η έκταση των χεριών είναι μικρότερη από το ύψος, αλλά και περιπτώσεις που να δείχνουν το αντίθετο. 	Σ3, Σ4
ΣΔ2	Μέσα από τον δυναμικό χειρισμό δεδομένων της εφαρμογής, οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν και να κατασκευάσουν καταστάσεις με μικρά σύνολα δεδομένων τα οποία θα ικανοποιούν κάποια κριτήρια ως προς το πλήθος, το εύρος ή τα μέτρα θέσης, με σκοπό να κατανοήσουν βαθύτερα και πιο διαισθητικά διάφορες πτυχές ή/και ιδιότητες εννοιών της στατιστικής, να αναπτύξουν στρατηγικές ελέγχου κάποιων παραμέτρων ανοικτών προβλημάτων καθώς και στρατηγικές για τη διερεύνηση τέτοιων προβλημάτων.  Διεύθυνση ιστοσελίδας : http://illuminations.nctm.org/activitydetail.aspx?ID=160 Οδηγίες: Οδηγίες- Β-ΣΔ2- Διάμεσος Μέση τιμή	Σ7

Γ΄ Γυμνασίου

Θεματική ενότητα: Αριθμοί – Άλγεβρα

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 49

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
A1. Μοντελοποιούν μια κατάσταση με τη συνάρτηση $y=ax^2$. A2. Εξετάζουν την μεταβολή του y για κάθε μοναδιαία αύξηση του x (συγκρίνουν με την γραμμική συνάρτηση) A3. Διερευνούν μέσω της γραφικής της παράστασης τις ιδιότητές της $y=ax^2$ και το ρόλο της παραμέτρου a. A4. Επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης $y=ax^2$. A5. Βρίσκουν αλγεβρικά και γραφικά τα κοινά σημεία των συναρτήσεων $y=ax^2$ και $y=ax+\beta$.	Κανονικότητες-Συναρτήσεις η $y=ax^2$ ως περίπτωση μη γραμμικής μεταβολής (4 ώρες)	Είναι σημαντική η διερεύνηση προβλημάτων που μοντελοποιούνται με τετραγωνικές συναρτήσεις, οι οποίες είναι μια μορφή μη γραμμικής μεταβολής. Η χρήση λογισμικού μπορεί να υποστηρίξει τη διερεύνηση του ρόλου του a και τη σύνδεση με τις εξισώσεις. (ενδεικτικές δραστηριότητες AΔ1, AΔ2)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Αργυράκης κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 4.1. Γ- AΔ1-Το α στην $\psi=ax^2$
A6. Διερευνούν και αποδεικνύουν τις ιδιότητες των ριζών $\sqrt{a\beta} = \sqrt{a}\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\frac{a}{\beta}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}}$. A7. Χρησιμοποιούν τις τετραγωνικές ρίζες και τις ιδιότητές τους στην απλοποίηση παραστάσεων και στην επίλυση προβλημάτων.	Άλγεβρική παράσταση Ιδιότητες τετραγωνικών ριζών, μετασχηματισμοί (3 ώρες)	Η διερεύνηση και απόδειξη των ιδιοτήτων και η εφαρμογή τους σε απλές παραστάσεις είναι βασικός στόχος των δραστηριοτήτων. (ενδεικτική δραστηριότητα AΔ3)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Αργυράκης κ.α, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.1.Γ.
A8. Αναγνωρίζουν τα	Άλγεβρική παράσταση	Οι δραστηριότητες	Σχολικό βιβλίο

μονώνυμα και τα πολυώνυμα, το βαθμό τους και υπολογίζουν την αριθμητική τιμή ενός πολυωνύμου. A9. Υπολογίζουν το άθροισμα, τη διαφορά και το γινόμενο μονωνύμων και (απλών) πολυωνύμων (κυρίως μιας μεταβλητής). Αναγνωρίζουν την επιμεριστική ιδιότητα όπου χρησιμοποιείται. A10. Μοντελοποιούν προβλήματα με πολυώνυμα και χρησιμοποιούν τις πράξεις τους στην επίλυσή τους. A11. Διερευνούν και αποδεικνύουν αλγεβρικά και (όπου είναι δυνατόν) γεωμετρικά τις ταυτότητες $(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$, $(\alpha \pm \beta)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3$, $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$, $\alpha^3 \pm \beta^3 = (\alpha \pm \beta)(\alpha^2 \mp \alpha\beta + \beta^2)$ A12. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με χρήση ταυτοτήτων. A13. Αναγνωρίζουν στοιχεία της δομής μιας παράστασης (άθροισμα και οι όροι του, γινόμενο και οι παράγοντές του) και χρησιμοποιούν κατάλληλη ορολογία A14. Παραγοντοποιούν απλά πολυώνυμα (κυρίως μιας μεταβλητής) με κοινό παράγοντα, με ομαδοποίηση, με χρήση ταυτοτήτων. A15. Αναγνωρίζουν την επιμεριστική ιδιότητα ως το βασικό κοινό στοιχείο των πράξεων πολυωνύμων, των	• δομή της αλγεβρικής παράστασης και μετασχηματισμοί. (24 ώρες)	μετασχηματισμού παραστάσεων να βρίσκονται σε ισορροπία με τις δραστηριότητες μοντελοποίησης καταστάσεων, γεωμετρικής ερμηνείας, διερεύνησης και αιτιολόγησης σχέσεων, αναγνώρισης δομών, αναγνώρισης αναλογιών με την αριθμητική (πχ στην εύρεση του ΕΚΠ, στις πράξεις κλασμάτων). (ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ4, ΑΔ5, ΑΔ6)	(Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου, Αργυράκης κα, ΟΕΔΒ, 2010) κεφ 1^ο (μόνο όσα αφορούν τα ΠΜΑ της 1^{ης} στήλης) http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_189_g_3_t_2.html?open=activities&from=category_g_3_t_2.html (πολλαπλασιασμός διωνύμων με πλακίδια).
---	---	---	--

ταυτοτήτων και της παραγοντοποίησης. A16. Προσδιορίζουν το ΕΚΠ μονωνύμων και απλών πολυωνύμων μιας μεταβλητής. A17. Υπολογίζουν το αποτέλεσμα των πράξεων με απλές ρητές παραστάσεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση). A18. Απλοποιούν απλές ρητές παραστάσεις.			
A19. Διερευνούν (με μοντέλα – μεταφορές) και διατυπώνουν τις βασικές ιδιότητες της διάταξης. A20. Μοντελοποιούν προβλήματα με την ανίσωση $ax + b < c$ (άγνωστος μόνο στο ένα μέλος) και την επιλύουν αλγεβρικά και γραφικά (σύνδεση με συνάρτηση της μορφής $y = ax + b$). A21. Μοντελοποιούν προβλήματα με γραμμικές ανισώσεις της μορφής $ax + b < cx + d$ (άγνωστος και στα δύο μέλη) και τις επιλύουν αλγεβρικά και γραφικά (σύνδεση με συναρτήσεις της μορφής $\psi = ax + b$). A22. Διακρίνουν τις διαφορές μεταξύ εξίσωσης (συνήθως μία λύση) και ανίσωσης (συνήθως άπειρες λύσεις), ώστε να μην θεωρούν ότι η μόνη διαφορά είναι στο σύμβολο. A23. Βρίσκουν τις κοινές λύσεις δύο ανισώσεων χρησιμοποιώντας τον	Ισότητες-ανισότητες • ανίσωση α΄ βαθμού και μετασχηματισμοί (5 ώρες)	Παρά τις ομοιότητες εξίσωσης και ανίσωσης, που μπορούν να αξιοποιηθούν διδακτικά, πρέπει να δοθεί έμφαση στις διαφορές μεταξύ ισότητας – εξίσωσης και ανίσωσης – εξίσωσης. Η αναπαράσταση των λύσεων ανίσωσης στην αριθμογραμμή είναι ένα χρήσιμο μέσο και για τους παραπάνω στόχους. (ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ7)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.5.

άξονα των πραγματικών αριθμών.			
A24. Επιλύουν απλές πολυωνυμικές εξισώσεις (δευτέρου βαθμού ελλιπούς ή και πλήρους μορφής, αλλά και μεγαλύτερου βαθμού) με παραγοντοποίηση. A25. Μοντελοποιούν προβλήματα με απλές πολυωνυμικές εξισώσεις (κυρίως δευτεροβάθμιες), οι οποίες ανάγονται σε πρωτοβάθμιες με παραγοντοποίηση.	Ισότητες-Ανισότητες πολυωνυμικές εξισώσεις (6 ώρες)	Η επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων αποτελεί μια ευκαιρία δικαιολόγησης της παραγοντοποίησης και σύνδεσης των πολυωνύμων με προβλήματα. (ενδεικτική δραστηριότητα AΔ8)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Αργυράκης κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 2.2Α, 2.3.
A26. Αναγνωρίζουν γραμμικές εξισώσεις της μορφής $ax+by=\gamma$, τις αναπαριστούν γραφικά και τις συνδέουν με συναρτήσεις της μορφής $y=ax+\beta$. A27. Αναγνωρίζουν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και εξετάζουν αν ένα ζεύγος αριθμών είναι λύση του. A28. Ερμηνεύουν γραφικά ένα γραμμικό σύστημα και το πλήθος των λύσεών του. A29. Μοντελοποιούν προβλήματα με δύο γραμμικές εξισώσεις της μορφής $ax+by=\gamma$ ή με δύο συναρτήσεις της μορφής $y=ax+\beta$. Επιλύουν το σύστημα γραφικά και αλγεβρικά (με τις μεθόδους των αντίθετων συντελεστών και της αντικατάστασης) και επαληθεύουν τη λύση με βάση το πλαίσιο του προβλήματος.	Ισότητες-Ανισότητες γραμμικά συστήματα (7 ώρες)	Οι δραστηριότητες μοντελοποίησης καταστάσεων, σύνδεσης με τις συναρτήσεις και τις αναπαραστάσεις τους, γραφικής ερμηνείας και επίλυσης συστημάτων είναι εξίσου σημαντικές με τις αλγεβρικές μεθόδους επίλυσης. Η χρήση λογισμικού μπορεί να υποστηρίξει τη γραφική ερμηνεία και επίλυση συστήματος. (ενδεικτικές δραστηριότητες AΔ9, AΔ10, AΔ11)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Αργυράκης κα, ΟΕΔΒ, 2010) κεφ 3^ο. Γ-ΑΔ10-Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος

Θεματική ενότητα: Γεωμετρία – Μέτρηση

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 33

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
Γ1. Χρησιμοποιούν τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων για την αιτιολόγηση ιδιοτήτων των σχημάτων και κατασκευών. Γ2. Αναγνωρίζουν τα ομοιόθετα σχήματα και συνδέουν την ομοιοθεσία με την αναλογία (και τη σχετική συνάρτηση). Γ3. Κατασκευάζουν ομοιόθετα και όμοια σχήματα. Γ4. Αναγνωρίζουν τις σχέσεις περιμέτρων και εμβαδών των ομοίων σχημάτων. Γ5. Επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας την ομοιότητα και κλίμακες.	Μετασχηματισμοί • η διατήρηση της ισότητας των σχημάτων ως βασικό γνώρισμα της μεταφοράς, στροφής και συμμετρίας • ομοιότητα και ομοιοθεσία • διαδοχικοί μετασχηματισμοί (15 ώρες)	Είναι πολύ σημαντικό να γίνει μια επανάληψη των μετασχηματισμών που μελετήθηκαν στην προηγούμενη τάξη και να τονιστεί η διατήρηση της απόστασης και της ισότητας των σχημάτων ως χαρακτηριστική κοινή ιδιότητά τους. Στην ομοιοθεσία χαρακτηριστική ιδιότητα είναι η διατήρηση του λόγου των αποστάσεων. Κοινή ιδιότητα όλων των μετασχηματισμών που μελετήθηκαν είναι η διατήρηση της καθετότητας, της παραλληλίας και του μέτρου των γωνιών. Το θεώρημα του Θαλή θα αναφερθεί ως μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή των ομοίων τριγώνων. Οι σχέσεις περιμέτρων και εμβαδών των ομοίων σχημάτων θα εξεταστούν με την κατασκευή σε σύστημα συντεταγμένων του ομοιόθετου ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Ο δυναμικός χαρακτήρας των μετασχηματισμών	Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου, Δ. Αργυράκης κ.ά., Γεωμετρία, Κεφάλαιο 1^ο. Γ-ΓΔ3-Ομοιότητα με μετασχηματισμούς Γ-ΓΔ5-Λόγος εμβαδών και περιμέτρων ομοιόθετων ορθογωνίων

		δεικνύεται με τη χρήση λογισμικού. (ενδεικτικές δραστηριότητες ΓΔ1, ΓΔ2, ΓΔ3, ΓΔ4, ΓΔ5, ΓΔ6)	
M1. Υπολογίζουν το εμβαδόν της επιφάνειας πρισμάτων, πυραμίδων, κυλίνδρων, κώνων, σφαιρών και καταλήγουν σε τύπους. M2. Υπολογίζουν τον όγκο πρισμάτων, πυραμίδων, κυλίνδρων, κώνων, σφαιρών και καταλήγουν σε τύπους.	Μέτρηση επιφάνειας - μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες μέτρησης επιφανειών Μέτρηση χωρητικότητας – όγκου - μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες μέτρησης όγκου (8 ώρες)	Οι μαθητές κατασκευάζουν αναπτύγματα στερεών και χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες γνώσεις τους υπολογίζουν τα εμβαδά των αντίστοιχων επιφανειών και αιτιολογούν τους σχετικούς τύπους. Η μέτρηση του όγκου των στερεών προσφέρεται για τη δημιουργία συνδέσεων με τη Φυσική. Οι μαθητές ζυγίζουν μοντέλα στερεών που είναι κατασκευασμένα από το ίδιο υλικό και χρησιμοποιούν τον τύπο πυκνότητα = $\frac{\text{μάζα}}{\text{όγκος}}$ για να υπολογίσουν τον αντίστοιχο όγκο. Τα αποτελέσματα χρησιμοποιούνται για να αιτιολογηθούν οι σχετικοί τύποι. (ενδεικτική δραστηριότητα ΜΔ1)	Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Π. Βλάμος κ.ά., Γεωμετρία, Κεφάλαιο 4^ο Σχολικό βιβλίο Φυσική Β΄ Γυμνασίου, Ν. Αντωνίου κ.ά. (σσ.16-17).
M3. Επεκτείνουν τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών σε αμβλείες γωνίες. M4. Χρησιμοποιούν τις τριγωνομετρικές σχέσεις $\eta\mu(180^\circ - \theta) = \eta\mu\theta$, $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta$, $\epsilon\phi(180^\circ - \theta) = -\epsilon\phi\theta$ και αποδεικνύουν απλές	Τριγωνομετρία (10 ώρες)	Η επίλυση ενός μη ορθογώνιου τριγώνου αναδεικνύει την ανάγκη επέκτασης των τριγωνομετρικών αριθμών για αμβλείες γωνίες. (ενδεικτική	Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Δ. Αργυράκης κ.ά., Γεωμετρία, Κεφάλαιο 2^ο.

τριγωνομετρικές ταυτότητες $\epsilon\phi\theta = \eta\mu\theta / \sigma\upsilon\nu\theta$, $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$. M5. Χρησιμοποιούν τους νόμους ημιτόνων και συνημιτόνων για την επίλυση ενός τυχαίου τριγώνου σε σχετικά προβλήματα.		δραστηριότητα MΔ2)	
--	--	--------------------	--

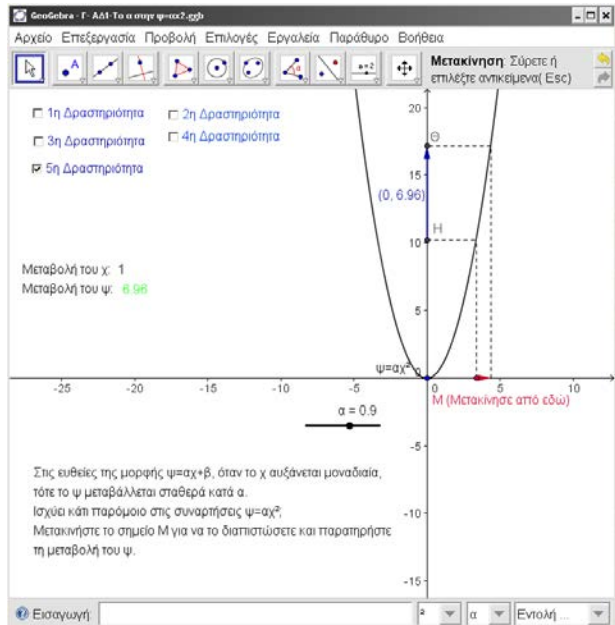
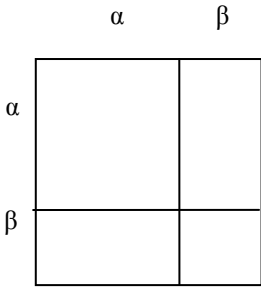
Θεματική ενότητα: Στοχαστικά μαθηματικά

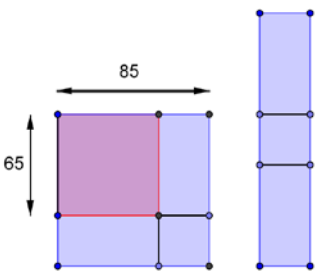
Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 14

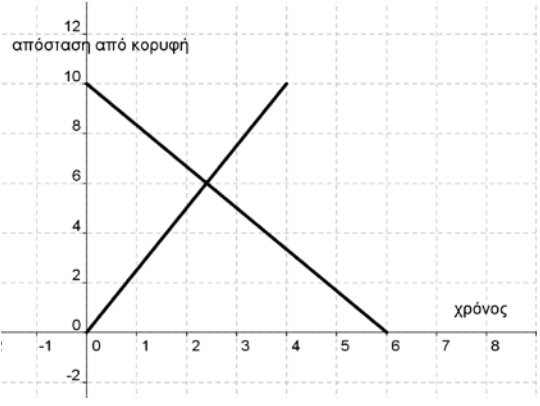
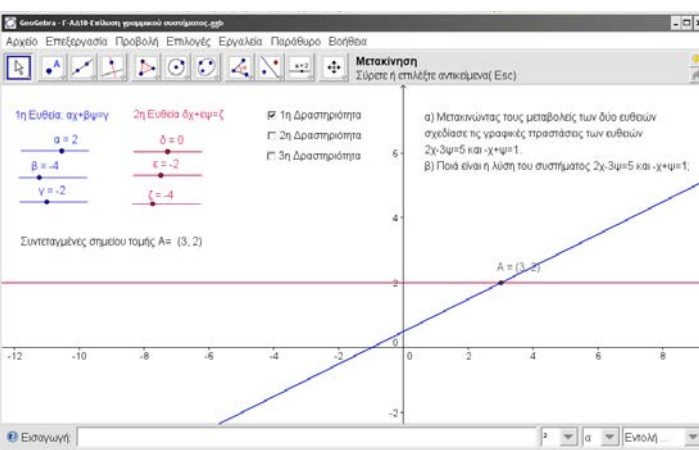
Π1. Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
Π2. Κατασκευάζουν ιστογράμματα Π3. Αξιολογούν την αντιπροσωπευτικότητα ή μη ενός δείγματος Π4. Συνδυάζουν γνωστές μεθόδους και εργαλεία για να σχεδιάσουν και να υλοποιήσουν μικρές στατιστικές έρευνες	Δεδομένα συλλογή, αναπαράσταση, ερμηνεία δεδομένων (5 ώρες)	Οι μαθητές σχεδιάζουν και υλοποιούν μια στατιστική έρευνα	Μέρος του 4^{ου} κεφαλαίου του βιβλίου: Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας κλπ) με κατάλληλες τροποποιήσεις
Π5. Προσδιορίζουν την μέση απόλυτη απόκλιση, για να περιγράψουν ποσοτικά την μεταβλητότητα των δεδομένων και να κάνουν συγκρίσεις δεδομένων	Μεταβλητότητα (3 ώρες)	(ενδεικτική δραστηριότητα ΣΔ1)	
Π6. Διακρίνουν πότε δυο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα ή όχι. Π7. Διακρίνουν πότε δυο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα ή όχι.	Πειράματα Τύχης - Δειγματικοί Χώροι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, ανεξάρτητα ενδεχόμενα (2 ώρες)	Οι μαθητές μέσα από παραδείγματα εξετάζουν (α) αν η πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου αποκλείει την πραγματοποίηση ενός άλλου ενδεχομένου, (β) αν η πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου επηρεάζει την	

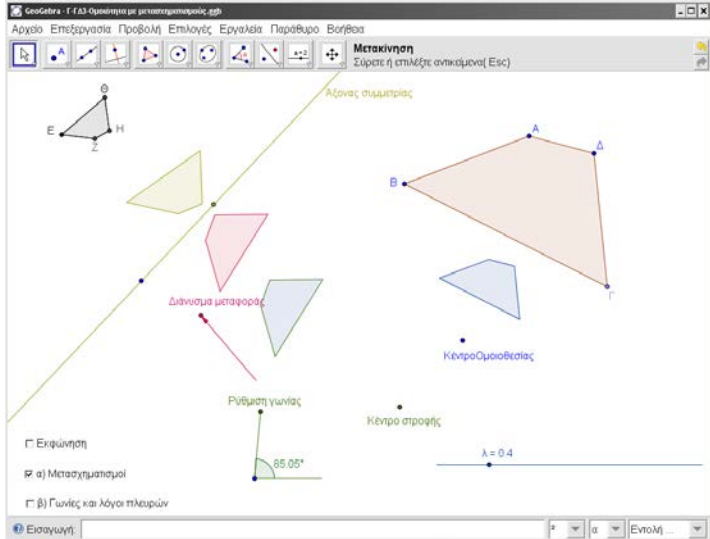
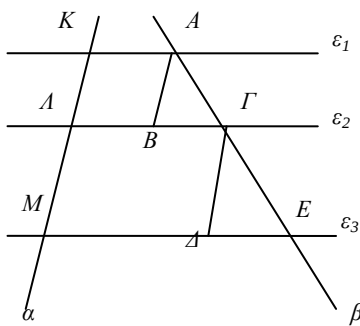
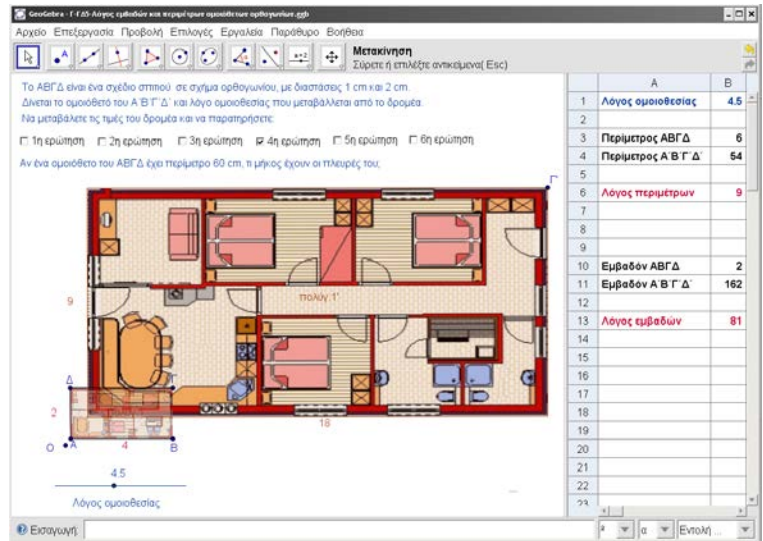
		πιθανότητα πραγματοποίησης ενός άλλου ενδεχομένου (π.χ. τα αποτελέσματα διαδοχικών ρίψεων ενός κέρματος). Ενδεικτικές δραστηριότητες ΠΔ1, ΠΔ2.	
Π8. Απαριθμούν το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου με χρήση της Βασικής Αρχής Απαρίθμησης (BAA) και υπολογίζουν την αντίστοιχη πιθανότητα.	Πιθανότητα Ενδεχομένου • <i>βασική Αρχή Απαρίθμησης κι εφαρμογές της στις Πιθανότητες (4 ώρες)</i>	Οι μαθητές μέσα από παραδείγματα υπολογίζουν το πλήθος των στοιχείων διαφόρων ενδεχομένων και τις αντίστοιχες πιθανότητες. Ενδεικτικές δραστηριότητες ΠΔ3, ΠΔ4.	

Ενδεικτικές δραστηριότητες

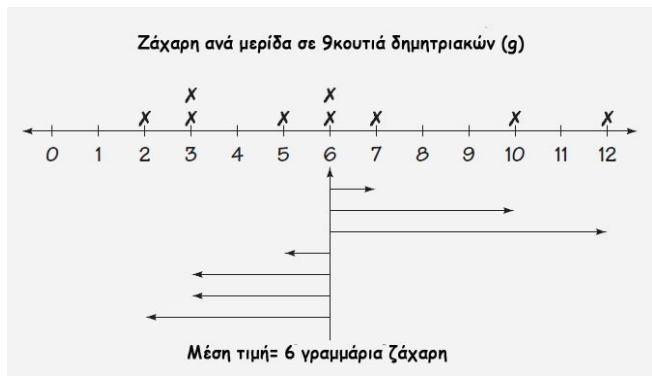
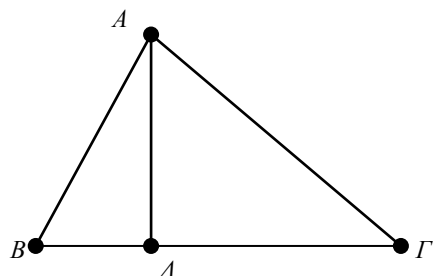
A/A	Περιγραφή δραστηριότητας	ΠΜΑ
AΔ1	Με το Geogebra μεταβάλλουν δυναμικά το a στη συνάρτηση $y=ax^2$ και παρατηρώντας τις αλλαγές στη γραφική παράσταση διερευνούν τις ιδιότητες της $y=ax^2$, το ρόλο του a και την μεταβολή του ψ, όταν το x μεταβάλλεται μοναδιαία (αρχείο: Γ-ΑΔ1-Το a στην $\psi=ax^2$) 	A2, A3
AΔ2	Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=4x-3$ και $y=x^2$. Βρείτε τα σημεία τομής των δύο γραμμών πρώτα γραφικά και επαληθεύστε την απάντησή σας αλγεβρικά (με εξίσωση). Μπορείτε να κάνετε το ίδιο για τα ζευγάρια (β) $y=x-5$ και $y=2x^2$ (γ) $y=2x-1$ και $y=x^2$;	A4, A5
AΔ3	Η Μαρία υπολόγισε το γινόμενο $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$ και το βρήκε 15. Ο Γιάννης ισχυρίστηκε ότι δεν μπορεί το αποτέλεσμα να είναι ακέραιος. Πώς νομίζετε ότι οδηγήθηκε ο Γιάννης σε αυτό συμπέρασμα; Συμφωνείτε με το Γιάννη ή με τη Μαρία και γιατί;	A6
AΔ4	α) Ποια σχέση νομίζετε ότι έχουν οι παραστάσεις $(\alpha+\beta)^2$ και $\alpha^2+\beta^2$; Είναι ίσες ή άνισες; Με ποιο τρόπο μπορείτε να το διαπιστώσετε; β) Χρησιμοποιήστε το διπλανό σχήμα, για να υπολογίσετε το $(\alpha+\beta)^2$. γ) Διερευνήστε αν μπορεί ποτέ να ισχύει ο ισχυρισμός που κάνατε στο πρώτο ερώτημα. 	A11
AΔ5	Ο Ανδρέας πειραματίζεται με ζεύγη διψήφιων αριθμών. Ψάχνει τη διαφορά των τετραγώνων διάφορων τέτοιων αριθμών και συγκεντρώνει κάποια αποτελέσματα που του κίνησαν την περιέργεια: α) $55^2 - 45^2 = 1000$, $105^2 - 95^2 = 2000$, $85^2 - 65^2 = 3000$ Μπορείτε να βρείτε άλλα ζευγάρια που η διαφορά των τετραγώνων τους να είναι πολλαπλάσιο του 1000;	A11, A12

	Μήπως παρατηρείτε κάτι ιδιαίτερο σε αυτά όλα αυτά τα ζευγάρια; β) Ο Ανδρέας με έκπληξη διαπίστωσε επίσης ότι: $89^2 - 12^2 = 7777, \quad 78^2 - 23^2 = 5555$ Μπορείτε να βρείτε άλλα ζευγάρια αριθμών που η διαφορά των τετραγώνων είναι αριθμός με επαναλαμβανόμενα ψηφία; Παρατηρείτε κάτι ιδιαίτερο σε αυτά τα ζευγάρια; γ) Θέλοντας να εξηγήσει τα εντυπωσιακά αποτελέσματα που παρατήρησε, ο Ανδρέας σχεδίασε μερικά διαγράμματα για να βοηθηθεί. Το διάγραμμα που σχεδίασε, για να μελετήσει τη διαφορά $85^2 - 65^2$, φαίνεται στο διπλανό σχήμα.  Πώς συνδέεται το διάγραμμα του Ανδρέα με τον υπολογισμό της διαφοράς $85^2 - 65^2$; Πώς θα μπορούσε να υπολογιστεί η επιφάνεια του μακρόστενου μοβ ορθογωνίου (χωρίς τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης); Μπορείτε να σχεδιάσετε παρόμοια διαγράμματα για άλλους υπολογισμούς που έκανε ο Ανδρέας ή για υπολογισμούς που κάνατε εσείς; Πώς θα μπορούσαν αυτά τα διαγράμματα να βοηθήσουν τον Ανδρέα να αναπτύξει μία γρήγορη μέθοδο, για να υπολογίζει διαφορές τετραγώνων της μορφής $\alpha^2 - \beta^2$ για οποιαδήποτε α και β;	
AΔ6	α) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς 60 και 225 και να βρείτε το ΕΚΠ τους. β) Με τον ίδιο τρόπο, να βρείτε το ΕΚΠ των μονωνύμων $6x^2y$ και $9xy^3$, το ΕΚΠ των πολυωνύμων $x^2 - 1$ και $x^2 + x$	A16
AΔ7	Το εισιτήριο εισόδου σε ένα χιονοδρομικό κέντρο στοιχίζει €7 και συμπεριλαμβάνει την ενοικίαση του εξοπλισμού. Στην περίπτωση που ο επισκέπτης χρησιμοποιήσει δικό του εξοπλισμό, τότε το εισιτήριο εισόδου είναι €4. Αν το κόστος αγοράς του εξοπλισμού είναι €75, πόσες φορές θα πρέπει να επισκεφθεί το ίδιο άτομο το χιονοδρομικό κέντρο, ώστε να είναι συμφέρουσα η αγορά του εξοπλισμού;	A21, A22
AΔ8	Παρατηρήστε ότι $1^3=1$, δηλαδή ότι ο κύβος του 1 ισούται με το 1. Μπορείτε να βρείτε όλους τους αριθμούς που έχουν αυτή την ιδιότητα, δηλαδή ο κύβος του αριθμού να είναι ίσος με τον ίδιο τον αριθμό; Πόσοι τέτοιοι αριθμοί υπάρχουν;	A24, A25

ΑΔ9	Η Μαρία ξεκινάει το πρωί από τη βάση της κατασκήνωσης, για να ανέβει στην κορυφή του Ολύμπου, η οποία απέχει 10 χιλιόμετρα. Η Έλενα ξεκινάει την ίδια ώρα από την κορυφή, για να επιστρέψει στην κατασκήνωση από την ίδια διαδρομή. Τα γραφήματα που περιγράφουν την απόσταση κάθε ορειβάτισσας από την κορυφή του βουνού είναι σχεδιασμένα στο σχήμα. Ποια γραμμή αντιστοιχεί στη Μαρία και ποια στην Έλενα; Τι εκφράζει το σημείο τομής των δύο γραμμών; Σε πόση ώρα θα συναντήσει η Μαρία την Έλενα; Πώς μπορούμε να περιγράψουμε αλγεβρικά τη συνάντησή τους και να βρούμε την ώρα συνάντησης; 	A28, A29
ΑΔ10	Με το Geogebra μεταβάλλουν δυναμικά τους συντελεστές σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων και διερευνούν (α) πώς η μεταβολή των συντελεστών επηρεάζει την γραφική παράσταση κάθε γραμμικής εξίσωσης (β) τον αριθμό των λύσεων του συστήματος και (γ) τη σχέση των τιμών των συντελεστών με τις σχετικές θέσεις των δύο ευθειών και την γραφική επίλυση του συστήματος. (αρχείο: Γ-ΑΔ10-Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος) 	A28, A29
ΑΔ11	Σε ένα πάρκινγκ υπάρχουν 20 θέσεις στάθμευσης οι οποίες είναι όλες κατειλημμένες. Σε κάποιες θέσεις έχουν σταθμεύσει μηχανές και σε κάποιες αυτοκίνητα. Μετρήσαμε τους τροχούς από τα αυτοκίνητα και τις μηχανές που ήταν σταθμευμένα στο πάρκινγκ και τους βρήκαμε 66. Πόσα αυτοκίνητα και πόσες μηχανές είναι σταθμευμένα στο πάρκινγκ;	A29
ΓΔ1	Οι μαθητές σχεδιάζουν σε σύστημα συντεταγμένων ένα γεωμετρικό σχήμα του οποίου δίνονται οι συντεταγμένες των κορυφών (x, y) [π.χ. το ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές (0, 0), (1,0), (0, 2)] και κατασκευάζουν διαδοχικά τα σχήματα που έχουν κορυφές τα σημεία: α) (x + 3, y + 4), β) (x, -y), γ) (-x, y), δ) (-x, -y) και ε) (-y, x). Διαπιστώνουν ότι τα νέα σχήματα είναι αντίστοιχα η εικόνα του αρχικού ως προς: α) μεταφορά κατά ένα διάνυσμα μήκους 5, β) ανάκλαση ως προς τον άξονα x'x, γ) ανάκλαση ως προς τον άξονα y'y, δ) ανάκλαση με κέντρο την αρχή των αξόνων, ε) στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων και γωνία 90°. Συζητούν τη σχέση των σχημάτων αυτών με το αρχικό και χρησιμοποιούν τις έννοιες της μεταφοράς, ανάκλασης και στροφής για να καταλήξουν σε ένα γενικό ορισμό ης ισότητας.	Γ1
ΓΔ2	Οι μαθητές χρησιμοποιούν το επιδιασκόπιο για να προβάλλουν σε μεγέθυνση διάφορα γεωμετρικά σχήματα από μια διαφάνεια σε μια οθόνη. Χρησιμοποιούν δύο διαφάνειες	Γ2, Γ3

	στις οποίες έχουν σχεδιαστεί δύο όμοια τρίγωνα, τοποθετούν τη διαφάνεια με το μικρότερο τρίγωνο στο επιδιασκόπιο και αναρτούν τη διαφάνεια με το μεγαλύτερο τρίγωνο στην οθόνη. Προβάλλουν το μικρό τρίγωνο στην οθόνη και αυξομειώνουν τη μεγέθυνσή του με ρυθμίσεις του προβολέα, μέχρις ότου η μεγέθυνση εφαρμόσει ακριβώς στο μεγαλύτερο τρίγωνο που έχει αναρτηθεί στην οθόνη. Επαναλαμβάνουν την ίδια διαδικασία με δύο διαφάνειες στις οποίες έχουν σχεδιαστεί ανόμοια τρίγωνα. Χρησιμοποιούν τις έννοιες της ομοιοθεσίας και της ισότητας, για να περιγράψουν την προηγούμενη διαδικασία και να καταλήξουν σε ένα γενικό ορισμό της ομοιότητας.																																																																									
ΓΔ3	Με το Geogebra οι μαθητές ελέγχουν την ομοιότητα δύο σχημάτων με δύο τρόπους: (α) μέσω συνδυαστικών μετασχηματισμών (ομοιοθεσία, στροφή, μεταφορά, ανάκλαση) και (β) με χρήση του κριτηρίου ισότητας γωνιών και αναλογίας πλευρών. (αρχείο: Γ-ΓΔ3-Ομοιότητα με μετασχηματισμούς) 	Γ2, Γ3																																																																								
ΓΔ4	Το επόμενο σχήμα χρησιμοποιείται στο πλαίσιο μιας δραστηριότητας, στην οποία αποδειχθεί το θεώρημα του Θαλή ως εφαρμογή των ομοίων τριγώνων.  θα	Γ2																																																																								
ΓΔ5	Με το Geogebra οι μαθητές μεταβάλλουν το λόγο ομοιοθεσίας δύο ορθογωνίων και εμπλέκονται σε δραστηριότητες συσχέτισης του συγκεκριμένου λόγου με το λόγο των περιμέτρων και το λόγο των εμβαδών των δύο ορθογωνίων (αρχείο: Γ-ΓΔ5-Λόγος εμβαδών και περιμέτρων ομοιόθετων ορθογωνίων).  <table border="1" data-bbox="1093 1444 1292 1937"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>Λόγος ομοιοθεσίας</td> <td>4.5</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>Περίμετρος ΑΒΓΔ</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>Περίμετρος Α'Β'Γ'Δ'</td> <td>54</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>Λόγος περιμέτρων</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>8</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>9</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>Εμβαδόν ΑΒΓΔ</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>Εμβαδόν Α'Β'Γ'Δ'</td> <td>162</td> </tr> <tr> <td>12</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>13</td> <td>Λόγος εμβαδών</td> <td>81</td> </tr> <tr> <td>14</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>15</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>16</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>17</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>18</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>19</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>20</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>21</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>22</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>23</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		A	B	1	Λόγος ομοιοθεσίας	4.5	2			3	Περίμετρος ΑΒΓΔ	6	4	Περίμετρος Α'Β'Γ'Δ'	54	5			6	Λόγος περιμέτρων	9	7			8			9			10	Εμβαδόν ΑΒΓΔ	2	11	Εμβαδόν Α'Β'Γ'Δ'	162	12			13	Λόγος εμβαδών	81	14			15			16			17			18			19			20			21			22			23			Γ2, Γ4
	A	B																																																																								
1	Λόγος ομοιοθεσίας	4.5																																																																								
2																																																																										
3	Περίμετρος ΑΒΓΔ	6																																																																								
4	Περίμετρος Α'Β'Γ'Δ'	54																																																																								
5																																																																										
6	Λόγος περιμέτρων	9																																																																								
7																																																																										
8																																																																										
9																																																																										
10	Εμβαδόν ΑΒΓΔ	2																																																																								
11	Εμβαδόν Α'Β'Γ'Δ'	162																																																																								
12																																																																										
13	Λόγος εμβαδών	81																																																																								
14																																																																										
15																																																																										
16																																																																										
17																																																																										
18																																																																										
19																																																																										
20																																																																										
21																																																																										
22																																																																										
23																																																																										

ΓΔ6	Ένας μηχανικός, τα μάτια του οποίου βρίσκονται σε ύψος 1,8m από το έδαφος, χρησιμοποιεί την εξής διαδικασία, για να μετρήσει το ύψος μιας κατακόρυφης κεραίας: Τοποθετεί σε οριζόντια θέση στο έδαφος έναν καθρέπτη σε απόσταση 10 μέτρων από τη βάση της κεραίας. Στη συνέχεια μετακινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση και παρατηρεί ότι σε απόσταση 0,9m από τον καθρέπτη βλέπει μέσα σε αυτόν την κορυφή της κεραίας. Από τα στοιχεία αυτά υπολογίζει ότι το ύψος της κεραίας είναι 20m. Να κάνετε ένα σχεδιάγραμμα και να εξηγήσετε γιατί αυτή η διαδικασία δίνει σωστό αποτέλεσμα.	Γ5
ΜΔ1	Οι μαθητές χρησιμοποιούν τα αποτελέσματα ενός πραγματικού ή νοητικού πειράματος, στο οποίο κατασκευάζονται από το ίδιο υλικό ένα παραλληλεπίπεδο και ένα πρίσμα με ίσες βάσεις και ίσα ύψη και εν συνεχεία προσδιορίζεται η μάζα τους. Η γνώση της μάζας των στερεών και της πυκνότητας του υλικού επιτρέπει τον υπολογισμό των όγκων σύμφωνα με τον τύπο: πυκνότητα = μάζα : όγκος. Το πείραμα επαναλαμβάνεται με ένα πρίσμα και μια πυραμίδα που έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη. Από τα αποτελέσματα προσδιορίζονται οι σχέσεις ανάμεσα στους όγκους του παραλληλεπιπέδου, του πρίσματος και της πυραμίδας.	Μ2
ΜΔ2	Οι μαθητές χρησιμοποιούν την Τριγωνομετρία και το Πυθαγόρειο θεώρημα για να προσδιορίσουν σχέσεις ανάμεσα στις πλευρές και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ενός οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ με ύψος ΑΔ. Οι σχέσεις αυτές διατυπώνονται στη μορφή γενικών προτάσεων (νόμοι ημιτόνων και συνημιτόνων) και εξετάζεται η δυνατότητα της επέκτασής τους σε αμβλυγώνια τρίγωνα.	Μ3, Μ5
ΣΔ1	Η Άννα έφτιαξε το διπλανό σημειόγραμμα που αφορά την ποσότητα ζάχαρης ανά μερίδα σε 9 κουτιά δημητριακών. Υπολόγισε τη μέση τιμή και βρήκε ότι είναι 6 γραμμάρια ζάχαρης και μετά δημιούργησε τα υπόλοιπα στοιχεία του διαγράμματος. α) Τι υποδηλώνουν τα βέλη που υπάρχουν εκατέρωθεν της γραμμής που δείχνει την θέση της μέσης τιμής; β) Υπολογίστε το μήκος του κάθε βέλους και το άθροισμα των μηκών για τα βέλη που δείχνουν προς τα δεξιά και ξεχωριστά το άθροισμα των μηκών για τα βέλη που δείχνουν αριστερά. γ) Τι σχέση έχουν τα δύο αθροίσματα; Γιατί νομίζετε ότι συμβαίνει αυτό; Εξηγήστε αν αυτό θα συμβαίνει πάντα ή όχι. δ) Πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε κάποια από τα παραπάνω, για να βρούμε τη μέση απόσταση που έχουν τα δεδομένα από την μέση τιμή;	Σ4
ΠΔ1	Ρίχνουμε δυο ζάρια και θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α: να φέρουν άθροισμα 9	Π1



	B: τουλάχιστον ένα από τα δυο ζάρια να φέρει 1 ή 2 Γ: τουλάχιστον ένα από τα δυο ζάρια να φέρει 5 ή 6 Ρωτάμε τους μαθητές αν είναι δυνατό να πραγματοποιηθούν συγχρόνως δυο από τα παραπάνω ενδεχόμενα και ποια.	
ΠΔ2	Σε δυο κουτιά βάζουμε από τρεις ίσες κιμωλίες όχι όμως ακριβώς τα ίδια χρώματα στα δυο κουτιά π.χ. λευκή, μπλε, κόκκινη στο 1^ο κουτί και λευκή, λευκή μπλε στο 2^ο κουτί. Ρίχνουμε ένα κέρμα και με βάση το αποτέλεσμα διαλέγουμε κουτί. Κατόπιν διαλέγουμε μια κιμωλία από το κάθε κουτί και θεωρούμε τα ενδεχόμενα A: επιλέγω το 2^ο κουτί B: επιλέγω λευκή κιμωλία Ρωτάμε τους μαθητές κατά πόσο η πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου επηρεάζει ή όχι την πραγματοποίηση του άλλου ενδεχομένου; Στη συνέχεια θέτουμε το ίδιο πρόβλημα βάζοντας όμως στα κουτιά τις ίδιες ακριβώς κιμωλίες.	Π2
ΠΔ3	Δίνουμε στους μαθητές ένα μενού εστιατορίου με 3 ορεκτικά, 2 σαλάτες, 4 κύρια πιάτα και 2 γλυκά και ζητάμε κάθε μαθητής να δώσει διαφορετική παραγγελία από τους συμμαθητές του. Κατόπιν βρίσκουμε πόσες διαφορετικές παραγγελίες μπορούμε να κάνουμε με το συγκεκριμένο μενού. Στη συνέχεια στους υπολογισμούς μπορούμε να βάλουμε και περιορισμούς όπως να μην παραγγείλουμε μαζί το τάδε ορεκτικό με το τάδε κύριο πιάτο.	Π3
ΠΔ4	Δίνουμε στους μαθητές ένα ερωτηματολόγιο με 4 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, όπου σε κάθε ερώτηση υπάρχουν τρεις απαντήσεις, εκ των οποίων μόνο μια σωστή. Οι ερωτήσεις είναι τέτοιες, ώστε να αναγκαστούν οι μαθητές να τις απαντήσουν στην τύχη. Ζητάμε την πιθανότητα να απαντήσουν όλες τις ερωτήσεις σωστά καθώς και την πιθανότητα να τις απαντήσουν όλες λάθος.	Π3

ΣΥΝΘΕΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ 3^{ου} Κύκλου (Α' - Β' - Γ' Γυμνασίου)

Πίνακας Περιεχομένων

A/A	Τίτλος	Θέμα	Τάξη	Εκπαιδευτικό υλικό
1	«Σχεδιάζοντας με τετράπλευρα»	Στο πλαίσιο της κατασκευής συνθέσεων με τετράπλευρα οι μαθητές κατασκευάζουν παραλληλόγραμμα, τα τρία είδη παραλληλογράμμου και τραπέζια. Χρησιμοποιούν το υπολογιστικό περιβάλλον Χελωνόκοσμος που συνδυάζει εργαλεία συμβολικής έκφρασης και δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων.	Α' Γυμνασίου. Κάποιες φάσεις, με κατάλληλες τροποποιήσεις, μπορεί να εφαρμοστούν σε επόμενες τάξεις.	Αρχείο λογισμικού Χελωνόκοσμος: 1 -Φάσεις 1-2 Φύλλο εργασίας σε doc: 1- Φύλλο εργασίας
2	«Η αιτιολόγηση του “κανόνα των προσήμων” από τους μαθηματικούς του 18ου αιώνα»	Οι μαθητές μελετούν ένα ιστορικό μαθηματικό κείμενο του 18ου αιώνα στο οποίο παρουσιάζονται δύο τρόποι αιτιολόγησης του “κανόνα των προσήμων”. Αναλύουν τους συγκεκριμένους τρόπους και θα τους συγκρίνουν με αντίστοιχους που υπάρχουν σε σύγχρονα διδακτικά βιβλία ή άλλες πηγές.	Α' Γυμνασίου	
3	«Αιολική ενέργεια - Κατασκευάζουμε έναν ανεμόμυλο;»	Στο πλαίσιο της κατασκευής μοντέλων ανεμόμυλων οι μαθητές μελετούν την κατασκευή παραλληλογράμμων μέσα από παραμετρικές διαδικασίες. Επίσης, διερευνούν τη σκοπιμότητα της χρήσης ανεμογεννητριών για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας μέσα από αντιπαράθεση απόψεων και μετά από τη μελέτη κατάλληλης βιβλιογραφίας και ενημερωτικού υλικού.	Α' Γυμνασίου Κάποιες φάσεις, με κατάλληλες τροποποιήσεις, μπορούν να εφαρμοστούν σε επόμενες τάξεις	Αρχεία λογισμικού Χελωνόκοσμος: 3 -φάση 1 3-φάση 2 Φύλλο εργασίας σε doc: 3- Φύλλο εργασίας Οδηγός Ανάπτυξης Διαθεματικών Δραστηριοτήτων Περιβαλλοντικής Εκπαίδευσης, Διδακτικά Πακέτα Γυμνασίου http://pi-schools.sch.gr/gymnasio/ Ιστότοπος της UNESCO για την Εκπαίδευση για την Αειφόρο Ανάπτυξη http://www.unesco.org/new/en/education/themes/leading-the-international-agenda/education-for-sustainable-development/publications/

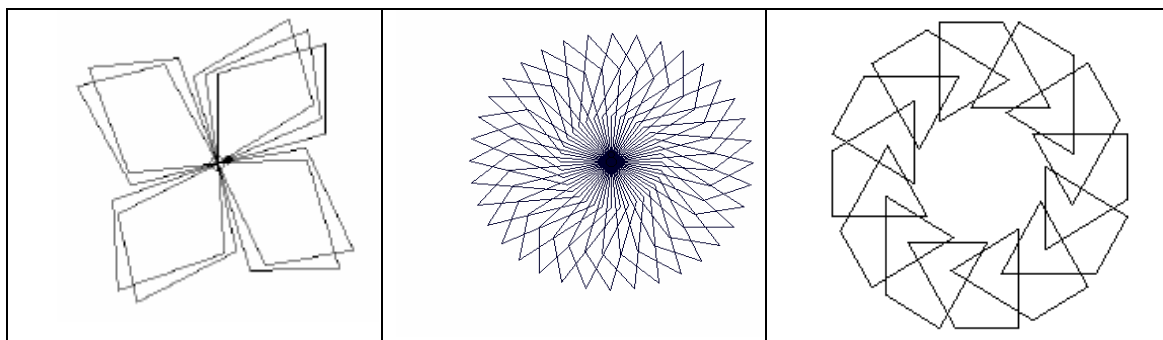
				Ιστότοπος της Ευρωπαϊκής Ένωσης: http://europa.eu/pol/ener/index_el.htm Ευρωπαϊκός Οργανισμός Περιβάλλοντος http://www.eea.europa.eu/themes/energy Υπουργείο Περιβάλλοντος, Ενέργειας και Κλιματικής αλλαγής: http://www.ypeka.gr/Default.aspx?tabid=225&language=el-GR Κέντρο Ανανεώσιμων Πηγών Ενέργειας: http://www.cres.gr/kape/publications/download.htm
4	«Αιτιολόγηση (“αναζήτηση της αιτίας”) των γεωμετρικών προτάσεων στην αρχαία Ελλάδα»	Στους μαθητές δίνεται μια γεωμετρική πρόταση για τις εξωτερικές γωνίες του τριγώνου και θα ζητηθεί από αυτούς να εξετάσουν αν ισχύει πάντοτε ή όχι. Στη συνέχεια μελετούν ένα αρχαιοελληνικό μαθηματικό κείμενο (σε μετάφραση), στο οποίο παρουσιάζεται ένας τρόπος αιτιολόγησης της ίδιας γεωμετρικής πρότασης διαφορετικός από την τυπική Ευκλείδεια απόδειξη με βάση αξιώματα και προηγούμενες προτάσεις.	Α' Γυμνασίου	Αρχείο Sketchpad: 4-΄ Παράδοξες ιδιότητες των γεωμετρικών προτάσεων
5	«Αναζητώντας το λάθος του γραμμωτού κώδικα»	Μέσα από ένα πραγματικό πρόβλημα οι μαθητές μελετούν τις γραμμικές συναρτήσεις $\psi = \alpha x$ και $\psi = \alpha x + \beta$, χρησιμοποιώντας το υπολογιστικό περιβάλλον Function Probe (FP) που διασυνδέει τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων (πίνακα τιμών, γραφική παράσταση και συμβολική έκφραση).	Β' Γυμνασίου	Αρχεία Function Probe: 5-φάση 1-αρχικό 5-φάση 1-τελικό 5- φάση 2-ερ3-τελικό 5- φάση 2-ερ6β-τελικό 5- φάση 4-τελικό 5- Φύλλο εργασίας
6	«Αρνητικοί αριθμοί και εξισώσεις»	Οι μαθητές μελετούν ένα ιστορικό κείμενο στο οποίο ένας σπουδαίος μαθηματικός απορρίπτει τη χρήση των αρνητικών αριθμών όταν αυτοί	Β' Γυμνασίου	

		εμφανίζονται ως λύσεις εξισώσεων. Στη συνέχεια ασχολούνται με ένα πρόβλημα στο οποίο θα διαφανεί η σημασία των αρνητικών αριθμών για την επίλυση των εξισώσεων.		
7	«"Παράδοξες" ιδιότητες των γεωμετρικών προτάσεων»	Στους μαθητές δίνεται προς επίλυση ένα γεωμετρικό πρόβλημα. Στη συνέχεια μελετούν ένα αρχαιοελληνικό μαθηματικό κείμενο (σε μετάφραση) στο οποίο τονίζεται ο παράδοξος χαρακτήρας της λύσης του συγκεκριμένου προβλήματος.	Β' Γυμνασίου	Αρχεία Sketchpad: 7-“Παράδοξες” ιδιότητες των γεωμετρικών προτάσεων
8	«Παγκόσμιο χωριό - Οι άνθρωποι και οι κοινωνίες πίσω από τους αριθμούς»	Στο πλαίσιο των στατιστικών ερευνών που κάνουν οι μαθητές, στο μάθημα των μαθηματικών, μελετούν ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα σε αυτούς και τους μαθητές άλλων χωρών, συλλέγουν δεδομένα από το διαδίκτυο και τα επεξεργάζονται χρησιμοποιώντας το υπολογιστικό περιβάλλον των λογιστικών φύλλων.	Β' Γυμνασίου. Η εργασία μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε τάξη.	
9	«Μελετώντας την κάτοψη ενός σπιτιού»	Με αφετηρία ένα πραγματικό πρόβλημα που σχετίζεται με το μετασχηματισμό της κάτοψης ενός σπιτιού οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της ομοιοθεσίας και της ομοιότητας γεωμετρικών σχημάτων. Διαπραγματεύονται τη σχέση του λόγου των περιμέτρων και του λόγου των εμβαδών ομοιόθετων γεωμετρικών σχημάτων με το λόγο ομοιότητας και θα διερευνήσουν το πρόβλημα του κόστους της οικοδομής σε σχέση με την περίμετρο και το εμβαδόν της.	Γ' Γυμνασίου	Αρχεία Geogebra: 9-φάση 1-Ομοιόθετο σημείου 9-φάση 1-Ομοιόθετο τμήματος 9-φάση 1-Λόγος περιμέτρων-εμβαδών 9-φάση 2-Ομοιότητα 9-φάση 3
10	«Ανακαλύπτοντας τη χρυσή αναλογία»	Χωρίζοντας ένα ευθύγραμμο τμήμα σε μέσο και άκρο λόγο, οι μαθητές ανακαλύπτουν τη χρυσή αναλογία και τον αριθμό φ. Τον υπολογίζουν προσεγγιστικά και διερευνούν συνεργατικά την εμφάνιση του λόγου φ στη φύση, στην αρχιτεκτονική και στις τέχνες.	Γ' Γυμνασίου	Αρχείο Geogebra: 10- Ψάχνοντας για τη χρυσή αναλογία

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 1 (Α' Γυμνασίου)

«Σχεδιάζοντας με τετράπλευρα»

Ο καθηγητής των καλλιτεχνικών του σχολείου σας έχει αναθέσει να σχεδιάσετε δυναμικά σχέδια με δομικό λίθο τα τετράπλευρα. Σας πρότεινε να κατασκευάσετε τα σχέδια στο λογισμικό «Χελωνόκοσμος», ώστε να μπορείτε να τροποποιείτε το σχήμα τους και τον αριθμό των χρησιμοποιούμενων τετραπλεύρων (παραλληλογράμμων και τραπεζίων) όπως και να μπορείτε να τα κινείτε ώστε να φαίνονται περισσότερο εντυπωσιακά. Οι επόμενες διερευνήσεις θα βοηθήσουν την ομάδα σας να κάνει τέτοιες κατασκευές.



Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1η φάση: Οι μαθητές κατασκευάζουν τετράπλευρα χρησιμοποιώντας το δυναμικό χειρισμό μεταβλητών που αναπαριστούν τις γωνίες του. Στη συνέχεια κατασκευάζουν παραλληλόγραμμα με τρεις μεταβλητές αφού διερευνήσουν πόσες μεταβλητές για πλευρές και γωνίες είναι απολύτως απαραίτητες για να γράψουμε μια παραμετρική διαδικασία που θα κατασκευάζει παραλληλόγραμμα διαφορετικών τύπων και μεγεθών.

2η φάση: Οι μαθητές μετασχηματίζουν τετράπλευρα σε τραπέζια και παραλληλόγραμμα και στη συνέχεια σε ορθογώνια, ρόμβους και τετράγωνα. Διαπραγματεύονται τη σχέση των διάφορων μορφών τετραπλεύρου.

Για παράδειγμα, ζητείται από τους μαθητές να διορθώσουν παραμετρικές διαδικασίες ώστε να κατασκευάζουν διαφορετικά είδη παραλληλογράμμων και τραπεζίων διερευνώντας παράλληλα τις γεωμετρικές τους ιδιότητες.

3η φάση: Οι μαθητές χρησιμοποιούν τα υπολογιστικά εργαλεία για να κατασκευάσουν δυναμικές συνθέσεις σχεδίων βασισμένων σε διαφορετικά είδη τετραπλεύρων που θα μπορούν να χειριστούν δυναμικά με το μεταβολέα.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Στην παραδοσιακή τάξη η διδασκαλία των διάφορων ειδών τετραπλεύρων γίνεται με στατικά μέσα αναπαράστασης και εμφανίζεται εντελώς αποκομμένη από έννοιες της άλγεβρας. Στο πλαίσιο αυτό οι μαθητές έχουν περιορισμένες δυνατότητες εμπλοκής τους σε διαδικασίες διερεύνησης των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων και των τραπεζίων και των μεταξύ τους σχέσεων. Στην παρούσα εργασία και με τη βοήθεια του Χελωνόκοσμου οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:

- να συνδέσουν διαφορετικές έννοιες και αναπαραστάσεις (π.χ. να συνδέσουν την κατασκευή ενός γεωμετρικού σχήματος με την έννοια της μεταβλητής),

- να πειραματιστούν με τις αλλαγές στις τιμές των μεταβλητών των πλευρών ή/και των γωνιών σε παραμετρικές διαδικασίες κατασκευής τεθλασμένων πολυγωνικών γραμμών και να διερευνήσουν τις προϋποθέσεις κατασκευής παραλληλογράμμων και τις ιδιότητές τους,
- να χρησιμοποιήσουν τις παραμετρικές διαδικασίες ως δομικό λίθο για να μοντελοποιήσουν την κατασκευή πολύπλοκων γεωμετρικών σχεδίων,
- να αναγνωρίσουν την αξία του γενικευμένου -χάρη στα μαθηματικά – εργαλείου ως του μηχανισμού μέσω του οποίου μπορεί να κατασκευάζουμε πολύπλοκες γεωμετρικές συνθέσεις.

Μέσω της χρήσης μεταβλητών προσφέρονται ευκαιρίες στους μαθητές να αναπτύξουν εικασίες, να διορθώσουν παραμετρικές διαδικασίες και να διαχειριστούν τα λάθη τους, να εξαγάγουν συμπεράσματα και να διατυπώσουν κανόνες για την κατασκευή παραλληλογράμμων και τραπεζίων. Αυτές ακριβώς οι δυνατότητες έχουν ιδιαίτερη διδακτική αξία αφού στην συνήθη διδακτική πρακτική αποτελούν την κατάληξη και όχι την αφετηρία της διερεύνησης των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων.

(Η κεντρική δομή της συνθετικής εργασίας προέρχεται από το σενάριο 1 του επιμορφωτικού υλικού για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης Β' επιπέδου για τη χρήση των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία – ΥΠΠΔΒΜ, Πάτρα 2010).

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 2 (Α' Γυμνασίου)

«Η αιτιολόγηση του “κανόνα των προσήμων” από τους μαθηματικούς του 18ου αιώνα»

Nicholas Saunderson: The Elements of Algebra (1741)

Σχετικά με τον πολλαπλασιασμό αλγεβρικών ποσοτήτων.

Και πρώτα, πώς να βρίσκει κανείς το γινόμενο του πολλαπλασιασμού, από εκείνα του πολλαπλασιαστή και του πολλαπλασιαστέου

Πριν προχωρήσουμε στον πολλαπλασιασμό αλγεβρικών ποσοτήτων, να έχουμε υπόψη ότι, αν τα πρόσημα του πολλαπλασιαστή και του πολλαπλασιαστέου είναι ίδια, δηλαδή, και τα δυο θετικά, ή και τα δυο αρνητικά, το γινόμενο θα είναι θετικό, αλλιώς θα είναι αρνητικό: έτσι όταν το +4 πολλαπλασιάζεται με το +3, ή το -4 με το -3 προκύπτει σε κάθε περίπτωση +12. Αλλά όταν το -4 πολλαπλασιάζεται με το +3 ή το +4 με το -3 προκύπτει σε κάθε περίπτωση -12.

Αν ο αναγνώστης αναμένει μια απόδειξη αυτού του κανόνα, πρέπει αρχικά να του γνωστοποιήσουμε δύο πράγματα: πρώτον, λέμε ότι κάποιοι αριθμοί βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδος, όταν αυξάνονται ή μειώνονται με ίσες διαφορές, όπως οι 0, 2, 4, 6, ή 6, 4, 2, 0. Επίσης όπως οι 3, 0, -3 ή 4, 0, -4, ή 12, 0, -12 ή -12, 0, +12. Από εδώ έπεται ότι αριθμοί με τους οποίους μπορεί να σχηματιστεί μια αριθμητική πρόοδος είναι το λιγότερο τρεις, και ότι αν οι δύο πρώτοι από αυτούς είναι γνωστοί, τότε ο τρίτος μπορεί εύκολα να βρεθεί. Έτσι, αν οι δύο πρώτοι όροι είναι 4 και 2, ο επόμενος θα είναι το 0, αν οι δύο πρώτοι είναι 12 και 0, ο επόμενος θα είναι -12, αν οι δύο πρώτοι είναι -12 και 0, ο επόμενος θα είναι +12, κ.ο.κ.

Δεύτερον, αν ένα σύνολο αριθμών σε αριθμητική πρόοδος, όπως οι 3, 2 και 1, πολλαπλασιάζονται διαδοχικά με έναν κοινό πολλαπλασιαστή, όπως το 4, ή αν ένας μεμονωμένος αριθμός, όπως το 4 πολλαπλασιάζεται διαδοχικά με ένα σύνολο αριθμών σε αριθμητική πρόοδος, όπως οι 3, 2 και 1, τα γινόμενα 12, 8, και 4 θα βρίσκονται, σε κάθε περίπτωση, σε αριθμητική πρόοδος.

Με αυτό το δεδομένο (το οποίο μέχρι ενός σημείου είναι αυτονόητο), ο κανόνας που έχουμε να αποδείξουμε αναλύεται σε τέσσερις περιπτώσεις:

Πρώτον, ότι το +4 όταν πολλαπλασιάζεται με το +3 παράγει +12.

Δεύτερον, ότι το -4 όταν πολλαπλασιάζεται με το +3 παράγει -12.

Τρίτον, ότι το +4 όταν πολλαπλασιάζεται με το -3 παράγει -12.

Και τέλος, ότι το -4 όταν πολλαπλασιάζεται με το -3 παράγει +12. Αυτές οι περιπτώσεις γενικά εκφράζονται με συντομία ως εξής: πρώτον + επί + δίνει + · δεύτερον - επί + δίνει - · τρίτον + επί - δίνει - · τέταρτον - επί - δίνει +.

Περίπτωση πρώτη. Ότι το +4 όταν πολλαπλασιάζεται με το +3 παράγει +12, είναι αυτονόητο, και δεν χρειάζεται απόδειξη. Αν όμως ζητηθεί, θα μπορούσε να γίνει σύμφωνα με την πρώτη παράγραφο της τρίτης ενότητας· διότι ο πολλαπλασιασμός +4 επί +3 είναι το ίδιο με την πρόσθεση των $4 + 4 + 4$ σε ένα άθροισμα· αλλά όταν τα $4 + 4 + 4$ προστίθενται σε ένα άθροισμα δίνουν +12, επομένως όταν το +4 πολλαπλασιάζεται με το +3, δίνει +12.

Περίπτωση δεύτερη. Και από τη δεύτερη παράγραφο της τρίτης ενότητας θα μπορούσε με τον ίδιο τρόπο να αποδειχθεί, ότι το -4 όταν πολλαπλασιάζεται με το +3 παράγει -

12. Όμως θα το αποδείξω εδώ με άλλο τρόπο, ως εξής: πολλαπλασιάζω τους όρους της αριθμητικής προόδου 4, 0, -4 με το +3, και τα γινόμενα θα βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο, όπως αναφέρθηκε παραπάνω· αλλά τα δύο πρώτα γινόμενα είναι 12 και 0, επομένως το τρίτο θα είναι -12. Άρα το -4 όταν πολλαπλασιάζεται με το +3 παράγει -12.

Περίπτωση τρίτη. Να αποδειχθεί ότι το +4 όταν πολλαπλασιάζεται με το -3 παράγει -12. Πολλαπλασιάζω το +4 με τους +3, 0 και -3 διαδοχικά και τα γινόμενα θα βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο· αλλά τα δύο πρώτα είναι 12 και 0, επομένως το τρίτο θα είναι -12. Άρα +4 όταν πολλαπλασιάζεται με το -3 παράγει -12.

Περίπτωση τέταρτη. Τέλος, για να αποδειχθεί ότι το -4 όταν πολλαπλασιάζεται με το -3 παράγει +12, πολλαπλασιάζω το -4 με τους 3, 0 και -3 διαδοχικά και τα γινόμενα θα βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο· αλλά τα δύο πρώτα γινόμενα είναι -12 και 0, σύμφωνα με την δεύτερη περίπτωση. Επομένως το τρίτο γινόμενο θα είναι +12. Άρα το -4 όταν πολλαπλασιάζεται με το -3 παράγει +12.

Αυτές οι 4 περιπτώσεις μπορούν επίσης να αποδειχθούν πιο σύντομα ως εξής: το +4 όταν πολλαπλασιάζεται με το +3 παράγει +12· επομένως το -4 με το +3, ή το +4 με το -3 οφείλουν να παράγουν κάτι αντίθετο προς το +12, δηλαδή το -12. Αλλά όταν το -4 πολλαπλασιαζόμενο με το +3 παράγει -12, τότε το -4 πολλαπλασιαζόμενο με το -3 οφείλει να παράγει κάτι αντίθετο προς το -12, δηλαδή το +12· ώστε αυτή η τελευταία περίπτωση, που φοβίζει τόσο πολύ τους αρχάριους, εμφανίζεται να μη είναι τίποτε περισσότερο από μια κοινή αρχή της Γραμματικής, δηλαδή, ότι δυο αρνήσεις κάνουν μια κατάφαση· οποία αναμφίβολα αληθεύει στη Γραμματική, αν και ενδεχομένως δεν παρατηρείται πάντοτε στις γλώσσες.

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1η φάση: Οι μαθητές μελετούν το ιστορικό κείμενο, κάνουν συνοπτική περιγραφή και συγκρίνουν τους δύο τρόπους αιτιολόγησης του “κανόνα των προσήμων”. Στη συνέχεια εντοπίζουν μια άλλη αιτιολόγηση του κανόνα σε σύγχρονες πηγές (διδασκτικά βιβλία, εγκυκλοπαίδειες, διαδίκτυο) και κάνουν συνοπτική περιγραφή της.

2η φάση: Οι μαθητές παρουσιάζουν στην τάξη τα αποτελέσματα της εργασίας τους, ανταλλάσσουν ιδέες και καταλήγουν σε ορισμένα συμπεράσματα σχετικά με το νόημα της αιτιολόγησης των πράξεων των ακεραίων αριθμών.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Παρά το γεγονός ότι έχει ηλικία 270 ετών, η πρώτη αιτιολόγηση του “κανόνα των προσήμων” που υπάρχει στο ιστορικό κείμενο διαθέτει δύο πολύ σύγχρονα διδακτικά και μαθηματικά χαρακτηριστικά:

- α) Αξιοποιεί την έννοια του “μοτίβου” στη μορφή της αριθμητικής προόδου.
- β) Χρησιμοποιεί ως “αξίωμα” την ιδιότητα του συγκεκριμένου “μοτίβου” να παραμένει αναλλοίωτο στον πολλαπλασιασμό (μια σύμβαση που δεν διαφέρει ουσιωδώς από τη σύγχρονη αξιωματική παραδοχή ότι η επιμεριστική ιδιότητα ισχύει a priori και για τους αρνητικούς αριθμούς).

Η δραστηριότητα δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να εκτιμήσουν ορισμένα διαχρονικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας, όπως είναι η έννοια της απόδειξης, και να διαπιστώσουν ότι στην αποδεικτική διαδικασία παίζουν θεμελιώδη ρόλο ορισμένες παραδοχές στη μορφή περισσότερο ή λιγότερο φανερών αξιωμάτων.

Σχόλιο: Μεγάλο ενδιαφέρον ως θέμα συμπληρωματικής εργασίας παρουσιάζει επίσης η βιογραφία του συγγραφέα Nicholas Saunderson και ο τρόπος που διδάχθηκε Μαθηματικά (A.M.E.A. και Lucasian Professor of Mathematics στο Πανεπιστήμιο του Cambridge).

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 3 (Α' Γυμνασίου)

«Αιολική ενέργεια - Κατασκευάζουμε έναν ανεμόμυλο;»

Ο ανεμόμυλος είναι μια μηχανή που αξιοποιεί την αιολική ενέργεια. Αρχικά χρησιμοποιήθηκε για την άλεση δημητριακών και την άντληση νερού ενώ στη συνέχεια κατασκευάστηκαν οι ανεμογεννήτριες για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας.



Ο καθηγητής τεχνολογίας του σχολείου σας έχει αναθέσει να σχεδιάσετε ένα σχέδιο για να κατασκευάσετε στη συνέχεια ένα μοντέλο ανεμόμυλου του οποίου τα πτερύγια θα έχουν σχήμα παραλληλογράμμου. Σας πρότεινε να κατασκευάσετε το σχέδιο του ανεμόμυλου στο λογισμικό «Χελωνόκοσμος», ώστε να μπορείτε να τροποποιείτε το σχήμα και τον αριθμό των πτερυγίων. Οι επόμενες διερευνήσεις θα βοηθήσουν την ομάδα σας να κάνει αυτή την κατασκευή και παράλληλα να μελετήσει τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της χρήσης ανεμογεννητριών και τα πιθανά οφέλη μιας περιοχής από την ανάπτυξη της χρήσης της αιολικής ενέργειας. Αφού ερευνήσετε τη βιβλιογραφία και το κατάλληλο ενημερωτικό υλικό που θα σας υποδείξει ο υπεύθυνος καθηγητής, οργανώστε μια αντιπαράθεση απόψεων σχετικά με την εγκατάσταση ή μη ανεμογεννητριών στην περιοχή σας. Τεκμηριώστε με επιχειρήματα τις απόψεις σας και προσπαθείτε να φθάσετε σε μία κοινά αποδεκτή λύση.

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1^η φάση: Οι μαθητές κατασκευάζουν παραλληλόγραμμα χρησιμοποιώντας το δυναμικό χειρισμό μεταβλητών που αναπαριστούν τις γωνίες του. Στη συνέχεια κατασκευάζουν παραλληλόγραμμα με τρεις μεταβλητές.

2^η φάση: Οι μαθητές χρησιμοποιούν τα υπολογιστικά εργαλεία για να περιστρέψουν παραλληλόγραμμα και να κατασκευάσουν διαφορετικά μοντέλα ανεμόμυλων. Παράλληλα, στο πλαίσιο αυτό οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της στροφής ενός σχήματος και στην κεντρική συμμετρία.

3^η φάση: Οι μαθητές χωρισμένοι σε δύο ομάδες αντιπαράτίθενται σχετικά με την εγκατάσταση ανεμογεννητριών στην περιοχή τους και με επιχειρήματα τεκμηριώνουν και καταγράφουν τις απόψεις τους. Επιδίωξη είναι η εξεύρεση μίας κοινά αποδεκτής λύσης.

Για παράδειγμα, η πρώτη ομάδα υποστηρίζει την άποψη ότι η χρήση ανεμογεννητριών συμβάλλει στη μείωση της έντασης του φαινομένου του θερμοκηπίου, ως ανανεώσιμη πηγή παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, ενώ παράλληλα προσφέρει ευκαιρίες ανάπτυξης στην περιοχή. Η δεύτερη ομάδα υποστηρίζει ότι η χρήση ανεμογεννητριών έχει μειονεκτήματα, όπως επιπτώσεις στο τοπικό περιβάλλον, μικρή ισχύς, μείωση της αξίας της γης στην περιοχή.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα**Μαθηματικά**

Στην παραδοσιακή τάξη η διδασκαλία των παραλληλογράμμων γίνεται με στατικά μέσα αναπαράστασης κι έτσι οι μαθητές έχουν περιορισμένες δυνατότητες εμπλοκής τους σε διαδικασίες διερεύνησης των ιδιοτήτων τους. Στην παρούσα εργασία και με τη βοήθεια των εργαλείων του Χελωνόκοσμου οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:

- να συνδέσουν διαφορετικές έννοιες και αναπαραστάσεις (π.χ. να συνδέσουν την κατασκευή ενός γεωμετρικού σχήματος με την έννοια της μεταβλητής),
- να πειραματιστούν με τις αλλαγές στις τιμές των μεταβλητών των πλευρών ή/και των γωνιών σε παραμετρικές διαδικασίες κατασκευής τεθλασμένων πολυγωνικών γραμμών και να διερευνήσουν τις προϋποθέσεις κατασκευής παραλληλογράμμων και τις ιδιότητές τους,
- να χρησιμοποιήσουν τις παραμετρικές διαδικασίες ως δομικό λίθο για να μοντελοποιήσουν την κατασκευή αντικειμένων του πραγματικού κόσμου.

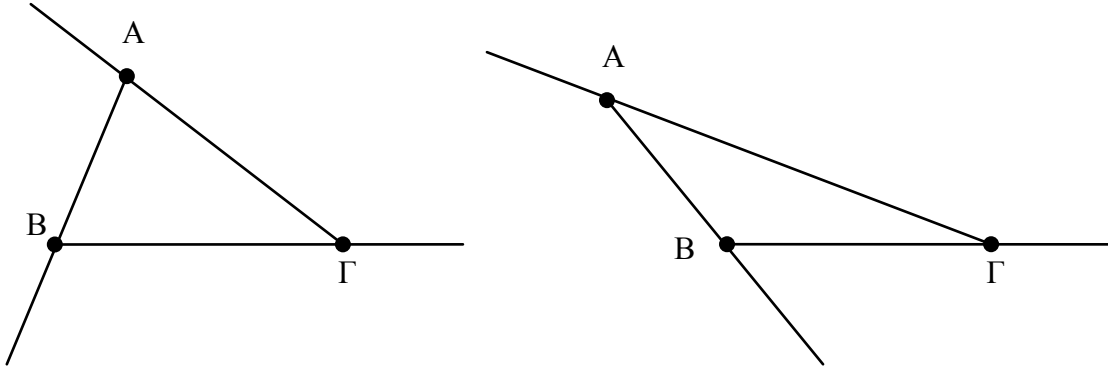
Περιβάλλον και Εκπαίδευση για την Αειφόρο Ανάπτυξη

Με την αντιπαράθεση απόψεων σχετικά με την εγκατάσταση ανεμογεννητριών σε μία περιοχή, για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας από ανανεώσιμες πηγές, οι μαθητές μπορούν:

- να διακρίνουν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της χρήσης ανεμογεννητριών στο τοπικό περιβάλλον και την αειφόρο ανάπτυξη μίας περιοχής,
- να αξιοποιήσουν και να ερμηνεύσουν βιβλιογραφικά δεδομένα και στοιχεία σχετικά με την παραγωγή ενέργειας από ανεμογεννήτριες,
- να διατυπώσουν επιχειρήματα και τεκμηριωμένες απόψεις.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 4 (Α' Γυμνασίου)
«Αιτιολόγηση (“αναζήτηση της αιτίας”) των γεωμετρικών προτάσεων στην αρχαία Ελλάδα»

Είναι κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου μεγαλύτερη από τις εσωτερικές γωνίες;
 Στα δύο παρακάτω σχήματα έχουμε σχεδιάσει ένα οξυγώνιο και ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και έχουμε σχηματίσει τις εξωτερικές γωνίες του.



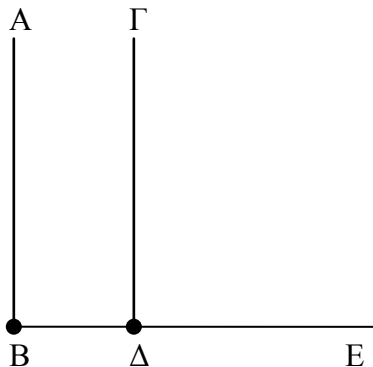
Κάποιος ισχυρίζεται ότι: Σε κάθε τρίγωνο, μια εξωτερική γωνία είναι πάντοτε μεγαλύτερη από όλες τις εσωτερικές γωνίες.

Ένας άλλος ισχυρίζεται ότι: Σε κάθε τρίγωνο, μια εξωτερική γωνία είναι πάντοτε μεγαλύτερη από δύο εσωτερικές γωνίες.

Να εξετάσετε αν αυτοί οι ισχυρισμοί είναι σωστοί. Αν δεν είναι, να τους συμπληρώσετε ή να τους τροποποιήσετε έτσι ώστε να είναι σωστοί.

Ένα απόσπασμα από το έργο του Πρόκλου
Σχόλια στο α' βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη

Σε κάθε τρίγωνο, αν προεκταθεί μια από τις πλευρές, η εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από οποιαδήποτε εσωτερική και απέναντι γωνία.



Θεωρούμε δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ τα οποία τέμνει μια ευθεία ΒΕ έτσι ώστε οι γωνίες ΑΒΔ και ΓΔΕ να είναι ίσες. Τότε τα τμήματα ΑΒ, ΓΔ είναι παράλληλα.

Αν το ΑΒ παραμένει ακίνητο και θεωρήσουμε ότι το ΓΔ στρέφεται προς το ΑΒ για να συναντηθούν, τότε η γωνία ΓΔΕ θα μεγαλώνει διότι όσο πλησιάζει το ΓΔ προς το ΑΒ, τόσο απομακρύνεται από το ΔΕ. Και αν παραμένει ακίνητο το ΓΔ και θεωρήσουμε ότι το ΑΒ στρέφεται προς το ΓΔ για να συναντηθούν, τότε η γωνία ΑΒΔ θα μικραίνει διότι το ΑΒ καθώς στρέφεται προς το ΓΔ στρέφεται και προς το ΒΔ. Και αν θεωρήσουμε ότι

στρέφονται και τα δύο, το ένα προς το άλλο, θα διαπιστώσουμε ότι το μεν ΑΒ πλησιάζοντας προς το ΒΔ μικραίνει τη γωνία, ενώ το ΓΔ καθώς στρέφεται προς το ΑΒ απομακρύνεται από το ΔΕ και έτσι μεγαλώνει τη γωνία ΓΔΕ.

Αναγκαστικά λοιπόν, αν συναντηθούν οι ΑΒ, ΓΔ και σχηματιστεί ένα τρίγωνο, η εξωτερική γωνία θα είναι μεγαλύτερη από την απέναντι εσωτερική. Διότι όταν η εσωτερική παραμένει η ίδια, η εξωτερική αυξάνεται και όταν η εξωτερική παραμένει η ίδια, η εσωτερική μειώνεται. Ή όταν και οι δυο μεταβάλλονται, η εσωτερική μειώνεται και η εξωτερική αυξάνεται. Αιτία αυτών των αλλαγών είναι η κίνηση των ευθυγράμμων τμημάτων, το μεν ένα πλησιάζοντας προς την πλευρά που σχηματίζει την εσωτερική γωνία, το δε άλλο απομακρυνόμενο από την πλευρά που σχηματίζει την εξωτερική γωνία. Από αυτό μπορείς να συμπεράνεις πώς οι κατασκευές των πραγμάτων φέρνουν μπροστά στα μάτια μας τις αληθινές αιτίες των ζητούμενων.

Ερωτήσεις

- 1) Το κείμενο αυτό ενισχύει ή όχι το συμπέρασμα στο οποίο καταλήξατε σχετικά με τις εξωτερικές γωνίες του τριγώνου;
- 2) Πώς συγκρίνετε τον τρόπο που χρησιμοποιήσατε για να καταλήξετε στο δικό σας συμπέρασμα με τον τρόπο αιτιολόγησης που χρησιμοποιεί ο συγγραφέας του κειμένου;

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1η φάση: Οι μαθητές διερευνούν τη γεωμετρική πρόταση και χρησιμοποιούν διάφορα μέσα (σχεδίαση, μετρήσεις, υπολογισμούς κ.λ.π.) για να διατυπώσουν την άποψή τους και να την υποστηρίξουν με επιχειρήματα. Στη συνέχεια μελετούν το ιστορικό κείμενο και απαντούν στα ερωτήματα που το συνοδεύουν.

2η φάση: Οι μαθητές παρουσιάζουν στην τάξη τα αποτελέσματα της εργασίας τους, συγκρίνουν διαφορετικούς τρόπους επαλήθευσης, ανταλλάσσουν ιδέες και καταλήγουν σε ορισμένα συμπεράσματα σχετικά με το νόημα και τα μέσα αιτιολόγησης των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

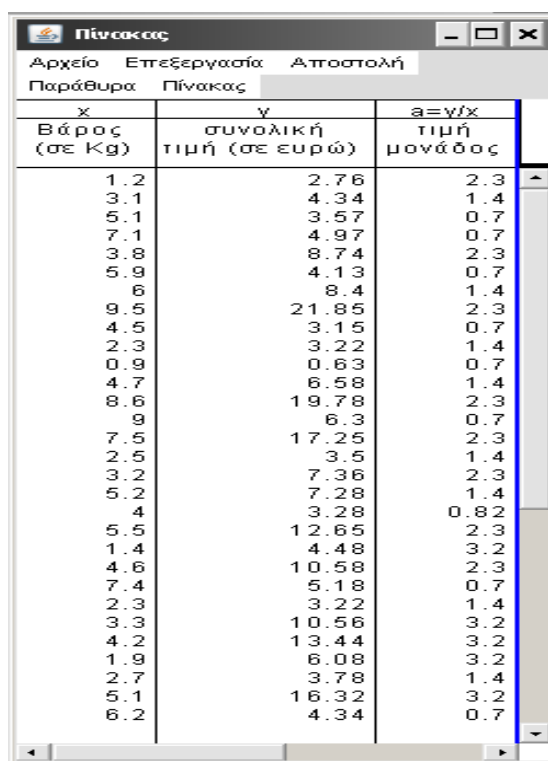
Το ιστορικό κείμενο δίνει ένα παράδειγμα της μεθόδου αιτιολόγησης που οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί ονόμαζαν “απόδειξη από αιτία” και τη διαχώριζαν από την Ευκλείδεια αποδεικτική μέθοδο που ονόμαζαν “απόδειξη από τεκμήριο”.

Η δραστηριότητα δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να γνωρίσουν μια πρωταρχική μέθοδο “αιτιολόγησης” που έχει τα χαρακτηριστικά του νοητικού πειράματος, να εκτιμήσουν τη σημασία της κίνησης των γεωμετρικών σχημάτων και να διαπιστώσουν ότι η επαλήθευση των ιδιοτήτων μπορεί να γίνει με διαδικασίες που δεν χρησιμοποιούν όργανα σχεδίασης ή μετρήσεων.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 5 (Β' Γυμνασίου)

«Αναζητώντας το λάθος του γραμμωτού κώδικα»

Ένας ελεγκτής πωλήσεων σε ένα πολυκατάστημα τροφίμων, δέχεται διαμαρτυρίες πελατών για υπερτιμολογήσεις προϊόντων που αγοράζουν από το τμήμα οπωροκηπευτικών. Εκεί τα προϊόντα συσκευάζονται, ζυγίζονται και τιμολογούνται με το σύστημα του γραμμωτού κώδικα (barcode) από μια συγκεκριμένη ζυγαριά. Ο υπάλληλος τοποθετεί την ετικέτα με το γραμμωτό κώδικα που εκτυπώνει η ζυγαριά και ακολούθως διαβάζεται από το σύστημα ανάγνωσης του ταμείου. Θέλει να ελέγξει αν η ζυγαριά δίνει λάθος τιμές. Έχει ενημερώσει τον πωλητή που ζυγίζει και τιμολογεί τα προϊόντα, να καταγράφει την ποσότητα x (σε κιλά) και δίπλα το ποσόν με το οποίο τιμολογήθηκε το προϊόν. Ο πωλητής παρέδωσε στον



Χ Βάρος (σε Kg)	Υ συνολική τιμή (σε ευρώ)	α=Υ/Χ τιμή μονάδος
1.2	2.76	2.3
3.1	4.34	1.4
5.1	3.57	0.7
7.1	4.97	0.7
3.8	8.74	2.3
5.9	4.13	0.7
6	8.4	1.4
9.5	21.85	2.3
4.5	3.15	0.7
2.3	3.22	1.4
0.9	0.63	0.7
4.7	6.58	1.4
8.6	19.78	2.3
9	6.3	0.7
7.5	17.25	2.3
2.5	3.5	1.4
3.2	7.36	2.3
5.2	7.28	1.4
4	3.28	0.82
5.5	12.65	2.3
1.4	4.48	3.2
4.6	10.58	2.3
7.4	5.18	0.7
2.3	3.22	1.4
3.3	10.56	3.2
4.2	13.44	3.2
1.9	6.08	3.2
2.7	3.78	1.4
5.1	16.32	3.2
6.2	4.34	0.7

ελεγκτή έναν πίνακα από τριάντα πωλήσεις που αφορούσαν 4 προϊόντα. Ο ελεγκτής, με βάση τον πίνακα αυτό, θα ελέγξει αν υπήρξαν λάθη τιμολόγησης σε κάποιο προϊόν. Στη δραστηριότητα αυτή, εκτός από το αποτέλεσμα, έχει σημασία και ο χρόνος υλοποίησης ο οποίος θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί με την βοήθεια των υπολογιστικών εργαλείων που διαθέτουν.

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

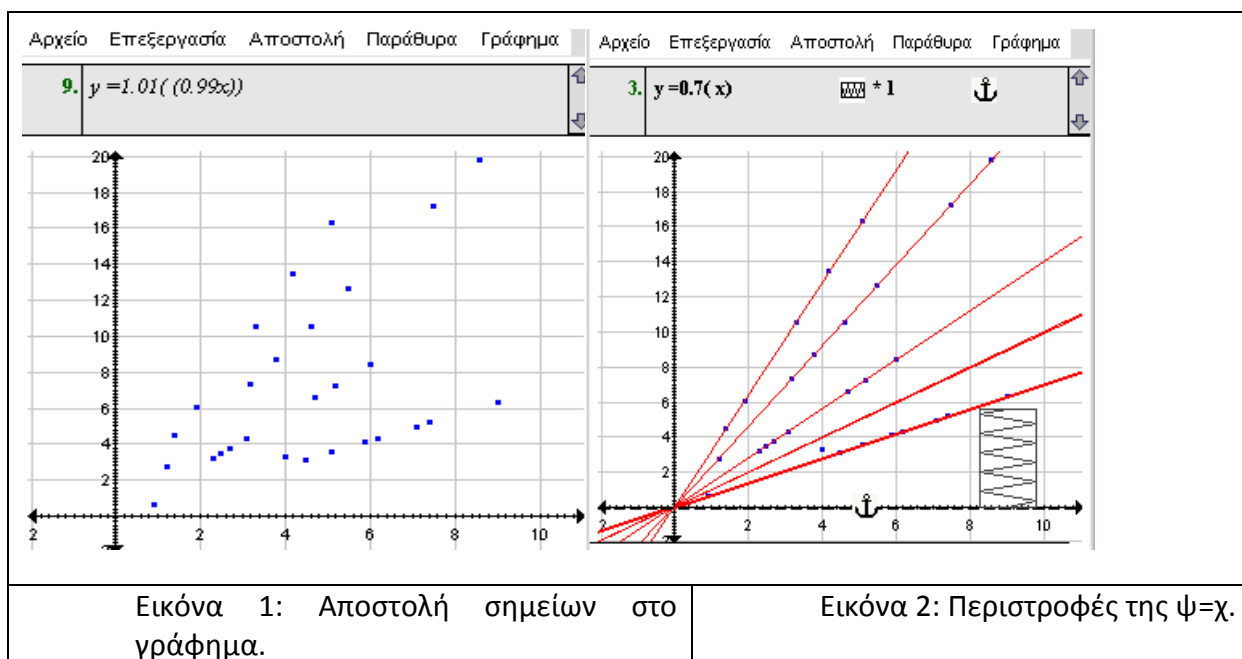
1η φάση

Οι μαθητές μέσα από τη διερεύνηση του παραπάνω προβλήματος θα απεικονίσουν σε πίνακα τιμών και σε σύστημα ημιαξόνων σχέσεις αναλογίας. Στη συνέχεια θα εμπλακούν με τη σύνδεση της συγκεκριμένης αναπαράστασης με τη γραφική παράσταση της $\psi = ax$, την κλίση της αντίστοιχης ευθείας και το συντελεστή αναλογίας.

Παραδείγματα δραστηριοτήτων

1) Στέλνουμε τα ζεύγη βάρους και τιμής στο γράφημα. Μπορούμε να χωρίσουμε τα σημεία σε ομάδες; Αν ναι, με ποιο κριτήριο;

2) Μπορούμε να εκφράσουμε με σχέσεις αναλογίας αυτές τις ομάδες σημείων; Θα βοηθήσει η κατασκευή της $\psi = x$ που μπορεί να περιστραφεί με το εργαλείο κατακόρυφου ελαστικού χειρισμού του Function Probe (FP). Υπάρχει κάποια σχέση αναλογίας; Αν ναι, να γραφεί ο τύπος της και να εξεταστεί αν εμφανίζεται ο συντελεστής αναλογίας σε στοιχεία του πίνακα τιμών; Αν ναι, τι ακριβώς εκφράζει;



3) Σε πόσες περιπτώσεις έγινε υπερτιμολόγηση και σε ποιο/α είδος/η; Ποιά/ες θα έπρεπε να είναι η/οι κανονική/ες τιμή; Γνωρίζουμε ότι οι τιμές ανά κιλό αυτών των προϊόντων είναι πολλαπλάσιες του δεκαλέπτου του ευρώ.

4) Η κάθε ομάδα επιλέγει μία από τις τέσσερις ευθείες. Προσαρμόζουμε το εργαλείο μεταβολής στη γραφική παράσταση της ευθείας. Δημιουργείται ένα τρίγωνο στο οποίο το λογισμικό μας δίνει την κλίση αυτής της ευθείας (ως πηλίκο της διαφοράς των τεταγμένων προς τη διαφορά των τεταγμένων). Με τι ισούται αυτό το πηλίκο; Παρουσιάζει η κάθε ομάδα τα συμπεράσματά της στην ολομέλεια της τάξης.

5) Ο ελεγκτής πωλήσεων αντικατέστησε την ελαττωματική ζυγαριά αλλά θέλει επιπλέον να φτιάξει έναν πίνακα για τον υπάλληλο που ζυγίζει τα προϊόντα, με σκοπό να ελέγχει για λίγες ημέρες μετά την αντικατάσταση, τις τιμές που εκτυπώνει η ζυγαριά. Ο πίνακας αυτός θα έχει στην πρώτη στήλη το βάρος των προϊόντων από 0 έως 10 Kg με βήμα 0,1 Kg και στις υπόλοιπες 4 στήλες θα έχει την αντίστοιχη τιμή του κάθε προϊόντος. Η κάθε ομάδα να κατασκευάσει την πρώτη στήλη του πίνακα και τη στήλη με τις τιμές για το προϊόν που ασχολήθηκε στην επόμενη ερώτηση. Πως μπορούμε να ελέγξουμε την ορθότητα του πίνακα από τη γραφική παράσταση;

2η φάση

Οι μαθητές θα εισαχθούν στην έννοια της γραμμικής συνάρτησης $\psi = \alpha\chi$ εκτός πλαισίου συγκεκριμένου προβλήματος και θα διερευνήσουν τη γραφική της παράσταση, την κλίση της και τη σχέση της με τα τεταρτημόρια στα οποία βρίσκεται η γραφική παράσταση. Ακολούθως, θα γίνει εισαγωγή στη συνάρτηση $\psi = \alpha\chi + \beta$ ως παράλληλη μεταφορά της $\psi = \alpha\chi$ μέσα από την επέκταση του αρχικού προβλήματος που δόθηκε στους μαθητές και θα μελετηθεί ο ρόλος των παραμέτρων α και β .

Παραδείγματα δραστηριοτήτων

- 1) Δύο ποσά χ και ψ είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας 2. Αν $\psi/\chi=2$, τότε $\psi = \underline{\hspace{2cm}}$. Αυτή η σχέση, είναι συνάρτηση του ψ ως προς χ ; Αν $\psi/\chi=\alpha$, τότε $\psi = \underline{\hspace{2cm}}$. Αυτή η σχέση, είναι συνάρτηση του ψ ως προς χ ; Τι συμβαίνει όταν $\alpha=0$;

2) Κάθε ομάδα δίνει 5 συναρτήσεις της μορφής $\psi = \alpha\chi$ στη ομάδα που έχει στα δεξιά της και παίρνει αντίστοιχα 5 συναρτήσεις από την ομάδα που έχει στα αριστερά της. Η κάθε ομάδα κατασκευάζει τις γραφικές παραστάσεις αυτών των συναρτήσεων. Υπάρχει κάποιο σημείο του καρτεσιανού επιπέδου από το οποίο διέρχεται η γραφική παράσταση της $\psi = \alpha\chi$ ανεξάρτητα από την τιμή του α ; Αιτιολογούμε την άποψή μας.

3) Τον αριθμό α στην $\psi = \alpha\chi$ τον ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης. Κατασκευάζουμε την ευθεία $\psi = \chi$ και με το εργαλείο κατακόρυφου ελαστικού χειρισμού, μεταβάλλουμε την ευθεία. Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης παίρνει διάφορες τιμές. Σε ποια τεταρτημόρια βρίσκεται η γραφική παράσταση όταν $\alpha > 0$ και σε ποιά όταν $\alpha < 0$;

4) Κάθε ομάδα δίνει 2 συναρτήσεις της μορφής $\psi = \alpha\chi$ στη ομάδα που έχει στα δεξιά της και παίρνει αντίστοιχα 2 συναρτήσεις από την ομάδα που έχει στα αριστερά της. Η μία θα πρέπει να έχει συντελεστή διεύθυνσης θετικό και η άλλη αρνητικό. Η κάθε ομάδα πρέπει να κατασκευάσει τις γραφικές παραστάσεις αυτών των συναρτήσεων. Πόσο μεταβάλλεται το ψ όταν το χ αυξάνεται κατά 1; Μπορούμε να δημιουργήσουμε 11 σημεία πάνω στη γραφική παράσταση της κάθε ευθείας που οι τετμημένες τους να διαφέρουν κατά 1 και στη συνέχεια αποστέλλοντας τις συντεταγμένες στον πίνακα τιμών να βρούμε τις διαφορές των τεταγμένων τους.

5) Παιχνίδι: Κάθε ομάδα τοποθετεί 5 σημεία στο γράφημα της ομάδας που βρίσκεται στα δεξιά της (κανένα σημείο δεν πρέπει να βρίσκεται πάνω στον άξονα $\psi' \psi$). Πρέπει η ομάδα να βρει για κάθε σημείο, μία συνάρτηση της μορφής $\psi = \alpha\chi$ η οποία να διέρχεται από αυτό το σημείο. Κερδίζει η ομάδα που βρίσκει πρώτη τις πέντε ευθείες.

6) Αν τοποθετήσουμε ένα σημείο που ανήκει στον άξονα $\psi' \psi$ (εκτός του σημείου $(0,0)$), ορίζεται συνάρτηση της μορφής $\psi = \alpha\chi$ που να διέρχεται από αυτό το σημείο; Αιτιολογούμε την άποψή μας.

7) Συνέχεια του αρχικού προβλήματος: «Στο πολυκατάστημα, το προϊόν με τιμή μονάδος 0,7 € υπάρχει δυνατότητα να συσκευαστεί με ειδικό τρόπο αν το επιθυμεί ο πελάτης, χρεώνοντας σε κάθε αγορά αυτού του προϊόντος και ανεξάρτητα από την ποσότητα αγοράς, 0,5 € επιπλέον».

α) Ο πωλητής που ζυγίζει, συσκευάζει και κοστολογεί το προϊόν χρειάζεται ένα πίνακα που σε μία στήλη να έχει όλα τα βάρη από 0 έως 10 κιλά (ανά 100 gr), στη διπλανή στήλη την τιμή του προϊόντος χωρίς την ειδική συσκευασία και στην τελευταία στήλη την τιμή μαζί με τη συσκευασία. Φτιάχνουμε ένα τέτοιο πίνακα.

β) Στέλνουμε και τις δύο περιπτώσεις βάρους-τιμής, στο γράφημα. Τι παρατηρούμε; Ποιοι είναι οι τύποι των δύο συναρτήσεων; Πληκτρολογούμε στο γράφημα τους τύπους των δύο συναρτήσεων ώστε να κατασκευαστεί η γραφική τους παράσταση. Διέρχεται η κάθε μία από την αντίστοιχη ομάδα σημείων;

γ) Κάθε ομάδα κατασκευάζει τη δική της γραφική παράσταση της μορφής $\psi = \alpha\chi$ σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα και στη συνέχεια μεταφέροντας αυτή τη γραφική παράσταση κατασκευάζει ευθείες της μορφής $\psi = \alpha\chi + \beta$. Σε ποιο σημείο τέμνει η κάθε μία των άξονα $\psi' \psi$;

Ομάδα	Κατασκευή	Κατασκευή μετά από μεταφορά
1η	$\psi=2\chi$	$\psi=2\chi+1$, $\psi=2\chi+4$, $\psi=2\chi-3$
2η	$\psi=0.5\chi$	$\psi=0.5\chi+2$, $\psi=0.5\chi+5$, $\psi=0.5\chi-4$
3η	$\psi=-3\chi$	$\psi=-3\chi+2$, $\psi=-3\chi+4$, $\psi=-3\chi-5$
4η	$\psi=1.5\chi$	$\psi=1.5\chi+3$, $\psi=1.5\chi+4$, $\psi=1.5\chi-2$
5η	$\psi=-2.7\chi$	$\psi=-2.7\chi+4$, $\psi=-2.7\chi+1$, $\psi=-2.7\chi-3$

Γενικεύουμε και καταγράφουμε τα συμπεράσματά μας για τη σχέση της γραφικής παράστασης της $\psi=\alpha\chi+\beta$ με τη γραφική παράσταση της $\psi=\alpha\chi$.

δ) Κάθε ομάδα δίνει 3 εξισώσεις ευθειών της μορφής $\psi=\alpha\chi+\beta$ με ακέραιους συντελεστές στην ομάδα που βρίσκεται στα δεξιά της και παίρνει αντίστοιχα 3 τέτοιες ευθείες από την ομάδα στα αριστερά της. Ο στόχος είναι να τοποθετηθούν στο γράφημα δύο σημεία της κάθε ευθείας γνωρίζοντας το ρόλο των παραμέτρων α και β στη γραφική παράσταση της ευθείας. Ο έλεγχος θα γίνει από την ομάδα που έθεσε τις εξισώσεις των ευθειών κάνοντας τις γραφικές παραστάσεις αυτών των ευθειών και ελέγχοντας αν πράγματι διέρχονται από αυτά τα σημεία.

Παραδείγματα εργασιών για το σπίτι

Ο κάθε μαθητής θα ανεβάσει τις απαντήσεις των παρακάτω εργασιών στα ψηφιακά εργαλεία επικοινωνίας του σχολείου.

1. Γράψε μία σύντομη έκθεση για το ρόλο του α στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi=\alpha\chi$.
2. Μια συνάρτηση της μορφής $\psi=\alpha\chi$ διέρχεται από το σημείο (2, -3,6). Να βρεις τη συνάρτηση $\psi=\alpha\chi$ που διέρχεται από αυτό το σημείο, με 3 τουλάχιστον διαφορετικούς τρόπους. Γράψε αναλυτικά τις σκέψεις σου.
3. Κατασκεύασε σε μιλιμετρέ χαρτί τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi=2\chi$ και της συμμετρικής της ως προς των άξονα $\chi'\chi$. Ποιος είναι ο τύπος της συμμετρικής της; Ποια είναι η συμμετρική της $\psi=\alpha\chi$ ως προς τον άξονα $\chi'\chi$;
4. Ο Δημήτρης και η Μαρία είναι μαθητές της Β' γυμνασίου και προσπαθούν να λύσουν το πρόβλημα που τους έβαλε ο καθηγητής τους: «Δίνονται τα σημεία Α(0,3) και Β(1,-2). Ποια ευθεία της μορφής $\psi=\alpha\chi+\beta$ διέρχεται από αυτά τα σημεία;». Ο Δημήτρης ξεκινάει να λύσει το πρόβλημα αντικαθιστώντας στον τύπο της συνάρτησης τις συντεταγμένες των σημείων. Σε ένα λεπτό όμως η Μαρία ισχυρίζεται ότι βρήκε τη λύση χρησιμοποιώντας το ρόλο των συντελεστών α και β . Ο Δημήτρης αμφισβητεί τον τρόπο της Μαρίας αλλά όταν τελειώνει διαπιστώνει ότι είχαν βρει την ίδια ευθεία. Ποια είναι αυτή η ευθεία και πως έλυσαν το πρόβλημα τα δύο παιδιά;

3η φάση

Οι μαθητές/-τριες εμπλέκονται σε δραστηριότητες γραφικής επίλυσης εξισώσεων και ανισώσεων της μορφής $ax+b >(=,>) γχ+δ$ μέσα από πραγματικά προβλήματα.

Παραδείγματα δραστηριοτήτων

Το κόστος δύο εταιριών (Α και Β) κινητής τηλεφωνίας είναι:

Α: πάγιο μηνιαίο κόστος 9 ευρώ και κόστος 0,1 ευρώ ανά λεπτό συνομιλίας,

Β: έχει πάγιο μηνιαίο κόστος 3 ευρώ και κόστος 0,2 ευρώ ανά λεπτό συνομιλίας.

1) Αν συμβολίσουμε με x τα μηνιαία λεπτά συνομιλίας και y τα χρήματα σε ευρώ που πρέπει να πληρώσουμε, γράφουμε για κάθε εταιρεία τη συνάρτηση των χρημάτων ως προς τα λεπτά συνομιλίας και κάνουμε τη γραφική παράσταση των δύο συναρτήσεων.

2) Τέμνονται οι δύο γραφικές παραστάσεις σε κάποιο σημείο; Αν ναι, πώς ερμηνεύουμε τις συντεταγμένες αυτού του σημείου στο πλαίσιο του προβλήματος;

3) Πόσα λεπτά συνομιλίας πρέπει να κάνει κάποιος μηνιαία, για να είναι συμφέρουσα η επιλογή της εταιρείας Α και πόσα για να είναι συμφέρουσα η επιλογή της εταιρείας Β;

Παραδείγματα εργασιών για το σπίτι

1. Κάθε ομάδα ανεβάζει ένα παρόμοιο πρόβλημα στα ψηφιακά εργαλεία επικοινωνίας του σχολείου με προσφορές από τρεις εταιρείες τηλεφωνίας και λύνει το πρόβλημα της περισσότερης συμφέρουσας προσφοράς με βάση τον αριθμό των μηνιαίων λεπτών συνομιλίας.

2. Κάθε ομάδα ανεβάζει στα ψηφιακά εργαλεία επικοινωνίας του σχολείου ένα πρόβλημα και θέτει ένα ερώτημα που η επίλυσή του μπορεί να βασιστεί σε ανισώσεις της μορφής $ax+b > γχ+δ$. Στη συνέχεια λύνει γραφικά και αλγεβρικά την ανίσωση. Η κάθε ομάδα ελέγχει τα προβλήματα των άλλων ομάδων και προτείνει τρόπους βελτίωσής τους.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Ως αφετηρία στην παρούσα συνθετική εργασία χρησιμοποιείται ένα πραγματικό πρόβλημα που προσφέρει το πλαίσιο για να νοηματοδοτηθεί από τους μαθητές η γραφική αναπαράσταση των αναλόγων ποσών. Έτσι, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα συνδέσουν την κλίση της ευθείας $ψ=ax$ με το συντελεστή αναλογίας στα ανάλογα ποσά, να μελετήσουν τη σχέση της κλίσης με τα τεταρτημόρια στα οποία βρίσκεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης και να νοηματοδοτήσουν την κλίση ως μεταβολή των τιμών του $ψ$ όταν το $χ$ αυξάνεται κατά 1.

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας η $ψ=ax+b$ προκύπτει μέσα από τον δυναμικό μετασχηματισμό της $ψ=ax$ ώστε να δοθούν στους μαθητές ευκαιρίες σύνδεσης των δύο συγκεκριμένων συναρτήσεων. Αυτή ακριβώς η δυνατότητα μετασχηματισμού της γραφικής παράστασης έχει μία ιδιαίτερη διδακτική αξία αφού στην συνήθη πρακτική ο μετασχηματισμός αυτός είναι η κατάληξη και όχι η αφετηρία της διερεύνησης μίας συνάρτησης. Τέλος, επιδιώκεται οι μαθητές να διερευνήσουν το ρόλο των $α$ και $β$ στις γραμμικές συναρτήσεις και να εμπλακούν στην γραφική επίλυση και ερμηνεία εξισώσεων και ανισώσεων της μορφής $ax+b >(=,>) γχ+δ$.

Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης στο FP είναι δυναμικά συνδεδεμένες και έτσι διευρύνονται οι ευκαιρίες των μαθητών να κατανοήσουν το ρόλο των

αναπαραστάσεων αυτών στον ορισμό της γραμμικής συνάρτησης αλλά και στο πλαίσιο της επίλυσης προβλήματος.

Οι κοινωνικοί στόχοι για τους μαθητές εντοπίζονται στη συνεργασία και τη συλλογική διαπραγμάτευση των ιδεών τους σε επίπεδο ομάδας, σε επίπεδο τάξης και στο επίπεδο της επικοινωνίας τους μέσω ψηφιακών εργαλείων συζητήσεων. Στα πλαίσια αυτά ο στόχος είναι να ενισχυθεί η κοινωνική αλληλεπίδραση μέσα από τη ενεργό εμπλοκή των μαθητών σε συνεργατικές και διαλογικές πρακτικές.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 6 (Β' Γυμνασίου)

«Αρνητικοί αριθμοί και εξισώσεις»

Αποσπάσματα από το λήμμα “Αρνητικοί” της *Encyclopédie* (1751–1765)
(συγγραφέας του λήμματος ο Jean d’Alembert)

Αρνητικές ποσότητες στην Άλγεβρα είναι εκείνες που επηρεάζονται από το σημείο – και οι οποίες θεωρούνται από πολλούς μαθηματικούς ως μικρότερες από το μηδέν. Αυτή όμως η τελευταία ιδέα δεν είναι ορθή, όπως θα δούμε παρακάτω ...

Οι ποσότητες που ονομάζονται αρνητικές, θεωρούμενες λαθεμένα ότι βρίσκονται κάτω από το μηδέν, παριστάνονται πολύ συχνά από πραγματικές ποσότητες

Ας υποθέσουμε π.χ. ότι αναζητούμε την τιμή ενός αριθμού x , ο οποίος όταν προστίθεται στο 100 μας δίνει 50. Σύμφωνα με τους κανόνες της Άλγεβρας, έχουμε $x + 100 = 50$, δηλαδή $x = -50$. Αυτό που διαπιστώνουμε είναι ότι η ποσότητα x ισούται με 50 και ότι αντί να προστίθεται στο 100 θα πρέπει να αφαιρείται. Πράγμα που σημαίνει ότι το πρόβλημα θα έπρεπε να είχε διατυπωθεί ως εξής: Να βρεθεί ένα μέγεθος x το οποίο, όταν αφαιρείται από το 100 να αφήνει υπόλοιπο 50. Αν το πρόβλημα είχε διατυπωθεί με αυτόν τον τρόπο, τότε θα είχαμε $100 - x = 50$ και $x = 50$ και η αρνητική μορφή του x δεν θα επιβίωνε πλέον. Έτσι λοιπόν οι αρνητικές ποσότητες υποδηλώνουν στην πραγματικότητα θετικές ποσότητες στους υπολογισμούς, οι οποίες όμως είχαν υποτεθεί σε λάθος θέση. ...

Έτσι λοιπόν, πραγματικά και ξεκάθαρα, δεν υπάρχουν καθόλου μεμονωμένες αρνητικές ποσότητες: το -3 θεωρούμενο αφηρημένα δεν έχει κανένα νόημα. Όταν όμως λέω ότι ένας άνθρωπος έδωσε σε κάποιον άλλο -3 écus, αυτό σημαίνει σε κατανοητή γλώσσα ότι του οφείλει 3 écus.

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1η φάση: Οι μαθητές μελετούν το ιστορικό κείμενο, περιγράφουν με συντομία τη θέση που υποστηρίζει ο συγγραφέας και διατυπώνουν τη δική τους άποψη. Στη συνέχεια εξετάζουν το παρακάτω πρόβλημα και απαντούν στα ερωτήματα που το συνοδεύουν.

Πρόβλημα: Χρειάζονται οι αρνητικοί αριθμοί στην επίλυση των εξισώσεων;

Ζητήματα όπως αυτά που θίγει ο Jean d’Alembert στο προηγούμενο απόσπασμα (και αρκετοί άλλοι με πολύ μεγαλύτερη ένταση) είχαν χωρίσει τους μαθηματικούς του 18ου αιώνα σε δύο στρατόπεδα, σε “οπαδούς” και “αντίπαλους” των αρνητικών. Οι “οπαδοί” υποστήριζαν ότι οι αρνητικοί είναι χρήσιμοι, παρά το γεγονός ότι δύσκολα μπορεί να αποδοθεί ένα πραγματικό νόημα στις πράξεις τους, ενώ “αντίπαλοι” θεωρούσαν ότι τα Μαθηματικά μπορούν να υπάρξουν και χωρίς τους αρνητικούς. Τη φύση της διαμάχης μπορούμε να την καταλάβουμε με το επόμενο παράδειγμα, στο οποίο ένας υποθετικός “αντίπαλος” και ένας υποθετικός “οπαδός” των αρνητικών επιλύουν με διαφορετικό τρόπο ο καθένας μια απλή εξίσωση :

“ΑΝΤΙΠΑΛΟΣ”	“ΟΠΑΔΟΣ”
Λύνω την εξίσωση $7x - 5 = 10x - 11$ χωρίς χρήση των αρνητικών αριθμών	Λύνω την εξίσωση $7x - 5 = 10x - 11$ με χρήση των αρνητικών αριθμών
$7x - 5 = 10x - 11$	$7x - 5 = 10x - 11$
$11 - 5 = 10x - 7x$	$7x - 10x = 5 - 11$
$6 = 3x$	$-3x = -6$

$$x = 6 : 3$$

$$x = 2$$

$$x = (-6) : (-3)$$

$$x = 2$$

Ερωτήσεις

- 1) Ποια είναι η βασική διαφορά στους δύο τρόπους επίλυσης;
- 2) Διακρίνετε πλεονεκτήματα ή μειονεκτήματα σε κάθε τρόπο;
- 3) Μπορείτε να χαρακτηρίσετε τον έναν τρόπο ταχύτερο ή πιο πρακτικό από τον άλλο;
- 4) Μπορείτε να εξηγήσετε έναν κανόνα των πράξεων των αρνητικών αριθμών με βάση τους δύο διαφορετικούς τρόπους επίλυσης της ίδιας εξίσωσης;

2η φάση: Οι μαθητές συζητούν στην τάξη τη θέση που υποστηρίζει ο συγγραφέας του ιστορικού κειμένου, παρουσιάζουν τη δική τους άποψη και τη συνδέουν με τις απαντήσεις που έδωσαν στο πρόβλημα.

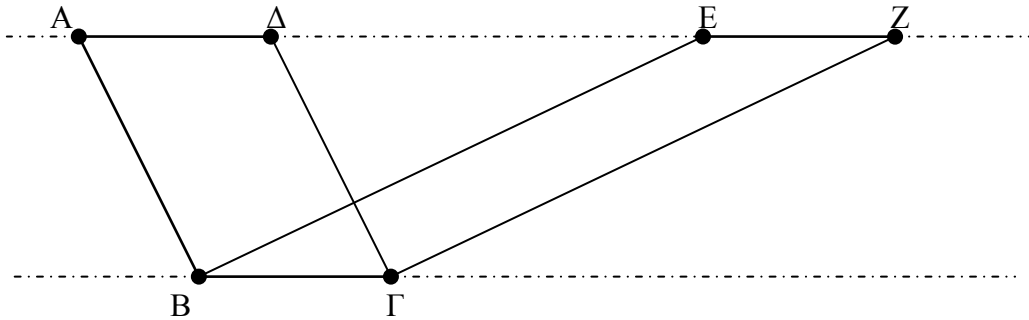
Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Η δραστηριότητα δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να εκτιμήσουν ότι η εισαγωγή των αρνητικών αριθμών έγινε για να εξυπηρετηθούν πρωταρχικά οι ανάγκες της μαθηματικής πρακτικής (π.χ. ευελιξία στην επίλυση των εξισώσεων) και όχι πραγματικές ανάγκες (π.χ. η μέτρηση της θερμοκρασίας). Αυτό το γεγονός μπορεί να συμβάλει στη θεραπεία της “τραυματικής” εμπειρίας που προκαλεί η πρώτη επαφή με τις πράξεις των αρνητικών αριθμών οι οποίες οδηγούν στην απώλεια του νοήματος των αριθμητικών πράξεων (π.χ. η πρόσθεση μπορεί να προκαλεί ελάττωση, η αφαίρεση αύξηση κ.λπ.).

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 7 (Β' Γυμνασίου) «"Παράδοξες" ιδιότητες των γεωμετρικών προτάσεων»

Ένα πρόβλημα για το εμβαδόν των παραλληλογράμμων

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΒΓΖ με την ίδια βάση ΒΓ και τις κορυφές τους πάνω σε δύο παράλληλες ευθείες.



Να εξετάσετε αν τα δύο παραλληλόγραμμα είναι ισοδύναμα, δηλαδή αν έχουν το ίδιο εμβαδόν και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ένα απόσπασμα από το έργο του Πρόκλου

Σχόλια στο α' βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη

Προκαλούσε πλήρη αμηχανία σε όλους εκείνους που αγνοούσαν την επιστήμη της Γεωμετρίας το γεγονός ότι τα παραλληλόγραμμα που έχουν την ίδια βάση και βρίσκονται ανάμεσα στις ίδιες παράλληλες, πρέπει να είναι ισοδύναμα μεταξύ τους. Διότι πώς είναι δυνατόν να παραμένει η ισότητα των εμβαδών, όταν τα μήκη των δύο άλλων πλευρών αυξάνονται επ' άπειρον; (αφού μπορούμε – προεκτείνοντας τις δύο παράλληλες – να αυξήσουμε όσο θέλουμε τα μήκη τους). Εύλογα θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς γιατί να παραμένει η ισότητα των εμβαδών όταν συμβαίνει αυτό. Διότι όταν το πλάτος είναι ίδιο (αφού η βάση είναι κοινή) και το μήκος μεγαλώνει, πώς γίνεται να μη μεγαλώνει και το εμβαδό; Αυτό το θεώρημα λοιπόν, και το αντίστοιχο για τα τρίγωνα, ανήκουν στα λεγόμενα “παράδοξα θεωρήματα” των Μαθηματικών....

Μένουν έκπληκτοι λοιπόν οι περισσότεροι όταν μαθαίνουν ότι ο πολλαπλασιασμός του μήκους των πλευρών δεν ανατρέπει την ισότητα των εμβαδών. Η αλήθεια είναι όμως ότι ο σημαντικότερος παράγοντας για την αύξηση ή ελάττωση του εμβαδού είναι η ισότητα ή ανισότητα των γωνιών. Διότι όσο πιο άνισες κάνουμε τις γωνίες, τόσο περισσότερο ελαττώνουμε το εμβαδό όταν διατηρούμε σταθερό το μήκος και το πλάτος· έτσι λοιπόν, για να διατηρήσουμε την ισότητα των εμβαδών, πρέπει να αυξήσουμε την πλευρά.

1) Θεωρείτε δικαιολογημένη την αμηχανία και την έκπληξη αυτών που αντιμετώπιζαν το συγκεκριμένο πρόβλημα;

2) Διαπιστώνετε ότι στο πρόβλημα αυτό εμφανίζεται κάποια αντίφαση ανάμεσα στην εποπτεία και τα αποτελέσματα των Μαθηματικών;

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1η φάση: Οι μαθητές διερευνούν τη γεωμετρικό πρόβλημα και χρησιμοποιούν διάφορα μέσα (μετρήσεις, υπολογισμούς, συλλογισμούς, κλπ) για να το λύσουν. Η δυνατότητα

χρήσης εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας από τους μαθητές για την κατασκευή και χειρισμό των σχημάτων του αρχαίου κειμένου αναμένεται να εμπλουτίσει τον πειραματισμό των μαθητών καθώς θα τους επιτρέψει να ενεργοποιήσουν τις νοερές κινήσεις (στροφή και μετατόπιση αντίστοιχα) που περιγράφονται στις κατασκευές των σχημάτων αυτών. Στη συνέχεια οι μαθητές μελετούν το ιστορικό κείμενο και απαντούν στα ερωτήματα που το συνοδεύουν.

2η φάση: Οι μαθητές παρουσιάζουν στην τάξη τα αποτελέσματα της εργασίας τους, ανταλλάσσουν ιδέες και καταλήγουν σε ορισμένα συμπεράσματα για τη σχέση ανάμεσα σε ένα συμπέρασμα που φαίνεται διαισθητικά προφανές και στο συμπέρασμα που προκύπτει ως αποτέλεσμα της αιτιολόγησης των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Το ιστορικό κείμενο δίνει ένα παράδειγμα των γεωμετρικών προτάσεων που οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί αποκαλούσαν “παράδοξα θεωρήματα” επειδή το συμπέρασμά τους έρχεται σε άμεση αντίθεση με αυτό που υποδεικνύει η διαίσθηση και η κοινή λογική.

Η δραστηριότητα δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να έλθουν σε επαφή με ένα παράδειγμα της διάστασης που υφίσταται πολύ συχνά ανάμεσα σε μια μαθηματική πρόταση και τη διαισθητική προφάνεια, και να εκτιμήσουν έτσι την εγκυρότητα που παρέχει το αποτέλεσμα της μαθηματικής απόδειξης.

Η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας αναμένεται να ενισχύσει την εισαγωγή των μαθητών στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς οι οποίοι αποτελούν βασική καινοτομία στο νέο ΑΠΣ Γεωμετρίας του Γυμνασίου.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 8 (Β' Γυμνασίου)
«Παγκόσμιο χωριό - Οι άνθρωποι και οι κοινωνίες πίσω από τους
αριθμούς»

Ο καθηγητής μαθηματικών του σχολείου, σας έχει αναθέσει να σχεδιάσετε και να εκτελέσετε μια μικρή στατιστική έρευνα που να αφορά «τυπικά» χαρακτηριστικά ανάμεσα σε μαθητές όλου του κόσμου. Μία πολύ πλούσια πηγή για να συλλέξετε δεδομένα είναι το διαδίκτυο. Σας πρότεινε να συλλέξετε δεδομένα από το διεθνές έργο «απογραφή στο σχολείο» (Census At School International) με σκοπό να τα επεξεργαστείτε και να ανακαλύψετε ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα σε σας και σε μαθητές άλλων χωρών και παράλληλα να συντάξετε στο τέλος μία μικρή αναφορά για ενδιαφέροντα στοιχεία που βρήκατε μέσα από αυτή την έρευνα. Οι επόμενες διερευνήσεις θα βοηθήσουν την ομάδα σας να πραγματοποιήσει αυτή την έρευνα και παράλληλα να μελετήσει θέματα ή φαινόμενα που αφορούν την σχολική ζωή ή θέματα που αφορούν το περιβάλλον ή θέματα που αφορούν την παγκόσμια κοινότητα.

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1^η φάση: Οι μαθητές με την βοήθεια των καθηγητών της τεχνολογίας και των ξένων γλωσσών, συλλέγουν δεδομένα από τον διαδικτυακό ιστότοπο <http://www.censusatschool.com/en/links> για κάποιες από τις χώρες που συμμετέχουν. Για να είναι δυνατή η σύγκριση ανάμεσα στις διαφορετικές χώρες υπάρχουν κοινές ερωτήσεις ενώ παράλληλα η κάθε χώρα έχει και «εθνικές» ερωτήσεις, που εξετάζουν διάφορα θέματα σχετικά με τους μαθητές της χώρας.

Για παράδειγμα, συλλέγουν δεδομένα σε ένα υπολογιστικό περιβάλλον λογιστικών φύλλων, για τις διάφορες χώρες με σκοπό να τα επεξεργαστούν, καθώς και τα σχετικά ερωτηματολόγια όπως το παρακάτω, που προέρχεται από την Νότια Αφρική:

CensusAtSchool Form		Grades 8 - 12																																																														
Learner number:																																																																
ABOUT YOU 1. Are you a ☐ 1 Male? ☐ 2 Female? 2. What is your date of birth? (day month year) 3. What grade are you in at school? Grade e.g. Grade 10 4. Where were you born? <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>Eastern Cape</td></tr> <tr><td>2</td><td>Free State</td></tr> <tr><td>3</td><td>Gauteng</td></tr> <tr><td>4</td><td>Kwazulu-Natal</td></tr> <tr><td>5</td><td>Mpumalanga</td></tr> <tr><td>6</td><td>Northern Cape</td></tr> <tr><td>7</td><td>Northern Province</td></tr> <tr><td>8</td><td>North West</td></tr> <tr><td>9</td><td>Western Cape</td></tr> <tr><td>10</td><td>Outside South Africa</td></tr> </table> 5. How tall are you? Answer to the nearest centimetre. centimetres 6. What is the length of your right foot? Answer to the nearest centimetre. centimetres 7. What sport that you have played this year is your favourite sport? Use the sport coding list to code your answer or put 0 if you do not have a favourite sport. Sport code: 8. What sport would you like to participate in? Use the sport coding list to code your answer or put 0 if there is no sport you would like to participate in. Sport code:	1	Eastern Cape	2	Free State	3	Gauteng	4	Kwazulu-Natal	5	Mpumalanga	6	Northern Cape	7	Northern Province	8	North West	9	Western Cape	10	Outside South Africa	ABOUT YOUR HOUSEHOLD 9. Tick the box if you have: ☐ Running water inside your house ☐ A radio at home ☐ A TV at home ☐ A telephone at home ☐ Access to a computer at home ☐ Access to the Internet at home ☐ Access to a library ☐ Cellular Phone of your own 10. Do you live in a ☐ 1 House on separate yard/stand ☐ 2 Traditional House ☐ 3 Flat ☐ 4 Town/cluster house ☐ 5 Retirement village ☐ 6 Room in back yard ☐ 7 Shack/Zozo back in yard/stand ☐ 8 Room in squatter settlement ☐ 9 Tent/Caravan ☐ 10 Other (specify) 11. How many people live in your household? (include yourself) people 12. How many people still at school (Grade 1-12) live in your household? (include yourself) Males Females	SCHOOL 13. What is your favourite subject/learning area at school? Enter the code letter(s) in the box in order of your preference. 1st 2nd 3rd The codes are: <table style="width: 100%;"> <tr><td>1 LLC</td><td>2 NS</td></tr> <tr><td>3 T</td><td>4 HSS</td></tr> <tr><td>5 EMS</td><td>6 AC</td></tr> <tr><td>7 LO</td><td>8 MLMMS</td></tr> <tr><td>9 Maths</td><td>10 History</td></tr> <tr><td>11 Geography</td><td>12 Science</td></tr> <tr><td>13 Biology</td><td>14 Guidance</td></tr> <tr><td>15 Accountancy</td><td></td></tr> <tr><td>16 Industrial Arts</td><td></td></tr> <tr><td>17 Home Economics</td><td></td></tr> <tr><td>18 Languages</td><td></td></tr> <tr><td>19 Other Subjects (specify)</td><td></td></tr> </table> 14. How do you usually travel to school? ☐ The codes are: <table style="width: 100%;"> <tr><td>1 Walk</td><td>2 Bus</td></tr> <tr><td>3 Car</td><td>4 Bicycle</td></tr> <tr><td>5 Train</td><td>6 Taxi</td></tr> <tr><td>7 Motorcycle / scooter</td><td></td></tr> <tr><td>8 Other</td><td></td></tr> </table> 15. How long does it usually take you to travel to school? minutes 16. What distance do you travel from home to school in km? <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>Less than 1km</td></tr> <tr><td>2</td><td>1 to 5 km</td></tr> <tr><td>3</td><td>6 to 10km</td></tr> <tr><td>4</td><td>11km or over</td></tr> </table>	1 LLC	2 NS	3 T	4 HSS	5 EMS	6 AC	7 LO	8 MLMMS	9 Maths	10 History	11 Geography	12 Science	13 Biology	14 Guidance	15 Accountancy		16 Industrial Arts		17 Home Economics		18 Languages		19 Other Subjects (specify)		1 Walk	2 Bus	3 Car	4 Bicycle	5 Train	6 Taxi	7 Motorcycle / scooter		8 Other		1	Less than 1km	2	1 to 5 km	3	6 to 10km	4	11km or over
1	Eastern Cape																																																															
2	Free State																																																															
3	Gauteng																																																															
4	Kwazulu-Natal																																																															
5	Mpumalanga																																																															
6	Northern Cape																																																															
7	Northern Province																																																															
8	North West																																																															
9	Western Cape																																																															
10	Outside South Africa																																																															
1 LLC	2 NS																																																															
3 T	4 HSS																																																															
5 EMS	6 AC																																																															
7 LO	8 MLMMS																																																															
9 Maths	10 History																																																															
11 Geography	12 Science																																																															
13 Biology	14 Guidance																																																															
15 Accountancy																																																																
16 Industrial Arts																																																																
17 Home Economics																																																																
18 Languages																																																																
19 Other Subjects (specify)																																																																
1 Walk	2 Bus																																																															
3 Car	4 Bicycle																																																															
5 Train	6 Taxi																																																															
7 Motorcycle / scooter																																																																
8 Other																																																																
1	Less than 1km																																																															
2	1 to 5 km																																																															
3	6 to 10km																																																															
4	11km or over																																																															

Οι μαθητές επεξεργάζονται τα δεδομένα για κάποιες από τις κοινές ερωτήσεις που υπάρχουν, όπως για παράδειγμα ερωτήσεις που αφορούν αθλητικές δραστηριότητες (θα χρειαστεί και το αρχείο της κωδικοποίησης των αθλημάτων) ή αγαπημένα μαθήματα.

2^η φάση: Με αφορμή τις μη κοινές ερωτήσεις ανάμεσα στις διαφορετικές χώρες, οι μαθητές αναζητούν περισσότερες πληροφορίες για θέματα που μπορεί να τους έκαναν εντύπωση.

Για παράδειγμα, με αφορμή το ερωτηματολόγιο της Νότιας Αφρικής, οι μαθητές αναζητούν πληροφορίες για τις συνθήκες διαβίωσης των μαθητών (π.χ. ύπαρξη ή όχι τρεχούμενου νερού) και τις επιπτώσεις αυτού στην καθημερινή ζωή ή του στοιχειώδους εξοπλισμού των σχολείων της Νότιας Αφρικής και τις επιπτώσεις αυτού στις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών (π.χ. χωρίς ηλεκτρικό ρεύμα στο σχολείο δεν υπάρχει η δυνατότητα αναζήτησης πηγών πληροφορίας από το διαδίκτυο) ή με αφορμή την ερώτηση από το ερωτηματολόγιο του Καναδά σχετικά με την ενδοσχολική βία μελετούν και συζητούν για το φαινόμενο αυτό.

3^η φάση: Με την βοήθεια εκπαιδευτικών διαφόρων ειδικοτήτων, μελετούν βαθύτερα κάποια θέματα και την σημασία τους για τον άνθρωπο, το περιβάλλον ή την ανθρωπότητα.

Για παράδειγμα μελετούν το θέμα των υδάτινων πόρων, τη σημασία τους στην καθημερινή ζωή, το θέμα της αλόγιστης και άσκοπης χρήσης τους και την σημασία τους σε παγκόσμιο επίπεδο ως πιθανή αιτία συγκρούσεων ή μελετούν την σημασία και την αξία κοινής γλώσσας συνεννόησης των ανθρώπων (διεθνείς γλώσσες, μαθηματικά) και της κατανόησης τους για την επεξεργασία πληροφοριών.

4^η φάση: Συντάσσουν μία μικρή αναφορά για τα θέματα που τους έκαναν εντύπωση σχετικά με προβλήματα ή δυσκολίες που αντιμετωπίζουν ή τις δυνατότητες που έχουν οι μαθητές, σε θέματα καθημερινής επιβίωσης, εκπαίδευσης ή υγείας σε διαφορετικές χώρες και παρουσιάζουν τα αποτελέσματα των ερευνών τους.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Τα σχολικά μαθήματα είναι απομονωμένα το ένα από το άλλο, με αποτέλεσμα η γνώση που προσφέρεται σε κάποιο απ' αυτά να μην συνδέεται με την γνώση που προσφέρεται από κάποιο άλλο. Η δε γνώση, αυτή καθ' αυτή, δεν έχει όλη την αξία και τη σημασία που της αρμόζει για την μελλοντική εξέλιξη των μαθητών σε αυριανούς πολίτες και την διαμόρφωσή τους ως προσωπικότητες, μια και συνδέεται συχνά μόνον με την μελλοντική χρήση της σε κάποιο επάγγελμα. Με αφορμή όλη την έρευνα ίσως βοηθήσουμε τους μαθητές μας να γίνουν πιο συνειδητά άτομα και πολίτες αυτού του κόσμου, που θα αναγνωρίζουν και θα σέβονται τις δυνατότητες που έχουν στην παρούσα φάση της ζωής τους, θα είναι σε θέση να ερμηνεύουν τον κόσμο και το περιβάλλον τους, θα αναγνωρίζουν τις τεράστιες δυνατότητες της ανθρωπότητας και θα ερμηνεύουν τις αδυναμίες της.

Προκειμένου να διδαχτούν κάποιες έννοιες της στατιστικής στο σχολείο συχνά χρησιμοποιούνται έτοιμα προκατασκευασμένα δεδομένα, που μπορεί να μην είναι πραγματικά. Έτσι χάνεται η ευκαιρία οι μαθητές να έχουν ένα πραγματικό πλαίσιο αναφοράς με βάση το οποίο θα συνδέσουν τις διαφορετικές έννοιες και διαδικασίες της στατιστικής.

Στην παρούσα εργασία οι μαθητές θα εμπλακούν ενεργά στην έρευνα και θα χρησιμοποιήσουν την στατιστική ως ένα εργαλείο ανάλυσης δεδομένων και εξαγωγής συμπερασμάτων. Θα πρέπει να συλλέξουν δεδομένα, να τα αναπαραστήσουν κατάλληλα, να ερμηνεύσουν πίνακες και στατιστικά διαγράμματα και να τα αναλύσουν με σκοπό να καταλήξουν σε συμπεράσματα που να είναι τεκμηριωμένα με βάση τα δεδομένα και τις μεθόδους που χρησιμοποίησαν.

Ταυτόχρονα, θα διαπιστώσουν τη σημασία που έχουν τα μαθηματικά (και όχι μόνο) ως κοινή γλώσσα της ανθρωπότητας, ως ένα μέσο για την κατανόηση του κόσμου ενώ θα αναγνωρίσουν της προσφορά τους σε τομείς της κοινωνικής ζωής. Η διαπίστωση των δυνατοτήτων που προσφέρουν τα μαθηματικά στον άνθρωπο για να μελετήσει, να περιγράψει και να κατανοήσει τον κόσμο που τον περιβάλλει αναμένεται να ενισχύσει θετικές στάσεις των μαθητών/τριών απέναντι στα μαθηματικά.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 9 (Γ' Γυμνασίου) «Μελετώντας την κάτοψη ενός σπιτιού»

Ο κ. Αναγνώστου διαθέτει ένα οικόπεδο 360m^2 σε ένα οικισμό κάτω των 2000 κατοίκων. Το μέγιστο ποσοστό κάλυψης του οικοπέδου σ' αυτήν την περιοχή είναι 70% (δηλαδή θα πρέπει να μένει ακάλυπτο τουλάχιστον το 30% του οικοπέδου) και ο συντελεστής δόμησης για τα πρώτα 100m^2 του οικοπέδου είναι 1,6, για τα επόμενα 100m^2 είναι 0,8, για τα επόμενα 100m^2 είναι 0,6 και πέραν των 300m^2 είναι 0,4. Στην επόμενη εικόνα εμφανίζεται το σχέδιο ενός πολιτικού μηχανικού στον οποίο απευθύνθηκε ο κ. Αναγνώστου για την ανέγερση μιας κατοικίας. Το σχέδιο έγινε με βάση τους περιορισμούς του οικιστικού νόμου. (Συντελεστής Δόμησης είναι ο αριθμός ο οποίος πολλαπλασιάζεται με την επιφάνεια του οικοπέδου και δίνει την συνολική επιφάνεια όλων των κτιρίων, σε όλους τους ορόφους που θα ανεγερθούν στο οικόπεδο. Για παράδειγμα, σ' αυτήν την περιοχή για ένα οικόπεδο 320m^2 μπορεί κάποιος να κτίσει 160m^2 για τα πρώτα 100m^2 , 80m^2 για τα επόμενα 100m^2 , 60m^2 για τα επόμενα 100m^2 και 8m^2 για τα υπόλοιπα 20m^2 . Συνολικά δηλαδή 328m^2 σε όλους τους ορόφους).



Εικόνα 1. Το προτεινόμενο σχέδιο από τον πολιτικό μηχανικό.

Πριν αποφασίσει σχετικά με το τελικό σχέδιο ο κ. Αναγνώστου θέλει να δοκιμάσει και δύο άλλες ιδέες. Η πρώτη ιδέα είναι να μεγαλώσει το παραπάνω σχέδιο, διατηρώντας όμως τις αναλογίες του, ώστε να εκμεταλλευτεί τη μέγιστη επιφάνεια κάλυψης του οικοπέδου. Η δεύτερη ιδέα είναι να κτίσει και άλλον όροφο, ακριβώς όπως το ισόγειο και να αξιοποιήσει το μέγιστο εμβαδόν που δικαιούται να κτίσει σύμφωνα με τους συντελεστές δόμησης του οικιστικού νόμου. Το κόστος της οικοδομής, σύμφωνα με την ποιότητα των υλικών που επέλεξε ο κ. Αναγνώστου, καθορίζεται από την περίμετρο και από το εμβαδόν της κατασκευής. Το κόστος είναι 2000€ για κάθε μέτρο της περιμέτρου του ισογείου, και 1100€ για κάθε μέτρο της περιμέτρου του 1ου ορόφου (η διαφορά του ισογείου οφείλεται στο κόστος των θεμελίων της οικοδομής). Σ' αυτό το κόστος προστίθενται και 850€ για κάθε m^2 . Πόσο θα κοστίσει σε κάθε περίπτωση το κάθε

τετραγωνικό μέτρο που θα κτίσει ο κ. Αναγνώστου και ποια είναι η περισσότερο συμφέρουσα λύση ως προς το κόστος ανά τ.μ.;

Οι επόμενες διερευνήσεις θα μας βοηθήσουν να υπολογίσουμε τις διαστάσεις του σπιτιού σ' αυτές τις δύο περιπτώσεις και να βρούμε την οικονομικότερη λύση ανά m^2 για τον κ. Αναγνώστου.

Σημείωση: Η νομοθεσία που αναφέρεται στο πρόβλημα είναι πραγματική.

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1η φάση: Οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της ομοιοθεσίας με το ομοιόθετο ενός σημείου και ενός τμήματος και διαπιστώνουν ότι τα ομοιόθετα τμήματα έχουν τον ίδιο λόγο με τον λόγο ομοιοθεσίας και είναι παράλληλα. Επίσης, διαπραγματεύονται τον λόγο των περιμέτρων και των εμβαδών ομοιόθετων γεωμετρικών σχημάτων.

2η φάση: Οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της ομοιότητας ως ένα σύνολο μετασχηματισμών δύο σχημάτων. Στη συνέχεια αναγνωρίζουν όμοια σχήματα από τις γωνίες και το λόγο των πλευρών τους.

3η φάση: Οι μαθητές απαντούν σε ερωτήσεις που αφορούν το αρχικό πρόβλημα του μετασχηματισμού της κάτοψης ενός σπιτιού. Διερευνούν το εμβαδόν του σχεδίου σε σχέση με το λόγο ομοιότητας. Διερευνούν το πρόβλημα κόστους της οικοδομής σε σχέση με την περίμετρο και το εμβαδόν της.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Στην παραδοσιακή τάξη η διδασκαλία των εννοιών της ομοιοθεσίας και της ομοιότητας των γεωμετρικών σχημάτων γίνεται με στατικά μέσα αναπαράστασης και δύσκολα συνδέεται με την μοντελοποίηση πραγματικών προβλημάτων και την μελέτη τους με βάση τις συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες. Στο πλαίσιο αυτό οι μαθητές έχουν περιορισμένες δυνατότητες εμπλοκής τους σε διαδικασίες κατασκευής ομοιόθετων και όμοιων γεωμετρικών σχημάτων και διερεύνησης των ιδιοτήτων τους. Στην παρούσα εργασία και με τη βοήθεια του Geogebra οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:

- να πειραματιστούν με την κατασκευή ομοιόθετων γεωμετρικών σχημάτων,
- να συνδέσουν τις έννοιες ομοιότητας και ομοιοθεσίας και να διερευνήσουν τον 'μηχανισμό' κατασκευής όμοιων γεωμετρικών σχημάτων μέσω της ομοιοθεσίας και άλλων διαδοχικών μετασχηματισμών,
- να διερευνήσουν τις ιδιότητες των όμοιων γεωμετρικών σχημάτων και να διαπραγματευτούν τη σχέση του λόγου των περιμέτρων και του λόγου των εμβαδών ομοιόθετων γεωμετρικών σχημάτων με το λόγο ομοιότητας,
- να συνδέσουν την επίλυση πραγματικών προβλημάτων με τις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού όμοιων γεωμετρικών σχημάτων,
- να αναγνωρίσουν την αξία των μετασχηματισμών στην επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 10 (Γ' Γυμνασίου)

«Ανακαλύπτοντας τη χρυσή αναλογία»

Τι κοινό μπορεί να έχουν ο Παρθενώνας, ένας κοχλίας, οι αναλογίες του ανθρώπινου σώματος, ο τρόπος με τον οποίο φυτρώνουν τα φύλλα στα κλαδιά και η Μόνα Λίζα του Λεονάρντο ντα Βίντσι; Η απάντηση κρύβεται στον μαγικό αριθμό ϕ , που συμβολίζεται έτσι διεθνώς από το πρώτο γράμμα του ονόματος του γλύπτη Φειδία. Αν χωρίσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δύο μέρη, έτσι ώστε ο λόγος του με το μεγαλύτερο μέρος, να είναι ίσος με το λόγο του μεγαλύτερου προς το μικρότερο μέρος, τότε αυτός ο λόγος που σχηματίζεται ισούται με ϕ . Ο λόγος ϕ εμφανίζεται στο σύμπαν, στη φύση και στα ανθρώπινα δημιουργήματα. Από την αρχαιότητα είχε παρατηρηθεί ότι δημιουργεί την αίσθηση του ωραίου και γι' αυτό χρησιμοποιήθηκε στην Αρχιτεκτονική, στην Γλυπτική, στη Ζωγραφική. Οι επόμενες διερευνήσεις θα σας βοηθήσουν να ανακαλύψετε περισσότερα για τον αριθμό ϕ και την εμφάνισή του στη φύση και στα ανθρώπινα δημιουργήματα.



Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1^η φάση: Οι μαθητές εισάγονται στο μαθηματικό πρόβλημα της χρυσής τομής. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιήσει και ψηφιακό περιβάλλον για τον υπολογισμό του ϕ (π.χ. στο Geogebra). Σε ένα τμήμα a με μεταβαλλόμενο μήκος έχει τοποθετηθεί ένα σημείο σε απόσταση x από το ένα άκρο. Μεταβάλλοντας το μήκος του x οι μαθητές παρατηρούν τη μεταβολή των λόγων a/x και $x/(a-x)$. Καλούνται να εντοπίσουν πότε οι λόγοι γίνονται ίσοι, να υπολογίσουν τον αριθμό ϕ και να συμπεράνουν μετά από πειραματισμό ότι είναι ανεξάρτητος από το μήκος του τμήματος a . Στη συνέχεια σχηματίζουν την εξίσωση $\phi^2 = \phi + 1$ και συνδέουν τον αριθμό ϕ με την τομή των συναρτήσεων $\psi = x^2$ και $\psi = x + 1$.

2^η φάση: Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες και η κάθε ομάδα αναλαμβάνει τις δικές της διερευνήσεις. Οι ομάδες έχουν τη δυνατότητα να συλλέξουν πληροφορίες και να συγκεντρώσουν υλικό (π.χ. εικόνες, φωτογραφίες) σχετικά με τη εμφάνιση του ϕ στη φύση και στα ανθρώπινα δημιουργήματα. Μπορεί μάλιστα ο χωρισμός των ομάδων να γίνει θεματικά όπως παρακάτω:

Ομάδα Μαθηματικών: Δίνεται στους μαθητές το πρόβλημα της ακολουθίας του Fibonacci, βρίσκουν ένα μεγάλο πλήθος όρων αυτής της ακολουθίας, υπολογίζουν το λόγο των διαδοχικών όρων, υπολογίζουν τη διαφορά των λόγων από τον αριθμό ϕ και διαπιστώνουν ότι ο λόγος αυτός πλησιάζει συνεχώς προς τον αριθμό ϕ . Χρησιμοποιώντας τεχνολογία (π.χ. Function Probe ή Excel) μπορεί να εξοικονομηθεί πολύτιμος χρόνος στους υπολογισμούς αυτούς. Στη συνέχεια ανακαλύπτουν τους αριθμούς Fibonacci στο τρίγωνο του Pascal.

Ομάδα Αρχιτεκτονικής και Τεχνών: Οι μαθητές αναζητούν ιστορικά και αρχιτεκτονικά στοιχεία για διάφορα αρχιτεκτονικά μνημεία όπως για τον Παρθενώνα, την Πυραμίδα του Χέοπα κ.α. και διερευνούν τη σχέση τους με τη χρυσή αναλογία.

Ομάδα Βιολογίας : Οι μαθητές μελετούν τη εμφάνιση του φ στη φύση (φύλλα, έντομα κ.λ.π.) και στις αναλογίες του ανθρώπινου σώματος.

Στη συνέχεια οι μαθητές μπορεί να κληθούν να εισάγουν φωτογραφίες σε κατάλληλα διαμορφωμένο αρχείο του Geogebra όπου έχουν την δυνατότητα να εξετάσουν, αν τμήματα της φωτογραφίας τηρούν τη χρυσή αναλογία.

3^η φάση: Οι μαθητές παρουσιάζουν στην ολομέλεια της τάξης τα συμπεράσματα από τη διερεύνησή τους και ακολουθεί συζήτηση μετά από κάθε παρουσίαση. Αναρτούν στα ψηφιακά εργαλεία επικοινωνίας του σχολείου μία συνοπτική έκθεση των συμπερασμάτων τους.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Η διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών (π.χ. των λόγων και αναλογιών) συνήθως γίνεται στην τάξη χωρίς αναφορές σε παραδείγματα από τον πραγματικό κόσμο, τις επιστήμες και τον πολιτισμό. Η παρούσα εργασία αναμένεται να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν την αναγκαιότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών και ειδικότερα να τα συνδέσουν με την αναζήτηση των μαθηματικών δομών στη φύση και στις ανθρώπινες δραστηριότητες. Στην παρούσα εργασία οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:

- να συνδέσουν τα μαθηματικά με άλλες επιστήμες και τον πολιτισμό,
- να τοποθετήσουν τα μαθηματικά στην ιστορική, πολιτιστική και κοινωνική τους διάσταση,
- να θεωρήσουν τα μαθηματικά ως μια ανθρώπινη κατασκευή μέσω της οποίας μπορούμε να ερμηνεύσουμε τον κόσμο που μας περιβάλλει και να αναγνωρίσουμε τις δομές και τις κανονικότητες που εμφανίζονται μέσα σ' αυτόν,

Η επικοινωνία για τα μαθηματικά θα ενισχύσει τις ευκαιρίες κατανόησης των αντίστοιχων μαθηματικών εννοιών ενώ η συνεργατική διερεύνηση θα βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν συνεργατικές και διαλογικές δεξιότητες και μεταδεξιότητες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Ball D. L., Thames M.H. & Phelps G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389-407.

Black, P and Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning, *Assessment in Education*, 5 (1), 7 – 74.

Borkowski, J. G. (1992). Metacognitive theory: a framework for teaching literacy, writing, and math skills. *Journal of Learning Disabilities*, 25 (4), 253-257.

Bragg, P. & Outhred, I. (2000). Students' Knowledge of Length Units: Do They Know More than Rules about Rulers? In T. Nakarahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, 97-104). Hiroshima, Japan: Program Committee.

Bragg, P. & Outhred, I. (2004). A measure of rulers – the importance of units in a measure. In J. Hoines, M. & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, 159–166). Bergen, Norway: Bergen University College.

Broadfoot, M.P. (1996), *Education, Assessment and Society*, Open University Press, Buckingham.

Brown, A. L., Bransford, J.D., Ferrara, R.A. & Campione, J.C. (1983). Learning, remembering, and understanding. In P.H. Mussen (Ed.) *Handbook of child psychology* (Vol. 3: Cognitive development pp 77-166). New York: Wiley

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992), Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (ed.), *The Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

Clements, D., & Sarama, J. (2000). Young Children's Ideas about Geometric Shapes. *Teaching Children Mathematics*, 6(8), 482-491.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: the learning trajectory approach*. New York & London: Routledge.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. V. Mammana, V. (ed.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study*, 37-51. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. & Scaffer, R. (2005). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education*. American Statistical Association

Freudenthal, H., (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Mathematics Education Library. D. Reidel, Boston.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2007). How Students Learn Statistics Revisited: A Current Review of Research on Teaching and Learning Statistics. *International Statistical Review*, 75 (3), 372–396.

Garfield, J. B. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice*. Springer Science & Business Media

Gutierrez, A. (1996). Visualization in 3- Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In L.Puig & A. Guitierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-20). Valencia: University of Valencia, Spain

Harlen, W. and Deakin Crick, R. (2003). Testing and Motivation for Learning, *Assessment in Education*, 10 (2), 169 – 208

Henningsen, M. and Stein, M. K. (1997). Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors that support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 524-549.

Heuvel – Panhuizen, M. (2001). *Children learn mathematics: a learning – teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school*. Utrecht: Freudenthal Institute & National Institute for Curriculum Development.

Jones, G.A. (Ed.) (2005). *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning*. Springer Science & Business Media

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707- 762). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, Consciousness, and Personality*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Millett, A., Brown, M. Askew, M. (2004). *Primary mathematics and the developing professional*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Mammana, C., & Villani, V. (1998). Geometry and Geometry: Teaching Through the ages. In C. V. Mammana, V. (Ed.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study* (pp. 1-3). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Niss, M. (1996). Goals of mathematics teaching. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 11-47). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean conference on mathematical education*. Athens, Jan. 2003, pp. 115-124. Athens: Hellenic Math. Society.

Outhred, L. & Mitchelmore, M. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 147-167.

Outhred, L., Mitchelmore, M., Mcphail, D. & Gould, P. (2003). Count Me into Measurement. In D. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and Teaching Measurement: 2003 Yearbook*, 81-99. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Owens, K., & Outhred, L. (2006). The Complexity of Learning Geometry and Measurement. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 83-116). Rotterdam, Taipei: Sense Publishers.

Romberg, T. (2004). *Standards-Based Mathematics Assessment in Middle School: Rethinking Classroom Practice*, Teachers' College, Columbia University New York and London.

Samara, J. & Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. Routledge.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's the fuss about metacognition. In A. H. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Share, B. M. & Dover, A. C. (1987) Metacognition, intelligence, and giftedness. *Gifted Child Quarterly*, 31, (1), 37-39.

Shaughnessy, M. J. (2007). Research on Statistics Learning and Reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research On Mathematics Teaching and Learning: a Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 957-1010). NCTM.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London, Washington: The Palmer Press.

van den Heuvel-Panhuizen, & Buys, K. (Eds.) (2005). *Young Children Learn Measurement and Geometry. A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for the Lower Grades in Primary School*. Tal Project, 227-326. NL: Utrecht: Freudenthal Institute, Utrecht University & National Institute for Curriculum Development

Van de Walle, J. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο*. Αθήνα: Τυπωθήτω – Γιώργος Δαρδανός.

Wenger, E., McDermott, R., & Snyder, W. M. (2002). *Cultivating communities of practice*. Boston, MA: Harvard Business School Press.

Wittmann, E. (2005). Plenary Lecture presented at the International Colloquium "Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood" organized by the *Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques* in collaboration with the *Institut de mathématique de l'Université de Mons-Hainaut*, Mons/Belgium.

Βερύκιος, Π. (2010). *Συναρτησιακή προσέγγιση βασικών μαθηματικών εννοιών στο Γυμνάσιο*, Αδημοσίευτη Διδακτορική Διατριβή, ΕΚΠΑ: Μαθηματικό Τμήμα.

Δραμαλίδης, Α. & Σακονίδης, Χ. (2006) Η επίδοση μαθητών ηλικίας 12-15 χρόνων σε θέματα σχολικής άλγεβρας, *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, τεύχος 11, σελ. 100-114.

Κολέζα, Ε. & Φακούδης, Ε. (2009). Το πρόβλημα της επιλογής πλαισίου για την εισαγωγή μαθηματικών εννοιών. Η περίπτωση της πρόσθεσης και αφαίρεση ρητών αριθμών στα νέα σχολικά εγχειρίδια. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου – Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή και Γ. Φεσάκης (επιμ.) *Πρακτικά 3^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών: Μαθηματικής Εκπαίδευση και Διδακτικές Πρακτικές* (σελ. 373-382). Αθήνα: Νέες Τεχνολογίες.

Σακονίδης, Χ. (2001). *Μαθηματικά: οδηγίες για τον εκπαιδευτικό*. Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-Ερευνητικό Πρόγραμμα «Πηνελόπη»: Ανάπτυξη εκπαιδευτικού λογισμικού πολυμέσων/ «Δημιουργός Μοντέλων».

Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά Παιδιά, Μεγάλα Μαθηματικά Νοήματα*. Αθήνα: Gutenberg.

Σακονίδης, Χ. (2001). *Μαθηματικά: οδηγίες για τον εκπαιδευτικό*. Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-Ερευνητικό Πρόγραμμα «Πηνελόπη»: Ανάπτυξη εκπαιδευτικού λογισμικού πολυμέσων/ «Δημιουργός Μοντέλων».