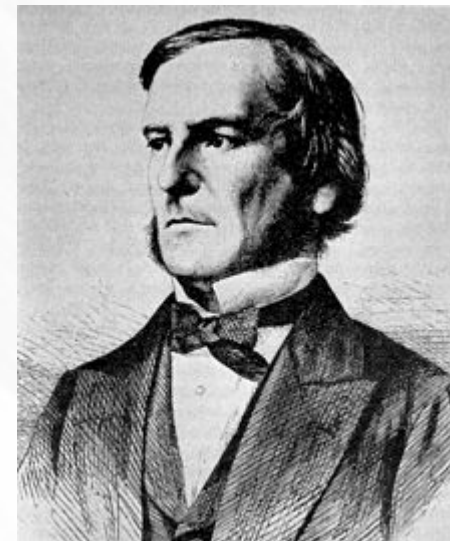
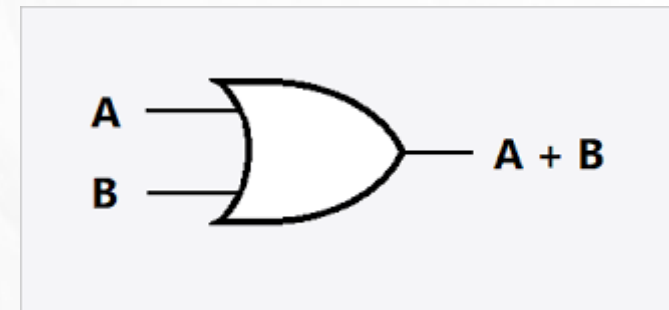
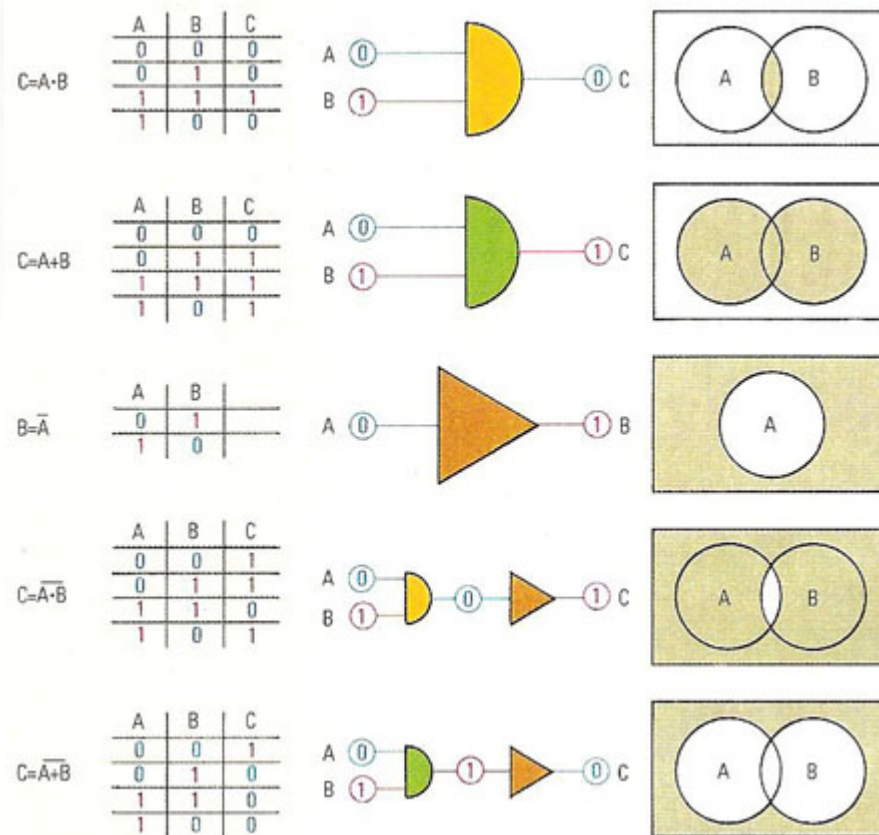


10.3 Λογικές πράξεις και άλγεβρα Boole



George Boole, 2 /11/1815 – 8 12/1864

Λογικές προτάσεις

Μία πρόταση που μπορεί να χαρακτηριστεί αληθής ή ψευδής, ονομάζεται **Λογική πρόταση**.

- π.χ. Το 5 είναι φυσικός αριθμός (αληθής)
- Το 5 είναι άρτιος αριθμός (ψευδής)

Υπάρχουν λογικές προτάσεις που είναι πάντα αληθείς ή πάντα ψευδείς. Μια τέτοια πρόταση ονομάζεται **Λογική Σταθερά**

- π.χ. Μετά το Σάββατο έρχεται η Κυριακή

Μια πρόταση που μπορεί άλλοτε να είναι αληθής και άλλοτε ψευδής λέγεται Λογική μεταβλητή.

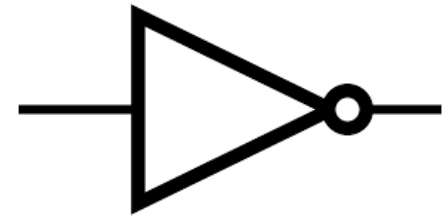
- π.χ. Ο φυσικός αριθμός x είναι μεγαλύτερος του 5.

Με μεταβλητές που οι δυνατές διακριτές τιμές τους είναι μόνο δυο, ασχολείται η **Δυαδική Λογική**.

Βασικές Λογικές Πράξεις

Στη δυαδική λογική, υπάρχουν λογικές πράξεις (τελεστές) που μπορούν να εκτελούν συγκεκριμένη λειτουργία σε μια πρόταση (πράξη **NOT**) ή συνδυάζουν μεταξύ τους δυο ή περισσότερες προτάσεις (π.χ. **AND**, **OR**).

NOT



- NOT, (ΟΧΙ, άρνηση, αντιστροφή ή συμπλήρωμα): αντιστρέφει την τιμή της λογικής πρότασης
- π.χ. A: Έξω βρέχει. (ψευδής)
- NOT A: Έξω δεν βρέχει. (αληθής)

A	NOT A
0	1
1	0

AND

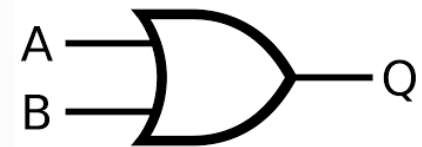


AND, (ΚΑΙ, σύζευξη, λογικός πολλαπλασιασμός): δύο ή περισσότερες προτάσεις που συνδέονται με το AND σχηματίζουν αληθή πρόταση όταν όλες οι επιμέρους προτάσεις είναι αληθείς.

- π.χ. A:Το 3 είναι διαιρέτης του 10 (ψευδής)
- B:Το 10 είναι διαιρέτης του 100 (αληθής)
- A AND B:Το 3 είναι διαιρέτης του 10 και το 10 είναι διαιρέτης του 100 (ψευδής).

A	B	A AND B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR

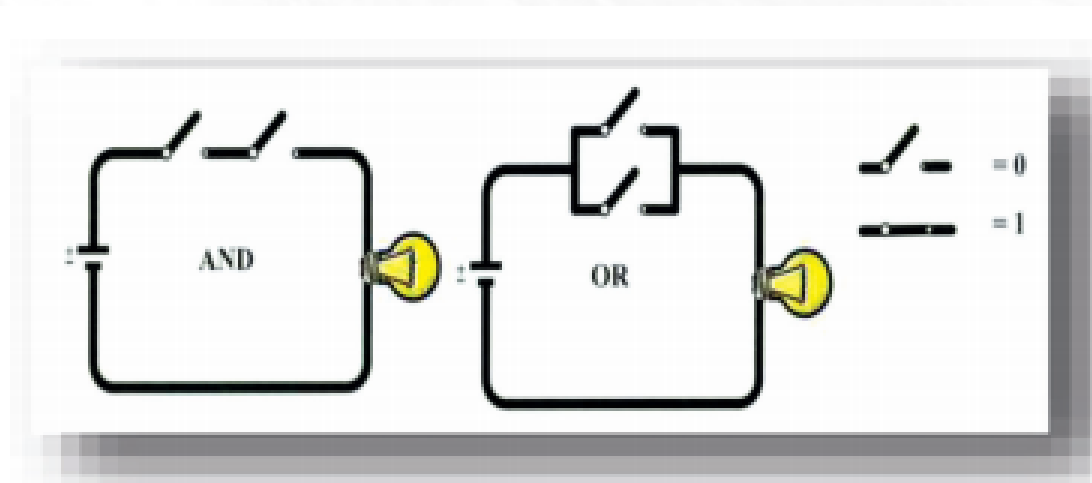


OR, (Η', διάζευξη, λογική πρόσθεση): δυο ή περισσότερες προτάσεις που συνδέονται με το OR σχηματίζουν αληθή πρόταση όταν τουλάχιστον μια από τις επιμέρους προτάσεις είναι αληθής.

- π.χ. A:Το 10 διαιρείται με το 5. (αληθής)
- B:Το 10 διαιρείται με το 3. (ψευδής)
- A OR B:Το 10 διαιρείται με το 5
ή το 10 διαιρείται με το 3. (αληθής)

A	B	A OR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

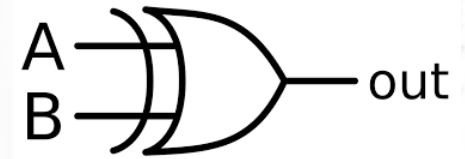
Τις λογικές πράξεις OR και AND μπορούμε να τις περιγράψουμε χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα τα παρακάτω κυκλώματα διακοπών:



AND

OR

XOR



- XOR, (ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟ Η', αποκλειστική διάζευξη): δυο προτάσεις που συνδέονται με XOR σχηματίζουν αληθή πρόταση όταν η μία είναι αληθής και άλλη ψευδής, δηλ. δεν αληθεύουν ταυτόχρονα και δεν είναι ταυτόχρονα ψευδείς.
- π.χ. A:Στη Χίο θα πάμε με πλοίο.

 B:Στη Χίο θα πάμε με αεροπλάνο

A XOR B:Στη Χίο θα πάμε με είτε πλοίο
είτε με αεροπλάνο.
(Δεν θα π ταυτόχρονα και με τα δύο)!

A	B	A XOR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Λογικές Πραξεις

ΟΝΟΜΑ	ΛΟΓΙΚΗ ΠΡΑΞΗ
NOT (ΟΧΙ)	$A' \text{ ή } \bar{A}$
AND (ΚΑΙ)	$A \bullet B$
OR (Η)	$A + B$
NAND (NOT-AND, ΟΧΙ-ΚΑΙ)	$(A \bullet B)'$
NOR (NOT-OR, ΟΧΙ-Η)	$(A + B)'$
XOR (exclusive OR, αποκλειστική διάζευξη, αποκλειστικό Η')	$A \oplus B = A' \bullet B + A \bullet B'$
XNOR (exclusive NOR, ισοδυναμία, ισότητα, αποκλειστικό ΟΥΤΕ)	$(A \oplus B)' = A \bullet B + A' \bullet B'$

για να μελετήσουμε τη λειτουργία των ψηφιακών κυκλωμάτων και να σχεδιάσουμε καινούρια, δανειζόμαστε τις αρχές και τους κανόνες της δυαδικής λογικής, που διατύπωσε το 1854 ο Άγγλος μαθηματικός και φιλόσοφος George Boole και αποτέλεσαν την άλγεβρα Boole

ΔΥΑΔΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ	ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΤΑΣΗΣ	ΑΛΓΕΒΡΑ BOOLE
ΑΛΗΘΗΣ (Α)	ΥΨΗΛΗ (Η)	ΛΟΓΙΚΟ "1"
ΨΕΥΔΗΣ (Ψ)	ΧΑΜΗΛΗ (Λ)	ΛΟΓΙΚΟ "0"

Ιδιότητες άλγεβρα Boole

ΑΞΙΩΜΑ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΣΗΣ : $x + y = y + x$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΠΙΜΕΡΙΣΜΟΥ: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΜΟΥ: $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot z$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ DE MORGAN: $(x + y)' = x' \cdot y'$

$$(x \cdot y)' = x' + y'$$

Επιπλέον ισχύουν:

$$x \cdot x' = 0$$

$$x + x' = 1$$

απόδειξη

$$x \cdot x' = 0$$

x	x'	$x \cdot x'$
0	1	0
1	0	0

$$x + x' = 1$$

x	x'	$x + x'$
0	1	1
1	0	1

Δραστηριότητα

1. Αφού χωριστείτε σε ομάδες, αποδείξτε τις ιδιότητες της άλγεβρας boole

2. Αν $A=B=1$ και $C=D=0$, να υπολογίστε την τιμή των εκφράσεων: $(A \bullet B) \bullet C'$ και $(A+B) \bullet (C+D)$.

- Μεταβείτε [εδώ](#) και επαληθεύστε τα αποτελέσματά σας

επαλήθευση

☐	Expr:	(w&x)&!y		
☒	Vars:	w=1;x=1;y=0		
☐	Result:	1		

w	x	y	z
<input type="text" value("("=""/>	)	=	;
0	1	CLR	DEL
AND	OR	NOT	EVAL