

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

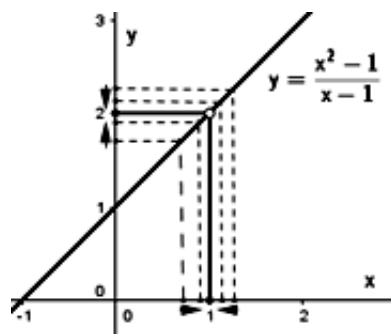
- Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ με πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{1\}$

για $x \neq 1$ η f γράφεται :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x+1$ είναι ευθεία

x	0	-1
y	1	0

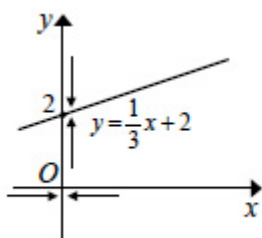


Παρατηρούμε ότι όταν το x "πλησιάζει" στο 1 (λέμε " x τείνει στο 1") τότε οι τιμές της f "πλησιάζουν στο 2" (λέμε " f τείνει στο 2")

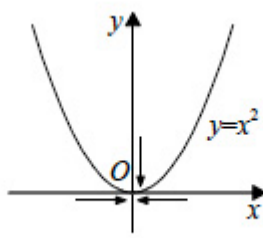
Δηλαδή όταν $x \rightarrow 1$ τότε $f(x) \rightarrow 2$ σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο το 2, όταν το x τείνει στο 1, και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

Στο προηγούμενο παράδειγμα παρουσιάσαμε με απλό τρόπο (χωρίς μαθηματική αυστηρότητα) την έννοια του ορίου της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 1$ που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

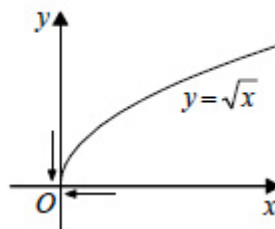
Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, παραδείγματα :



$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3}x + 2 \right) = 2$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$$

- Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς δηλ. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ όπου $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, τότε αποδεικνύεται ότι :

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 + l_2$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (\kappa \cdot f(x)) = \kappa \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \kappa \cdot l_1$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 \cdot l_2$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \lim_{x \rightarrow x_0} f^v(x) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^v = l_1^v$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[v]{f(x)} = \sqrt[v]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \sqrt[v]{l_1}, \quad f(x) \geq 0 \text{ κοντά στο } x_0$

(προσοχή: Όταν μια συνάρτηση υψώνετε σε έναν εκθέτη $\psi^v = (\varphi(x))^v = \varphi^v(x)$ δηλαδή συμφωνούμε για την αποφυγή της παρένθεσης να γράφουμε τον εκθέτη στο γράμμα με το οποίο ονομάσαμε τη συνάρτηση. παράδειγμα: Αν $\varphi(x) = \eta\mu x$ τότε συμφωνούμε να γράφουμε $(\varphi(x))^v = (\eta\mu x)^v = \eta\mu^v x \neq \eta\mu x^v$, $(\sigma\upsilon\nu(x))^v = \sigma\upsilon\nu^v(x)$, $(\varepsilon\varphi(x))^v = \varepsilon\varphi^v(x)$ π.χ. $\eta\mu 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 Άρα $(\eta\mu 60^0)^2 = \eta\mu^2 60^0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ ενώ $\eta\mu 60^2 = \eta\mu 3600 = \eta\mu(10 \cdot 360^0 + 0^0) = \eta\mu 0^0 = 0$

Παράδειγμα 1

1. Έστω f και g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -1$$

Να υπολογίσετε τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x))$ και ii) $\lim_{x \rightarrow 2} [(f(x))^3 - 2f(x)g(x)]$

Απάντηση :

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 + (-1) = 2$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 2} [(f(x))^3 - 4f(x)g(x)] &= \lim_{x \rightarrow 2} (f(x))^3 - \lim_{x \rightarrow 2} 4 \lim_{x \rightarrow 2} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \right)^3 - 2 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \\ &= 3^3 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 27 + 12 = 39 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

2. Να βρείτε τα παρακάτω όρια: i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-1}$ ii) $\lim_{x \rightarrow -2} |x-3|$
 iii) $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{2016}$ iv) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x-3}$ v) $\lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)(x+3)]$

Απάντηση :

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-1} = \frac{2+2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow -2} |x-3| = \left| \lim_{x \rightarrow -2} (x-3) \right| = |-2-3| = |-5| = 5 \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| \right)$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{2016} = \left[\lim_{x \rightarrow 0} (x+1) \right]^{2016} = (0+1)^{2016} = 1^{2016} = 1$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x-3} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} (x-3)} = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1, \quad x \geq 3$$

$$\text{v) } \lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)(x+3)] = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = (1-1)(1+3) = 0 \cdot 4 = 0$$

Παράδειγμα 3

3. Να υπολογισθεί: το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu \frac{x}{3} \right)$ Απάντηση:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu \frac{x}{3} \right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \eta\mu x - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu \frac{x}{3} = \eta\mu \frac{\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{\frac{\pi}{2}}{3} = \eta\mu \frac{\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Ασκήσεις

1) Έστω f και g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -3$$

Να υπολογίσετε τα όρια : i) $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$ και ii) $\lim_{x \rightarrow 1} [(g(x))^2 - 3f(x)g(x)]$

Απάντηση: i) -1 ii) 27

2) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -2$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ όταν :

i) $g(x) = 3f(x)$, ii) $g(x) = 3f(x) - 2$, iii) $g(x) = \frac{5f(x)}{f^3(x) - 2}$, iv) $g(x) = \sqrt{2f^2(x) - 1}$

Απάντηση: i) -6 ii) -8 iii) 1 iv) $\sqrt{7}$

3) Να βρείτε τα παρακάτω όρια : i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+2}$ ii) $\lim_{x \rightarrow 3} |x-7|$
iii) $\lim_{x \rightarrow -2} (x+1)^{2016}$ iv) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1}$ v) $\lim_{x \rightarrow 2} [(x-2)(x+1)]$

4) Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 0} [(2x+1)(x-2)]$, ii) $\lim_{x \rightarrow -1} (x+2)^{2016}$, iii) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{x-2}$, iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3x+1}$

Απαντήσεις: i) -2 ii) 1 iii) $\frac{1}{4}$ iv) 2

5) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2$ ii) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (3\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x)$ iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x + 4\eta\mu x}{\eta\mu^2 x - \eta\mu x}$

Απαντήσεις: i) 1 ii) 3 iii) -4

6) Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$, ii) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon\varphi x - 1}{3}$, iii) $\lim_{x \rightarrow 0} (2\eta\mu 2x + 2)$, iv) $\lim_{x \rightarrow 0} (3\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x)$

Απαντήσεις: i) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ii) 0 iii) 2 iv) -2

ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΟΡΙΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ x_0

1. Όταν έχουμε να υπολογίσουμε όριο **πολυωνυμικής** συνάρτησης όταν $x \rightarrow x_0$ αντικαθιστούμε όπου x το x_0

Δηλ. αν $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ τότε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0) = \alpha_n x_0^n + \alpha_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + \alpha_1 x_0 + \alpha_0$$

Παράδειγμα: $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^5 + x - 1) = P(-1) = 3(-1)^5 + (-1) - 1 = -3 - 1 - 1 = -5$

2. Όταν έχουμε να υπολογίσουμε όριο **ρητής** συνάρτησης όταν $x \rightarrow x_0$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν το x_0 δεν μηδενίζει τον παρονομαστή (δηλ. $Q(x_0) \neq 0$) τότε αντικαθιστούμε όπου x το x_0 .
 Δηλ. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ Παράδειγμα : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{x - 3} = \frac{3 \cdot 1^2 + 1}{1 - 3} = \frac{4}{-2} = -2$

- Αν το x_0 μηδενίζει τον παρονομαστή και τον αριθμητή (δηλ. $P(x_0) = Q(x_0) = 0$) τότε κάνουμε παραγοντοποίηση σε αριθμητή και παρονομαστή με ένα παράγοντα το $x - x_0$ και απλοποιούμε το $x - x_0$ από αριθμητή και παρονομαστή , ακολούθως εφαρμόζουμε τις προηγούμενες περιπτώσεις. **Παραδείγματα :**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3x+1)}{x(x^2-4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+1}{x^2-4} = \frac{0+1}{0-4} = -\frac{1}{4}$$

- Αν το x_0 μηδενίζει τον παρονομαστή και τον αριθμητή και υπάρχουν ριζικά σε παρονομαστή ή τον αριθμητή τότε πολλαπλασιάζουμε με ένα κλάσμα που ισούται με ένα (δηλαδή αριθμητής και παρονομαστής είναι η ίδια παράσταση) και το κλάσμα έχει την κατάλληλη κάθε φορά **συζυγή** παράσταση ώστε να κατασκευάσουμε την ταυτότητα $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ (στην προηγούμενη ταυτότητα : η $A-B$ λέγεται συζυγής της $A+B$ και η $A+B$ λέγεται συζυγής της $A-B$) .
{Σχόλιο: Κάθε φορά που θέλω να πολλαπλασιάσω μια παράσταση με έναν όρο , εκμεταλλεύομαι την ιδιότητα του ουδέτερου στοιχείου του πολλαπλασιασμού που είναι το ένα $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ και γράφω το ένα ως κλάσμα που έχει αριθμητή και παρονομαστή την παράσταση που θέλω να εισάγω. $1 = \frac{a}{a} = \frac{x-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ κ. λ. π. Με την ίδια λογική σε ένα άθροισμα εισάγω την παράσταση που θέλω με αντίθετα πρόσημα, οπότε το άθροισμά τους είναι μηδέν, άρα ουδέτερο στοιχείο στην πρόσθεση και έτσι η αρχική παράσταση δεν μεταβάλλεται. {πχ $x^2 - 4x + 1 = x^2 - 4x + 1 + 3 - 3 = (x-2)^2 - 3 = (x-2)^2 - \sqrt{3}^2 = (x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$ } Αν έχω ριζικά και στον αριθμητή και στον παρονομαστή τότε πολλαπλασιάζω με δύο κλάσματα, που το ένα έχει ως όρους την συζυγή του αριθμητή και το άλλο έχει ως όρους την συζυγή του παρονομαστή. Ακόμη αν τύχει και δεν έχω άθροισμα ή διαφορά αλλά μόνο την ρίζα θυμάμαι ότι: $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2} = \frac{\sqrt{x}}{x}$ }

παράγοντας

Συζυγής παράσταση

$$\sqrt{A} - B \xrightarrow[\text{διαιρούμε}]{\text{πολλαπλασιάζουμε}} \text{με } \sqrt{A} + B \quad \triangleright (\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = (\sqrt{A})^2 - B^2 = A - B^2$$

$$A - \sqrt{B} \xrightarrow[\text{διαιρούμε}]{\text{πολλαπλασιάζουμε}} \text{με } A + \sqrt{B} \quad \triangleright (A - \sqrt{B})(A + \sqrt{B}) = A^2 - (\sqrt{B})^2 = A^2 - B$$

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} \xrightarrow[\text{διαιρούμε}]{\text{πολλαπλασιάζουμε}} \text{με } \sqrt{A} + \sqrt{B} \quad \triangleright (\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = (\sqrt{A})^2 - (\sqrt{B})^2 = A - B$$

Παραδείγματα : Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\begin{aligned}
 \iota) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} \\
 \iota\iota) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{2})^2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2-2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\
 \iota\iota\iota) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{3-\sqrt{3x}} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(3+\sqrt{3x})}{(3-\sqrt{3x})(3+\sqrt{3x})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(3+\sqrt{3x})}{3^2 - (\sqrt{3x})^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(3+\sqrt{3x})}{9-3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(3+\sqrt{3x})}{-3(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3+\sqrt{3x}}{-3} = \frac{3+\sqrt{9}}{-3} = \frac{3+3}{-3} = \frac{6}{-3} = -2 \\
 \text{iv)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-4x+3) \cdot \sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-4x+3) \cdot \sqrt{x}-1}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3) \cdot \sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-3) \cdot \sqrt{x}-1 = (1-3)\sqrt{1}-1 = -2 \cdot 0 = 0 \\
 \nu) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3-\sqrt{5+x})(1+\sqrt{5-x})(3+\sqrt{5+x})}{(1-\sqrt{5-x})(1+\sqrt{5-x})(3+\sqrt{5+x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3^2 - (\sqrt{5+x})^2)(1+\sqrt{5-x})}{(1^2 - (\sqrt{5-x})^2)(3+\sqrt{5+x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(9-(5+x))(1+\sqrt{5-x})}{(1-(5-x))(3+\sqrt{5+x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(9-5-x)(1+\sqrt{5-x})}{(1-5+x)(3+\sqrt{5+x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(1+\sqrt{5-x})}{(-4+x)(3+\sqrt{5+x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x-4)(1+\sqrt{5-x})}{(x-4)(3+\sqrt{5+x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(1+\sqrt{5-x})}{3+\sqrt{5+x}} = \frac{-(1+\sqrt{5-4})}{3+\sqrt{5+4}} = \frac{-(1+\sqrt{1})}{3+\sqrt{9}} = \frac{-(1+1)}{3+3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

● Για την μετατροπή ενός πολωνύμου σε γινόμενο είναι χρήσιμο να θυμίσουμε τα παρακάτω:

Κοινός παράγοντας : Βγάζουμε κοινό παράγοντα από όλους τους όρους ή κατά ομάδες

Παραδείγματα:

- $3x^2 + x = x(3x+1)$
- $9x^2 + 3x = 3x(3x+1)$

- $x^3 + 3x^2 - x - 3 = x^2(x+3) - (x+3) = (x+3)(x^2 - 1) = (x+3)(x-1)(x+1)$

Β) Ταυτότητες Χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες :

- $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$ {οι παραστάσεις $\alpha - \beta$ και $\alpha + \beta$ λέγονται συζυγείς. Η $\alpha - \beta$ είναι συζυγής της $\alpha + \beta$ και αντίστροφα} παράδειγμα : $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x - 4)(x + 4)$

- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

Γ) Τριώνυμο δευτεροβάθμιο $ax^2 + \beta x + \gamma$ Το τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma$ γράφεται:

- $ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες αν $\Delta > 0$

- $ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_0)^2$ όπου x_0 η διπλή ρίζα αν $\Delta = 0$

Διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ και ρίζες: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

Παραδείγματα:

- $x^2 - 5x + 6 = 1(x - 2)(x - 3)$

- $x^2 - 6x + 9 = 1(x - 3)^2$

- $-2x^2 - x + 1 = -2(x - \frac{1}{2})(x - (-1)) = (-2x + 1)(x + 1) = (1 - 2x)(x + 1)$

Δ) Σχήμα Horner

Χρησιμοποιείται όταν το τριώνυμο είναι δευτέρου ή ανώτερου βαθμού και έχει γνωστό όρο. (Αν δεν υπάρχει γνωστός όρος τότε βγάζουμε κοινό παράγοντα): (Βρίσκουμε τους διαιρέτες του γνωστού όρου που είναι οι πιθανές υποψήφιες ρίζες του πολυωνύμου και εφαρμόζουμε το σχήμα Horner συμπληρώνοντας τους όρους που πιθανόν λείπουν με μηδενικά μονώνυμα ώστε το πολυώνυμο να είναι πλήρες (πλήρες σημαίνει, να υπάρχουν όλοι οι εκθέτες από τον μεγαλύτερο ως τον μικρότερο) και διατεταγμένο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής (από τον μεγαλύτερο εκθέτη προς τον μικρότερο). Γράφουμε τους συντελεστές σε μια γραμμή, αφήνουμε μια κενή γραμμή και στην τρίτη γραμμή κατεβάζουμε τον πρώτο συντελεστή (αυτόν του μεγιστοβάθμιου όρου). Δεξιά της πρώτης γραμμής γράφουμε την υποψήφια ρίζα, έναν διαιρέτη του γνωστού όρου, έστω ο α . Πολλαπλασιάζουμε τον πρώτο συντελεστή με τον αριθμό α που γράψαμε δεξιά και το αποτέλεσμα το γράφουμε στη δεύτερη γραμμή κάτω από τον δεύτερο συντελεστή και τους προσθέτουμε αλγεβρικά. Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης το γράφω στην τρίτη γραμμή και γιαυτόν τον αριθμό επαναλαμβάνω τη διαδικασία και συνεχίζω μέχρι να τελειώσουν οι συντελεστές. Αν στην τελευταία πρόσθεση το αποτέλεσμα είναι μηδέν, αυτό σημαίνει ότι, το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου με το διώνυμο $x - \alpha$ είναι μηδέν και συνεπώς η διαίρεση είναι

τέλεια άρα το πολυώνυμο γράφεται: $\Delta(x)=(x-a)\pi(x)$ Αφού διαιρώ με πρώτου βαθμού πολυώνυμο, ο βαθμός του πηλίκου $\pi(x)$ θα είναι κατά ένα μικρότερος από τον βαθμό του πολυωνύμου και οι αριθμοί της τρίτης γραμμής είναι οι συντελεστές του πηλίκου. Ο τελευταίος αριθμός της τρίτης γραμμής στα δεξιά, είναι το υπόλοιπο που θα βρίσκαμε αν διαιρούσαμε το πολυώνυμο με $x-a$.

Στο παρακάτω παράδειγμα στην τελευταία γραμμή, ο **τελευταίος δεξιά αριθμός** είναι το **υπόλοιπο** και οι άλλοι είναι οι **συντελεστές του πηλίκου** της διαίρεσης του πολυωνύμου $2x^3 + x^2 + 1$ με το $x-(-1)$ και αφού το πολυώνυμο είναι 3^{ου} βαθμού το πηλίκο είναι 2^{ου})

Παράδειγμα: ● $2x^3 + x^2 + 1 = (x - (-1))(2x^2 - 1x + 1) = (x + 1)(2x^2 - x + 1)$

Από το Σχήμα Horner

2	1	0	1	-1
↓	-2	1	-1	
2	-1	1	0	

Παραδείγματα ασκήσεων:

Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x+1} = \frac{1+4}{1+1} = \frac{5}{2}$$

● $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ ταυτότητα

● $x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$ Σχήμα Horner →

1	3	-4	1
↓	1	4	
1	4	0	

$$ii) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x+1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x^2 - x + 1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 - x + 1) = 2(-1)^2 - (-1) + 1 = 2 + 1 + 1 = 4$$

Όταν λείπουν κάποιοι όροι του πολυωνύμου πρέπει, για να εφαρμόσω το σχήμα Horner να τους συμπληρώσω με μηδενικά μονώνυμα οπότε:

$$2x^3 + x^2 + 1 = 2x^3 + x^2 + 0x + 1 = (x - (-1))(2x^2 - 1x + 1)$$

● $2x^3 + x^2 + 1 = (x+1)(2x^2 - x + 1)$ Σχήμα Horner →

2	1	0	1	-1
↓	-2	1	-1	
2	-1	1	0	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x + 1}{x - 1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 2x - 5)$

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

$$\text{iv)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 2x - 2}{3x^2 + 2x - 5}$$

$$\text{v)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$$

$$\text{vi)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$$

$$\text{vii)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 10x + 8}{x^2 + x - 6}$$

$$\text{viii)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^3 - 8}$$

$$\text{ix)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$$

Απαντήσεις: i) 11 ii) 0 iii) $\frac{3}{2}$ iv) $\frac{3}{4}$ v) 0 vi) $\frac{4}{3}$ vii) $\frac{6}{5}$ viii) 2 ix) $\frac{2}{3}$

2. Να βρείτε τα παρακάτω όρια i) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ ii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-\sqrt{x-2}}{x-3}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-10}{5-\sqrt{5x}}$ iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$ v) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5x-4}-4}{\sqrt{x}-2}$

Απαντήσεις: i) $\frac{1}{4}$ ii) $-\frac{1}{2}$ iii) -4 iv) 4 v) $\frac{5}{2}$

Ασκήσεις (Υπολογισμός ορίου συνάρτησης) (οι λύσεις είναι παρακάτω)

A) Να υπολογίσετε τα όρια:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x+7}{x^2-1}$ (απ. 5)

2) $\lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1})$ (απ. 1)

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2+1}$ (απ. 1)

4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$ (απ. 2)

5) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ (απ. 6)

6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$ (απ. $\frac{1}{4}$)

7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{1-x}$ (απ. -2) θυμάμαι: $\alpha-\beta=-(\beta-\alpha)$

8) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x}$ (απ. 2)

9) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{18-2x^2}{6x-2x^2}$ (απ. 2)

10) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-4x}{6-3x}$ (απ. $-\frac{8}{3}$)

11) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$ (απ. 3)

12) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-6}{x^2-3x+2}$ (απ. 3)

13) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-x-6}{x^2-4}$ (απ. $\frac{5}{4}$)

14) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2+x-2}{x^2+x}$ (απ. 5)

15) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-x^2}{x^2+4x-12}$ (απ. $-\frac{1}{4}$)

16) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3-5x+4}$ (απ. $-\frac{1}{2}$)

17) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+3x^2-2}{x^2-1}$ (απ. $\frac{3}{2}$)

18) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$ (απ. $\frac{9}{2}$)

19) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3-64}{x^2-16}$ (απ. 6)

20) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3-125}{x^2-25}$ (απ. $\frac{75}{10}$)

21) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{x^2-2x}$ (απ. 16)

22) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-4x^2+3}{x^2+2x-3}$ (απ. -1)

23) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^4-1}$ (απ. $-\frac{3}{4}$)

24) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+27}{x^3-7x+6}$ (απ. $\frac{27}{20}$)

25) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$ (απ. $\frac{1}{6}$)

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^3 + x^2} \quad (\text{απ. } 1)$$

$$27) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - x} \quad (\text{απ. } 3)$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} \quad (\text{απ. } 1)$$

B) Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \quad (\text{απ. } \frac{1}{2}) \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} \quad (\text{απ. } 2\sqrt{2}) \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x} \quad (\text{απ. } -\frac{1}{2})$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} \quad (\text{απ. } 4) \quad 5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x+1} - 2} \quad (\text{απ. } 4) \quad 6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{\sqrt{x} - 2} \quad (\text{απ. } 16)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{3}}{x - 2} \quad (\text{απ. } \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}) \quad 8) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \quad (\text{απ. } 2\sqrt{3}) \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}} \quad (\text{απ. } -6\sqrt{3})$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 9x + 8}{\sqrt{2x} - 4} \quad (\text{απ. } 28) \quad 11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\sqrt{x} - 3}{x^2 - x} \quad (\text{απ. } \frac{9}{6}) \quad 12) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - x - 1}{\sqrt{x+2} - x} \quad (\text{απ. } \frac{4}{9})$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 20} \frac{\sqrt{x+5} - 5}{\sqrt{x-4} - 4} \quad (\text{απ. } \frac{4}{5}) \quad 14) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (\text{απ. } 0) \quad 15) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x-3}} \quad (\text{απ. } 0)$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \sqrt{7}} \frac{x^2 - x\sqrt{7}}{x^2 - 7} \quad (\text{απ. } \frac{1}{2}) \quad 17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 3} - 2x} \quad (\text{απ. } -1) \quad 18) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - \sqrt{2x}} \quad (\text{απ. } 2)$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{\sqrt{x} - 2} \quad (\text{απ. } 16) \quad 20) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5+x} - 3}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}} \quad (\text{απ. } -\frac{1}{6}) \quad 21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x} \quad (\text{απ. } \frac{1}{6})$$

$$22) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{-x-1} - 2}{x+5} \quad (\text{απ. } -\frac{1}{4}) \quad 23) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 7} - 3}{x - 1} \quad (\text{απ. } \frac{1}{2})$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{\sqrt{x+1} - 2} \quad (\text{απ. } \frac{8}{6})$$

25) Να υπολογισθεί η παράμετρος α ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ισότητες.

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\alpha\sqrt{x} - 2\alpha}{x^2 - 4x} = 1 \quad (\text{απ. } \alpha=16) \quad 2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x + \alpha x - 3\alpha}{x^2 - 9} = 2 \quad (\text{απ. } \alpha=9)$$

26) Δίνεται η συνάρτηση :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \alpha \nu \quad x \neq 1 \\ 4 & \alpha \nu \quad x = 1 \end{cases} \quad \text{Να υπολογισθούν τα όρια: } 1) \lim_{x \rightarrow 2} \varphi(x) \text{ και } 2) \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$$

$$1) (\text{απ. } 0) \quad 2) (\text{απ. } -1)$$

27) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση :

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + \alpha x + 1) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} + 1 \right) \quad (\text{απ. } \alpha = -10)$$

28) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{\sqrt{x-1} - 1}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

ii) Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (απ. 12) β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)+4}}{f(x)-5x}$ (απ. 2)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΑΠΟ ΤΟ 2000-2021

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$ (εξ.2000)

2) Δίνεται $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ να υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1)f(x)]$ (εξ.2003)

3) Δίνεται $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ να υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \sqrt{3}}{x - 2}$ (επαν.εξ.2003)

4) Δίνεται $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$ να υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ (εξ.2004)

5) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{x^2 - 6x + 5}$ (εξ.2005)

6) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2 - x + 1}$ (εξ.2007)

7) Αν $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 7$ και $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$ (εξ.2009)

8) Αν $f(x) = x^3 - 8$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2}$ (επαν.εξ.2009)

9) Αν $f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$ (εξ.2010)

10) Αν $\theta(t) = t - 4\sqrt{t} + a$ και $\theta'(t) = 1 - 4 \frac{1}{2\sqrt{t}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{t}}$ να υπολογισθεί το $\lim_{t \rightarrow 4} \frac{\theta'(t)}{t^2 - 16}$ (εξ.2011)

11) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2 + 3} - 2)}{x^2 + x}$ (εξ.2012)

12) Αν $f(x) = 4x(3 - x)^2$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2) - 8}{x}$ (επαν.εξ.2012)

13) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x^3 + x^2}$ (εξ.2013)

14) Αν $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + 1$ και $f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x - 1}$ (επαν.εξ.2013)

15) Αν $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98x}$ (εξ.2015)

16) Αν $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ και $f'(x) = 3x^2 + 6x$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}$

(επαν.εξ.2015)

17) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-6x+8}{x-4}$

(εξ.2016)

18) Αν $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - 1$ και $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ και $f''(x) = 2x - 2$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)+f''(x)+4}{\sqrt{x}-1}$

(επαν.εξ.2016)

19) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$

(εξ.2017)

20) Αν $f(x) = x^3 - 3x + 2$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2-1}$

(επαν.εξ.2017)

21) Αν $f(x) = \sqrt{x^2+4} + 2018$ και $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+4)f'(x)-2x}{x^2}$

(εξ.2018)

22) Αν $f(x) = x^2 + \frac{16}{x} - 17$ και $f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2}$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f'(x)}{\sqrt{4x+1}-3}$

(επαν.εξ.2018)

23) Αν $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ και $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ να υπολογισθεί το

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)}$

(εξ.2019)

24) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x}$

(επαν.εξ.2019)

25) Αν $f(x) = (x^2 + 4x + 5)^{20}$ και $f'(x) = 40(x^2 + 4x + 5)^{19}(x + 2)$ να υπολογισθεί το

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$

(εξ.2020)

26) Αν $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 16$ και $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ να υπολογισθεί το

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-16}{f'(x)}$

(επαν.εξ.2020)

27) Αν $f(x) = x^2 - 3x + 2$ και $g(x) = \frac{f(x)}{x^2-1}$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

(εξ.2021)

28) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

(επαν.εξ.2021)

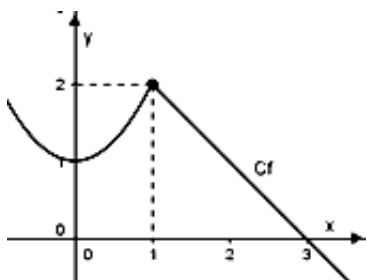
ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

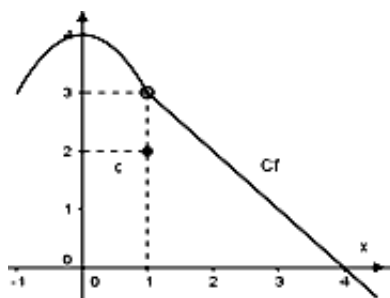
{ερμηνεύοντας την ισότητα: υπάρχει το όριο και είναι ίσο με την τιμή της συνάρτησης στον x_0 τον αριθμό όπου τείνει ο x , άρα, μιλάμε για συνέχεια μόνο για τα σημεία που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.)

➔ Χαρακτηριστικό γνώρισμα μίας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μία συνεχής καμπύλη.



f συνεχής στο $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2$$



f ασυνεχής στο $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \neq f(1) = 2$$

➔ Οι πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, (εκθετικές, λογαριθμικές για μας είναι εκτός ύλης) αλλά και όσες συναρτήσεις προκύπτουν από πράξεις μεταξύ τους είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

Για παράδειγμα :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\eta \mu x) = \eta \mu x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{άρα η } f(x) = \eta \mu x \rightarrow \text{συνεχής στο } \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\sigma \upsilon \nu x) = \sigma \upsilon \nu x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{άρα η } f(x) = \sigma \upsilon \nu x \rightarrow \text{συνεχής στο } \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\epsilon \varphi x) = \epsilon \varphi x_0, \quad (\sigma \upsilon \nu x \neq 0) \quad \text{άρα η } f(x) = \epsilon \varphi x \rightarrow \text{συνεχής στο } \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{άρα η } P(x) \text{ (Πολυωνυμική)} \rightarrow \text{συνεχής στο } \mathbb{R}$$

Παράδειγμα 1° Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases} \quad \text{στο σημείο } x_0 = 2$$

Απάντηση : $f(2) = 4$ και

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = 4$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ και η f θα είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Παράδειγμα 2° Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2a - 1, & x = 1 \end{cases}$

i) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

ii) Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

Απάντηση :

$$i) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (3x+2) = 3+2=5$$

3	-1	-2	1
↓	3	2	
3	2	0	

$$3x^2 - x - 2 = (x-1)(3x+2)$$

← Σχήμα Horner

ii) Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 1$ πρέπει: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ ❶

$$\text{Όμως } f(1) = 2a - 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$$

$$\text{Άρα λόγω της ❶ } 2a - 1 = 5 \Leftrightarrow 2a = 5 + 1 \Leftrightarrow 2a = 6 \Leftrightarrow a = \frac{6}{2} \Leftrightarrow a = 3$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στα ζητούμενα σημεία.

$$i) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{αν } x \neq 3 \\ -5 & \text{αν } x = 3 \end{cases} \text{ αν είναι συνεχής στο } x_0 = 3$$

$$ii) g(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - x - 4}{x + 1} & \text{αν } x \neq -1 \\ -7 & \text{αν } x = -1 \end{cases} \text{ αν είναι συνεχής στο } x_0 = -1$$

$$2) \text{ Δίνεται η συνάρτηση : } f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1}, & x \neq -1 \\ 3\lambda + 1, & x = -1 \end{cases}$$

i) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (απ. -5)

ii) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = -1$ (απ. $\lambda = -2$)

$$3) \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}, & x \neq 3 \\ \lambda + 1, & x = 3 \end{cases}$$

Να βρείτε: i) το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ (απ. 2) ii) την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 3$ (απ. $\lambda = 1$)

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1}, & x \neq 1 \\ \lambda - 2, & x = 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Να βρείτε: i) το $f(0)$ και το $f(2)$ ii) το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1}$ (απ.8) iii) την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. (απ. $\lambda = 10$) (παν.2003)

5) Να υπολογίσετε την παράμετρο α ώστε η συνάρτηση $\varphi(x)$ να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} & \text{αν } x \neq 2 \\ \alpha & \text{αν } x = 2 \end{cases} \quad \text{και η } g(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + 3 & \text{αν } x \neq 1 \\ 5\alpha - \alpha^2 & \text{αν } x = 1 \end{cases} \quad \text{στο } x_0 = 1$$

(απ. $\alpha = -2$ και $\alpha = 2$)

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 + 3x^2 - x + 2}{x^2 - 4} & \text{αν } x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +2), \text{ με } \lambda \in \mathbb{R} \\ \lambda & \text{αν } x = -2 \end{cases}$

Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = -2$ (απ. $\lambda = -\frac{11}{4}$)

7) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha - 2, & x = 0 \end{cases}$ i) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(απ.0) ii) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ (απ. $\alpha = 2$)

8) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι συνεχής στο $x = 1$ η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{3x+1} - 2} & \text{αν } x \in [0, 1) \cup (1, +\infty) \\ \lambda & \text{αν } x = 1 \end{cases} \quad (\text{απ. } \lambda = \frac{2}{3})$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟ ΤΡΟΠΟ ΣΚΕΨΗΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΑΡΑΠΑΝΩ

(Ρίχνουν μια ματιά όσοι έχουν περιέργεια, δέστε όμως τα δεδομένα της άσκησης 7 και πως σκεπτόμαστε. Μπορεί να ζητηθεί στις πανελλαδικές εξετάσεις με κάποιο ερώτημα.)

1) Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι συνεχής στο $x = -1$

η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + \alpha x + 2}{x + 1} & \text{αν } x \neq -1 \\ \beta & \text{αν } x = -1 \end{cases}$

Απάντηση

Για να είναι συνεχής η συνάρτηση στο $x = -1$ πρέπει (βάσει του ορισμού της συνέχειας σελ.16 του βιβλίου Μαθηματικά και στοιχεία στατιστικής) να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = \beta$

{σχόλιο: Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν :

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = g(x)$

Οπότε γράφουμε $f = g$ και για τα όρια ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Συνεπώς, όταν μας δίνονται δυο ίσες συναρτήσεις, παίρνουμε τα όρια και των δύο μελών και στη συνέχεια κάνουμε τους όποιους υπολογισμούς βάσει των δεδομένων της άσκησης. Στο βιβλίο μας "μαθηματικά και στοιχεία στατιστικής" δεν αναφέρεται αυτοτελώς η ιδιότητα συναρτήσεων. Το μόνο που έχει είναι στο σχόλιο σελίδα 10-11, έχει τη φράση "για παράδειγμα, οι τύποι $f(x) = \frac{1}{2}gx^2$ και $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ ορίζουν την ίδια συνάρτηση".

Στην άσκηση, η παράμετρος a είναι άγνωστη και συνεπώς δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο. Γράφοντας τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3+ax+2}{x+1}$ για $x \neq -1$ ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός και συνεπώς μπορούμε να κάνουμε πράξεις.}

Για $x \neq -1$ έχουμε: $f(x) = \frac{x^3+ax+2}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)f(x) = x^3+ax+2$ άρα σύμφωνα με το παραπάνω σχόλιο ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^3+ax+2) \Leftrightarrow$

$$(\lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} 1) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^3 + \lim_{x \rightarrow -1} a \lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} 2 \Leftrightarrow (-1+1) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = (-1)^3 + a(-1) + 2 \Leftrightarrow 0 = -1 - a + 2 \Leftrightarrow -a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Για $a=1$ το όριο είναι: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+x+2}{x+1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2-x+2)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2-x+2) = (-1)^2 - (-1) + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$ Για να είναι συνεχής η συνάρτηση πρέπει $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 4 = f(-1) = \beta$ άρα $\beta=4$

2) Αν $\lim_{x \rightarrow 5} (f(x) + x^2 - 2x) = 7$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

Απάντηση:

Επειδή δεν γνωρίζουμε αν υπάρχει το όριο της $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ δεν μπορούμε να γράψουμε

$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) + \lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 2x) = 7$ Στις περιπτώσεις αυτές ονομάζουμε την παράσταση μετά το

σύμβολο του ορίου σαν μια **νέα συνάρτηση** $g(x) = f(x) + x^2 - 2x$ (για την οποία γνωρίζουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = \lim_{x \rightarrow 5} (f(x) + x^2 - 2x) = 7$) και την λύνουμε ως προς $f(x)$ και παίρνουμε τα όρια των

δύο μελών. Οπότε $f(x) = g(x) - x^2 + 2x$ άρα $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} (g(x) - x^2 + 2x) = \lim_{x \rightarrow 5} g(x) -$

$$\lim_{x \rightarrow 5} x^2 + \lim_{x \rightarrow 5} 2 \lim_{x \rightarrow 5} x = 7 - 25 + 10 = -8$$

3) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x=2$ και το $A(2,1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τότε να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x)+x^2-2f(x)-4}{x-2} = 5$

Απάντηση

Δίνεται ότι η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$ που σημαίνει ότι: $f(2)=1$

Ακόμη δίνεται ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x=2$ άρα ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 1$ και

συνεπώς είναι γνωστή η τιμή του ορίου $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ Άρα $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x)+x^2-2f(x)-4}{x-2} =$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)(x-2)+x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)(x-2)+(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(f(x)+x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + x + 2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 2 = 1 + 2 + 2 = 5$$

{ βγάλαμε κοινό παράγοντα το $f(x)$ και στη συνέχεια αναλύσαμε τη διαφορά τετραγώνων $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$ και στη συνέχεια κοινό παράγοντα το $x-2$ }

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & \text{αν } x \neq \lambda \\ 2 & \text{αν } x = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x=\lambda$

Απάντηση

Για να είναι συνεχής η συνάρτηση στο $x=\lambda$ πρέπει να υπάρχει το όριο και να ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \lambda} (x^2 - 6x + 11) = f(\lambda) = 2 \quad \text{Άρα: } \lim_{x \rightarrow \lambda} (x^2 - 6x + 11) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \lambda} x^2 - \lim_{x \rightarrow \lambda} 6 \cdot \lim_{x \rightarrow \lambda} x +$$

$$\lim_{x \rightarrow \lambda} 11 = 2 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 11 = 2 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 11 - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ διπλή ρίζα.}$$

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2\alpha}{\sqrt{x}-1}, & x \in [0,1) \cup (1,+\infty) \\ \lambda, & x = 1 \end{cases} \mu\epsilon \lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ Να βρείτε τις

τιμές των α και λ , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x=1$

Απάντηση

Όταν $x \neq 1$ τότε $\sqrt{x} \neq 1$ άρα $\sqrt{x} - 1 \neq 0$ και άρα $f(x) = \frac{x-2\alpha}{\sqrt{x}-1} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)f(x) = x-2\alpha \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [(\sqrt{x}-1)f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2\alpha) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}-1) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 2\alpha \Leftrightarrow$$

$$0 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 - 2\alpha \Leftrightarrow 0 = 1 - 2\alpha \Leftrightarrow 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \text{ και για } \alpha = \frac{1}{2} \text{ παίρνουμε } f(x) =$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \text{ οπότε: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2-1^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = 1+1=2 \text{ οπότε έχουμε:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \\ f(1) = \lambda \end{array} \right\} \text{για να είναι συνεχής στο } x=1 \text{ πρέπει } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{ άρα πρέπει } \lambda=2$$

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+\alpha}{x-\lambda}, & x \neq \lambda \\ 1, & x = \lambda \end{cases} \mu\epsilon \lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ Να βρείτε τις τιμές

των α και λ , ώστε η συνάρτηση να f να είναι συνεχής στο $x = \lambda$

Απάντηση:

Βάσει του ορισμού της συνέχειας για να είναι η f συνεχής στο $x=\lambda$ πρέπει να υπάρχει το όριο και να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow \lambda} f(x) = f(\lambda) = 1$ Άρα το όριο υπάρχει και είναι $\lim_{x \rightarrow \lambda} f(x) = 1$ (1)

Όταν $x \neq \lambda$ τότε $x-\lambda \neq 0$ και η συνάρτηση γίνεται $f(x) = \frac{x^2+\alpha}{x-\lambda} \Leftrightarrow (x-\lambda)f(x) = x^2 + \alpha$

Οπότε αφού είναι ίσες οι συναρτήσεις παίρνω τα όρια των δύο μελών στο $x=\lambda$ και έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow \lambda} (x-\lambda)f(x) = \lim_{x \rightarrow \lambda} (x^2 + \alpha) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \lambda} (x-\lambda) \lim_{x \rightarrow \lambda} f(x) = \lim_{x \rightarrow \lambda} (x^2 + \alpha) \Leftrightarrow (\lambda - \lambda) \lim_{x \rightarrow \lambda} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \lambda} x^2 + \lim_{x \rightarrow \lambda} \alpha \Leftrightarrow 0 \cdot \lim_{x \rightarrow \lambda} f(x) = \lambda^2 + \alpha \Leftrightarrow \lambda^2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\lambda^2 \text{ (2) βάζοντας την τιμή του } \alpha$$

στην συνάρτηση έχουμε μόνο μία παράμετρο οπότε: $\lim_{x \rightarrow \lambda} f(x) = \lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{x^2+\alpha}{x-\lambda} =$

$$\lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{x^2-\lambda^2}{x-\lambda} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{(x-\lambda)(x+\lambda)}{x-\lambda} = \lim_{x \rightarrow \lambda} (x+\lambda) = \lambda + \lambda = 2\lambda \text{ (3) Από τις σχέσεις (1) και (3)}$$

παίρνουμε ότι $2\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ και για $\lambda = \frac{1}{2}$ και από τη σχέση (2) έχουμε $\alpha = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$

7) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x = 5$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(5, -1)$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 5} g(x)$

$$\mu\epsilon \quad g(x) = 5f^2(x) + 2f(x) + 3x - 2$$

Απάντηση

Επειδή η γραφική παράσταση της f , η C_f , διέρχεται από το σημείο $A(5, -1)$, ισχύει:

$f(5) = -1$ Επιπλέον, επειδή δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x=5$, βάσει του ορισμού της συνέχειας, ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5) = -1$ άρα $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -1$ και από την

ισότητα των συναρτήσεων παίρνω τα όρια των δύο μελών και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων έχουμε: $g(x) = 5f^2(x) + 2f(x) + 3x - 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 5} g(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow 5} (5f^2(x) + 2f(x) + 3x - 2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 5} g(x) = \lim_{x \rightarrow 5} 5f^2(x) + \lim_{x \rightarrow 5} 2f(x) + \lim_{x \rightarrow 5} 3x - \lim_{x \rightarrow 5} 2 =$$

$$5 \lim_{x \rightarrow 5} f^2(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 5} f(x) + 3 \lim_{x \rightarrow 5} x - \lim_{x \rightarrow 5} 2 = 5 \left(\lim_{x \rightarrow 5} f(x) \right)^2 + 2 \lim_{x \rightarrow 5} f(x) + 3 \lim_{x \rightarrow 5} x - \lim_{x \rightarrow 5} 2 =$$

$$5(-1)^2 + 2(-1) + 3 \cdot 5 - 2 = 5 - 2 + 15 - 2 = 16 \quad \text{άρα} \quad \lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 16 \quad \{\text{χρησιμοποιήσαμε ιδιότητες ορίων}\}$$

8) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και η γραφική της παράστασή της διέρχεται από το σημείο $A(5, 2)$, να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 5} f(x) \quad \text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{f(x)+14}}{1-f(x)}$$

Απάντηση

i) Επειδή η γραφική παράσταση της f , η C_f διέρχεται από το σημείο $A(5, 2)$, ισχύει:

$f(5) = 2$ Επιπλέον επειδή δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x=5$, βάσει του ορισμού της συνέχειας ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5) = 2$ άρα $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2$

ii) Ιδιότητες ορίων :

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{f(x)+14}}{1-f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{f(x)+14}}{\lim_{x \rightarrow 5} (1-f(x))} = \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 5} (f(x)+14)}}{\lim_{x \rightarrow 5} (1-f(x))} = \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 5} f(x) + \lim_{x \rightarrow 5} 14}}{\lim_{x \rightarrow 5} 1 - \lim_{x \rightarrow 5} f(x)} = \frac{\sqrt{2+14}}{1-2} = \frac{\sqrt{16}}{-1} = -4$$

9) Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε

$$x \cdot f(x) = x^2 + 2x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, να βρείτε: i) την τιμή $f(0)$ ii)

$$\text{το όριο} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 f(x)}{x+2}$$

Απάντηση

Επειδή η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για να βρώ τον τύπο της πρέπει να διαιρέσω με $x \neq 0$, η συνάρτηση έχει δύο κλάδους δηλαδή :

Για $x \neq 0$ έχουμε $x \cdot f(x) = x^2 + 2x \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x} = \frac{x(x+2)}{x} = x+2$ και για $x=0$

έστω παίρνει την τιμή α δηλαδή $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$ Επειδή η συνάρτηση είναι

συνεχής στο πεδίο ορισμού της άρα και στο μηδέν ισχύει :

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \alpha$ (1) όμως $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+2) = 2$ άρα βάσει

της σχέσης (1) $f(0) = \alpha = 2$

$$ii) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 f(x)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2(x+2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} x^2 = (-2)^2 = 4$$

ΛΥΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x + 1}{x - 1} = \frac{2 \cdot 2^2 + 2 + 1}{2 - 1} = \frac{11}{1} = 11$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 2x - 5) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 5 = 0$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$$

$$iv) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 2x - 2}{3x^2 + 2x - 5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x-1)(x+\frac{1}{2})}{3(x-1)(x+\frac{5}{3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x+2)}{(x-1)(3x+5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x+2}{3x+5} = \frac{4 \cdot 1 + 2}{3 \cdot 1 + 5} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$v) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{1-1}{1(1+1)} = \frac{0}{2} = 0$$

$$vi) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2)^2 - 1^2}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(x^2 + 1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x^2 + 1)}{x^2 + x + 1} = \frac{(1+1)(1^2 + 1)}{1^2 + 1 + 1} = \frac{4}{3}$$

$x^4 - 1 = x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1$ και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε Horner

1	0	0	0	-1	1
↓	1	1	1	1	
1	1	1	1	0	

$x^4 - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$ παρατηρείστε ότι

$(x+1)(x^2 + 1) = xx^2 + x \cdot 1 + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot 1 = x^3 + x^2 + x + 1$ ίδιο με

Horner

$$\text{vii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 10x + 8}{x^2 + x - 6} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 3x - 4)}{(x-2)(x+3)} =$$

σχήμα Horner

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 4}{x + 3} = \frac{2^2 + 3 \cdot 2 - 4}{2 + 3} = \frac{6}{5}$$

1	1	-10	8	2
↓	2	6	-8	
1	3	-4	0	

$$\begin{aligned} \text{viii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^3 - 8} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x - 8}{x^3 - 2^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x - 8}{x^3 - 2^3} = \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^3 + 2x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x^2 + 2x + 2^2)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}{x^2 + 2x + 4} = \frac{2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 4}{2^2 + 2 \cdot 2 + 4} = \frac{24}{12} = 2 \end{aligned}$$

Με παραγοντοποίηση:

$$x^4 - 2x^2 - 8 = x^4 - 2x^2 - 4 - 4 = (x^4 - 4) - 2(x^2 + 2) = [(x^2)^2 - 2^2] - 2(x^2 + 2) =$$

$$(x^2 - 2)(x^2 + 2) - 2(x^2 + 2) = (x^2 + 2)(x^2 - 2 - 2) = (x^2 + 2)(x^2 - 4) = (x^2 + 2)(x - 2)(x + 2)$$

Με σχήμα Horner:

1	0	-2	0	-8	2
↓	2	4	4	8	
1	2	2	4	0	

$$\text{ix) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x + 2} = \frac{1^2 + 1}{1 + 2} = \frac{2}{3}$$

Με σχήμα Horner

1	-1	1	-1	1
↓	1	0	1	
1	0	1	0	

2. Να βρείτε τα παρακάτω όρια

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5} \cdot \frac{\sqrt{x-1} + 2}{\sqrt{x-1} + 2} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1} - 2)(\sqrt{x-1} + 2)}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1})^2 - 2^2}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 2} = \frac{1}{\sqrt{5-1} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$$

{η $\sqrt{x-1} - 2$ έχει συζυγή την $\sqrt{x-1} + 2$ }

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \sqrt{x-2}}{x-3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \sqrt{x-2}}{x-3} \cdot \frac{1 + \sqrt{x-2}}{1 + \sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(1 - \sqrt{x-2})(1 + \sqrt{x-2})}{(x-3)(1 + \sqrt{x-2})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1^2 - (\sqrt{x-2})^2}{(x-3)(1 + \sqrt{x-2})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - (x-2)}{(x-3)(1 + \sqrt{x-2})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - x + 2}{(x-3)(1 + \sqrt{x-2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{(x-3)(1 + \sqrt{x-2})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{1 + \sqrt{x-2}} = \frac{-1}{1 + \sqrt{3-2}} = \frac{-1}{1 + \sqrt{1}} = -\frac{1}{2}$$

{η $1 - \sqrt{x-2}$ έχει συζυγή την $1 + \sqrt{x-2}$ και $-x+3 = -(x-3)$ }

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-10}{5-\sqrt{5x}} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-10}{5-\sqrt{5x}} \frac{5+\sqrt{5x}}{5+\sqrt{5x}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2x-10)(5+\sqrt{5x})}{(5-\sqrt{5x})(5+\sqrt{5x})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2(x-5)(5+\sqrt{5x})}{5^2 - (\sqrt{5x})^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2(x-5)(5+\sqrt{5x})}{25-5x} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2(x-5)(5+\sqrt{5x})}{5(5-x)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2(x-5)(5+\sqrt{5x})}{-5(x-5)} = \\ &\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2(5+\sqrt{5x})}{-5} = \frac{2(5+5)}{-5} = -4 \end{aligned}$$

{η $5 - \sqrt{5x}$ έχει συζυγή την $5 + \sqrt{5x}$ }

$$\begin{aligned} \text{iv)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} \frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+16}+4} = \\ &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+16}+4)}{(\sqrt{x^2+16}-4)(\sqrt{x^2+16}+4)(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[(\sqrt{x^2+1})^2-1^2](\sqrt{x^2+16}+4)}{[(\sqrt{x^2+16})^2-4^2](\sqrt{x^2+1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x^2+1-1^2](\sqrt{x^2+16}+4)}{[(x^2+16-4^2)(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+1-1)(\sqrt{x^2+16}+4)}{[(x^2+16-16)(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \\ &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{\sqrt{0^2+16}+4}{\sqrt{0^2+1}+1} = \frac{\sqrt{16}+4}{\sqrt{1}+1} = \frac{4+4}{1+1} = \frac{8}{2} = 4 \end{aligned}$$

{πολλαπλασιάζω με την συζυγή του αριθμητή $\sqrt{x^2+1}+1$ και την συζυγή του παρονομαστή $\sqrt{x^2+16}+4$ }

$$\begin{aligned} \text{v)} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5x-4}-4}{\sqrt{x}-2} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5x-4}-4}{\sqrt{x}-2} \frac{\sqrt{5x-4}+4}{\sqrt{5x-4}+4} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{5x-4}-4)(\sqrt{5x-4}+4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{5x-4}+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{[(\sqrt{5x-4})^2-4^2](\sqrt{x}+2)}{[(\sqrt{x})^2-2^2](\sqrt{5x-4}+4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(5x-4-16)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{5x-4}+4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(5x-20)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{5x-4}+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{5x-4}+4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{5x-4}+4} = \frac{5(\sqrt{4}+2)}{\sqrt{5 \cdot 4-4}+4} = \frac{20}{\sqrt{20-4}+4} = \frac{20}{\sqrt{16}+4} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

{πολλαπλασιάζω με την συζυγή του αριθμητή $\sqrt{5x-4}+4$ και την συζυγή του παρονομαστή $\sqrt{x}+2$ }

A) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x+7}{x^2-1} = \frac{4 \cdot 2 + 7}{2^2 - 1} = \frac{15}{3} = 5$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1}) = \sqrt{5+4} - \sqrt{5-1} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2+1} = \frac{\sin 0}{0^2+1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 2\eta\mu \frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 + 0 = 2$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 2^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1^2}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{-(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} [-(x + 1)] = -(1 + 1) = -2$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2^2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{x} = \frac{2 + 2}{2} = 2$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{18 - 2x^2}{6x - 2x^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{18 - 2x^2}{6x - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(9 - x^2)}{2x(3 - x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(3^2 - x^2)}{2x(3 - x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(3 - x)(3 + x)}{2x(3 - x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(3 + x)}{2x} = \frac{2(3 + 3)}{2 \cdot 3} = \frac{12}{6} = 2$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{6 - 3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{6 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x^2 - 4)}{3(2 - x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x^2 - 2^2)}{3(2 - x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x - 2)(x + 2)}{3[-(x - 2)]} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x + 2)}{-3} = \frac{2(2 + 2)}{-3} = -\frac{8}{3}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - (-2))}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 1 + 2 = 3$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x - 1} = \frac{3}{2 - 1} = 3$$

$$13) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - (-2))(x - 3)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 3}{x - 2} = \frac{-2 - 3}{-2 - 2} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x - \frac{2}{3})(x + 1)}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 2}{x} = \frac{3 \cdot (-1) - 2}{-1} = \frac{-5}{-1} = 5$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - x^2}{x^2 + 4x - 12} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(2 - x)}{(x - 2)(x + 6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x(x - 2)}{(x - 2)(x + 6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x}{x + 6} = \frac{-2}{2 + 6} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^3 - 5x + 4} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^3 + 0x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x^2 + x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 + x - 4} = \frac{1}{1^2 + 1 - 4} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Σχήμα Horner

1	0	-5	4	1
↓	1	1	-4	
1	1	-4	0	

$$17) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 0x - 2}{x^2 - 1^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 + 2x - 2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \frac{(-1)^2 + 2(-1) - 2}{-1 - 1} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Σχήμα

1	3	0	-2	-1
	-1	-2	2	
1	2	-2	0	

Horner

$$18) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3^3}{x^2 - 3^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 3^2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x + 9}{x+3} = \frac{3^2 + 3 \cdot 3 + 9}{3+3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x^2 - 16} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 4^3}{x^2 - 4^2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x^2 + 4x + 4^2)}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 4x + 16}{x+4} = \frac{4^2 + 4 \cdot 4 + 16}{4+4} = \frac{48}{8} = 6$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 125}{x^2 - 25} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 5^3}{x^2 - 5^2} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x^2 + 5x + 5^2)}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 5x + 25}{x+5} = \frac{5^2 + 5 \cdot 5 + 25}{5+5} = \frac{75}{10} = \frac{15}{2}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^2 - 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2^4}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2)^2 - (2^2)^2}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 2^2)(x^2 + 2^2)}{x(x-2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)(x^2 + 4)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x^2 + 4)}{x} = \frac{(2+2)(2^2 + 4)}{2} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^2 + 2x - 3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 0x + 3}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 - 3x - 3)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 3x - 3}{x+3} =$$

$$\frac{1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3}{1+3} = \frac{-4}{4} = -1$$

1	0	-4	0	3	1
	1	1	-3	-3	
1	1	-3	-3	0	

Σχήμα Horner

$$23) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^4 - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1^3}{x^4 - 1^4} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1^2)}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x-1)(x+1)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)(x^2 + 1)} =$$

$$\frac{(-1)^2 - (-1) + 1}{(-1-1)((-1)^2 + 1)} = \frac{1+1+1}{(-2)(1+1)} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

$$24) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^3 - 7x + 6} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 3^3}{x^3 + 0x^2 - 7x + 6} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x^2 - 3x + 3^2)}{(x+3)(x^2 - 3x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 3x + 9}{x^2 - 3x + 2} =$$

$$\frac{(-3)^2 - 3 \cdot (-3) + 9}{(-3)^2 - 3 \cdot (-3) + 2} = \frac{27}{20}$$

1	0	-7	6	-3
	-3	9	-6	
1	-3	2	0	

Σχήμα Horner

$$25) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x+3} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^3 + x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\chi + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\chi + 1} = \frac{1}{0 + 1} = 1$$

$$27) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\chi(\chi^2 + \chi - 2)}{\chi(\chi - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\chi(\chi - 1)(\chi + 2)}{\chi(\chi - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (\chi + 2) = 1 + 2 = 3$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\chi^2(\chi - 1) - 4(\chi - 1)}{\chi^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\chi^2 - 4)(\chi - 1)}{\chi^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} (\chi - 1) = 2 - 1 = 1$$

B) Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\chi} - 1}{\chi - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\chi} - 1}{\chi - 1} \frac{\sqrt{\chi} + 1}{\sqrt{\chi} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{\chi} - 1)(\sqrt{\chi} + 1)}{(\chi - 1)(\sqrt{\chi} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{\chi})^2 - 1^2}{(\chi - 1)(\sqrt{\chi} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\chi - 1}{(\chi - 1)(\sqrt{\chi} + 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{\chi} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\chi - 2}{\sqrt{\chi} - \sqrt{2}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\chi - 2}{\sqrt{\chi} - \sqrt{2}} \frac{\sqrt{\chi} + \sqrt{2}}{\sqrt{\chi} + \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\chi - 2)(\sqrt{\chi} + \sqrt{2})}{(\sqrt{\chi} - \sqrt{2})(\sqrt{\chi} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\chi - 2)(\sqrt{\chi} + \sqrt{2})}{(\sqrt{\chi})^2 - (\sqrt{2})^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\chi - 2)(\sqrt{\chi} + \sqrt{2})}{\chi - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{\chi} + \sqrt{2}) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\chi + 1}}{\chi} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\chi + 1}}{\chi} \frac{1 + \sqrt{\chi + 1}}{1 + \sqrt{\chi + 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\chi + 1})(1 + \sqrt{\chi + 1})}{\chi(1 + \sqrt{\chi + 1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1^2 - (\sqrt{\chi + 1})^2}{\chi(1 + \sqrt{\chi + 1})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\chi + 1)}{\chi(1 + \sqrt{\chi + 1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \chi - 1}{\chi(1 + \sqrt{\chi + 1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\chi}{\chi(1 + \sqrt{\chi + 1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1 + \sqrt{\chi + 1}} = \frac{-1}{1 + \sqrt{0 + 1}} = -\frac{1}{2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\chi^2 - 1}{\sqrt{\chi} - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\chi^2 - 1}{\sqrt{\chi} - 1} \frac{\sqrt{\chi} + 1}{\sqrt{\chi} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\chi^2 - 1)(\sqrt{\chi} + 1)}{(\sqrt{\chi} - 1)(\sqrt{\chi} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\chi^2 - 1)(\sqrt{\chi} + 1)}{(\sqrt{\chi})^2 - 1^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\chi - 1)(\chi + 1)(\sqrt{\chi} + 1)}{\chi - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\chi + 1)(\sqrt{\chi} + 1) = (1 + 1)(\sqrt{1} + 1) = 4$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\chi - 3}{\sqrt{\chi + 1} - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\chi - 3}{\sqrt{\chi + 1} - 2} \frac{\sqrt{\chi + 1} + 2}{\sqrt{\chi + 1} + 2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\chi - 3)(\sqrt{\chi + 1} + 2)}{(\sqrt{\chi + 1} - 2)(\sqrt{\chi + 1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\chi - 3)(\sqrt{\chi + 1} + 2)}{(\sqrt{\chi + 1})^2 - 2^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\chi - 3)(\sqrt{\chi + 1} + 2)}{\chi + 1 - 4} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\chi - 3)(\sqrt{\chi + 1} + 2)}{\chi - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{\chi + 1} + 2) = \sqrt{3 + 1} + 2 = \sqrt{4} + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{\sqrt{x} - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{\sqrt{x} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2 - 4x)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x})^2 - 2^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} x(\sqrt{x} + 2) = 4(\sqrt{4} + 2) = 4(2 + 2) = 16$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{3}}{x - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{3}}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{3})(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3})}{(x - 2)(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 - 1})^2 - (\sqrt{3})^2}{(x - 2)(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1 - 3}{(x - 2)(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}} = \frac{2 + 2}{\sqrt{2^2 - 1} + \sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 5x + 6)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 2)(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 2)(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{3}) = (3 - 2)(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{x + 3} + \sqrt{3}}{\sqrt{x + 3} + \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - 3)(\sqrt{x + 3} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x + 3} - \sqrt{3})(\sqrt{x + 3} + \sqrt{3})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - 3)(\sqrt{x + 3} + \sqrt{3})}{(x + 3 - 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - 3)(\sqrt{x + 3} + \sqrt{3})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x - 3)(\sqrt{x + 3} + \sqrt{3})$$

$$(0 - 3)(\sqrt{0 + 3} + \sqrt{3}) = -3 \cdot 2\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 9x + 8}{\sqrt{2x} - 4} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 9x + 8}{\sqrt{2x} - 4} \cdot \frac{\sqrt{2x} + 4}{\sqrt{2x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x^2 - 9x + 8)(\sqrt{2x} + 4)}{(\sqrt{2x} - 4)(\sqrt{2x} + 4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x^2 - 9x + 8)(\sqrt{2x} + 4)}{(\sqrt{2x})^2 - 4^2} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x - 1)(x - 8)(\sqrt{2x} + 4)}{2x - 16} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x - 1)(x - 8)(\sqrt{2x} + 4)}{2(x - 8)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x - 1)(\sqrt{2x} + 4)}{2} = \frac{(8 - 1)(\sqrt{2 \cdot 8} + 4)}{2} = \frac{(7)(\sqrt{16} + 4)}{2} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\sqrt{x} - 3}{x^2 - x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3\sqrt{x} - 3)(3\sqrt{x} + 3)}{(x^2 - x)(3\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3\sqrt{x})^2 - 3^2}{x(x - 1)(3\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x - 9}{x(x - 1)(3\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9(x - 1)}{x(x - 1)(3\sqrt{x} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9}{x(3\sqrt{x} + 3)} = \frac{9}{1(3\sqrt{1} + 3)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
 12) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-x-1}{\sqrt{x+2}-x} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-x-1}{\sqrt{x+2}-x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+5}+x+1}{\sqrt{x^2+5}+x+1} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+x}{\sqrt{x+2}+x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-x-1)(\sqrt{x^2+5}+x+1)(\sqrt{x+2}+x)}{(\sqrt{x+2}-x)(\sqrt{x+2}+x)(\sqrt{x^2+5}+x+1)} = \\
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[(\sqrt{x^2+5})^2 - (x+1)^2](\sqrt{x+2}+x)}{(\sqrt{x+2}-x^2)(\sqrt{x^2+5}+x+1)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x^2+5-(x+1)^2](\sqrt{x+2}+x)}{(\sqrt{x+2}-x^2)(\sqrt{x^2+5}+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x^2+5-x^2-2x-1](\sqrt{x+2}+x)}{(x+2-x^2)(\sqrt{x^2+5}+x+1)} = \\
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[-2x+4](\sqrt{x+2}+x)}{(-x^2+x+2)(\sqrt{x^2+5}+x+1)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x-2)(\sqrt{x+2}+x)}{-(x+1)(x-2)(\sqrt{x^2+5}+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(\sqrt{x+2}+x)}{-(x+1)(\sqrt{x^2+5}+x+1)} = \\
 \frac{-2(\sqrt{2+2}+2)}{-(2+1)(\sqrt{2^2+5}+2+1)} &= \frac{-2(2+2)}{-3(\sqrt{9}+3)} = \frac{-8}{-18} = \frac{4}{9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13) \lim_{x \rightarrow 20} \frac{\sqrt{x+5}-5}{\sqrt{x-4}-4} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 20} \frac{\sqrt{x+5}-5}{\sqrt{x-4}-4} \cdot \frac{\sqrt{x+5}+5}{\sqrt{x+5}+5} \cdot \frac{\sqrt{x-4}+4}{\sqrt{x-4}+4} = \lim_{x \rightarrow 20} \frac{(\sqrt{x+5}-5)(\sqrt{x+5}+5)(\sqrt{x-4}+4)}{(\sqrt{x-4}-4)(\sqrt{x-4}+4)(\sqrt{x+5}+5)} = \\
 \lim_{x \rightarrow 20} \frac{(\sqrt{x+5})^2-5^2)(\sqrt{x-4}+4)}{(\sqrt{x-4})^2-4^2)(\sqrt{x+5}+5)} &= \lim_{x \rightarrow 20} \frac{(x+5-25)(\sqrt{x-4}+4)}{(x-4-16)(\sqrt{x+5}+5)} = \lim_{x \rightarrow 20} \frac{(x-20)(\sqrt{x-4}+4)}{(x-20)(\sqrt{x+5}+5)} = \\
 = \lim_{x \rightarrow 20} \frac{\sqrt{x-4}+4}{\sqrt{x+5}+5} &= \frac{\sqrt{20-4}+4}{\sqrt{20+5}+5} = \frac{\sqrt{16}+4}{\sqrt{25}+5} = \frac{4+4}{5+5} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{x^2-1}}{x^2-1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{x^2-1}}{(x-1)(x+1)} = \\
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} &= \frac{\sqrt{1^2-1}}{1+1} = \frac{\sqrt{0}}{2} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x-3}} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x-3}} \cdot \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)\sqrt{x-3}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3)\sqrt{x-3} \\
 = (3+3)\sqrt{3-3} &= 6\sqrt{0} = 6 \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

Αν $\alpha \geq 0$ τότε: $\alpha = (\sqrt{\alpha})^2$ οπότε $7 = (\sqrt{7})^2$

$$16) \lim_{x \rightarrow \sqrt{7}} \frac{x^2-x\sqrt{7}}{x^2-7} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{7}} \frac{x^2-x\sqrt{7}}{x^2-\sqrt{7}^2} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{7}} \frac{x(x-\sqrt{7})}{(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{7}} \frac{x}{x+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+3}-2x} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+3}-2x} \cdot \frac{x^2+\sqrt{x}\sqrt{x^2+3}+2x}{x^2+\sqrt{x}\sqrt{x^2+3}+2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-\sqrt{x})(x^2+\sqrt{x}\sqrt{x^2+3}+2x)}{(\sqrt{x^2+3}-2x)(\sqrt{x^2+3}+2x)(x^2+\sqrt{x})} = \\
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[(x^2)^2-(\sqrt{x})^2](\sqrt{x^2+3}+2x)}{[(\sqrt{x^2+3})^2-(2x)^2](x^2+\sqrt{x})} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[x^4-x](\sqrt{x^2+3}+2x)}{(x^2+3-4x^2)(x^2+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x[x^3-1](\sqrt{x^2+3}+2x)}{(3-3x^2)(x^2+\sqrt{x})} = \\
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x[x-1](x^2+x+1)(\sqrt{x^2+3}+2x)}{-3(x^2-1)(x^2+\sqrt{x})} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x[x-1](x^2+x+1)(\sqrt{x^2+3}+2x)}{-3(x-1)(x+1)(x^2+\sqrt{x})} = \\
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2+x+1)(\sqrt{x^2+3}+2x)}{-3(x+1)(x^2+\sqrt{x})} &= \frac{1(1^2+1+1)(\sqrt{1^2+3}+2 \cdot 1)}{-3(1+1)(1^2+\sqrt{1})} = \frac{3(\sqrt{4}+2)}{-3 \cdot 2 \cdot 2} = -1
 \end{aligned}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-3x-2}{x-\sqrt{2x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-3x-2}{x-\sqrt{2x}} \cdot \frac{x+\sqrt{2x}}{x+\sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x^2-3x-2)(x+\sqrt{2x})}{(x-\sqrt{2x})(x+\sqrt{2x})} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{2(\chi-2)(\chi-\frac{1}{2})(\chi+\sqrt{2\chi})}{\chi^2-(\sqrt{2\chi})^2} = \lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{(\chi-2)(\chi-1)(\chi+\sqrt{2\chi})}{\chi^2-2\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{(\chi-2)(\chi-1)(\chi+\sqrt{2\chi})}{\chi(\chi-2)} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{(\chi-1)(\chi+\sqrt{2\chi})}{\chi} = \frac{(2-1)(2+\sqrt{2 \cdot 2})}{2} = 2$$

$$19) \lim_{\chi \rightarrow 4} \frac{\chi^2-4\chi}{\sqrt{\chi}-2} \stackrel{0}{=} \lim_{\chi \rightarrow 4} \frac{\chi^2-4\chi}{\sqrt{\chi}-2} \cdot \frac{\sqrt{\chi}+2}{\sqrt{\chi}+2} = \lim_{\chi \rightarrow 4} \frac{(\chi^2-4\chi)(\sqrt{\chi}+2)}{(\sqrt{\chi}-2)(\sqrt{\chi}+2)} = \lim_{\chi \rightarrow 4} \frac{\chi(\chi-4)(\sqrt{\chi}+2)}{(\sqrt{\chi})^2-2^2} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 4} \frac{\chi(\chi-4)(\sqrt{\chi}+2)}{\chi-4} = \lim_{\chi \rightarrow 4} \chi(\sqrt{\chi}+2) = 4(\sqrt{4}+2) = 16$$

$$20) \lim_{\chi \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5+\chi}-3}{\sqrt{5-\chi}-\sqrt{\chi-3}} \stackrel{0}{=} \lim_{\chi \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5+\chi}-3}{\sqrt{5-\chi}-\sqrt{\chi-3}} \cdot \frac{\sqrt{5+\chi}+3}{\sqrt{5+\chi}+3} \cdot \frac{\sqrt{5-\chi}+\sqrt{\chi-3}}{\sqrt{5-\chi}+\sqrt{\chi-3}} = \lim_{\chi \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{5+\chi}-3)(\sqrt{5+\chi}+3)(\sqrt{5-\chi}+\sqrt{\chi-3})}{(\sqrt{5-\chi}-\sqrt{\chi-3})(\sqrt{5-\chi}+\sqrt{\chi-3})(\sqrt{5+\chi}+3)} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{5+\chi})^2-3^2}{[(\sqrt{5-\chi})^2-(\sqrt{\chi-3})^2](\sqrt{5+\chi}+3)} = \lim_{\chi \rightarrow 4} \frac{(5+\chi-9)(\sqrt{5-\chi}+\sqrt{\chi-3})}{[5-\chi-(\chi-3)](\sqrt{5+\chi}+3)} = \lim_{\chi \rightarrow 4} \frac{(\chi-4)(\sqrt{5-\chi}+\sqrt{\chi-3})}{[5-\chi-(\chi-3)](\sqrt{5+\chi}+3)} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 4} \frac{(\chi-4)(\sqrt{5-\chi}+\sqrt{\chi-3})}{[-2\chi+8](\sqrt{5+\chi}+3)} = \lim_{\chi \rightarrow 4} \frac{(\chi-4)(\sqrt{5-\chi}+\sqrt{\chi-3})}{-2(\chi-4)(\sqrt{5+\chi}+3)} = \lim_{\chi \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5-\chi}+\sqrt{\chi-3}}{-2(\sqrt{5+\chi}+3)} = \frac{\sqrt{5-4}+\sqrt{4-3}}{-2(\sqrt{5+4}+3)} = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{1}}{-2(\sqrt{9}+3)} =$$

$$\frac{2}{-2 \cdot 6} = -\frac{1}{6}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x} \cdot \frac{\sqrt{9+x}+3}{\sqrt{9+x}+3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{9+x}-3)(\sqrt{9+x}+3)}{x(\sqrt{9+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{9+x})^2-3^2}{x(\sqrt{9+x}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{9+x})^2-3^2}{x(\sqrt{9+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9+x-9}{x(\sqrt{9+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{9+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{9+x}+3} = \frac{1}{\sqrt{9+0}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}$$

$$22) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{-x-1}-2}{x+5} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{-x-1}-2}{x+5} \cdot \frac{\sqrt{-x-1}+2}{\sqrt{-x-1}+2} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(\sqrt{-x-1}-2)(\sqrt{-x-1}+2)}{(x+5)(\sqrt{-x-1}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -5} \frac{-x-1-2^2}{(x+5)(\sqrt{-x-1}+2)} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{-(x+5)}{(x+5)(\sqrt{-x-1}+2)} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{-1}{\sqrt{-x-1}+2} = \frac{-1}{\sqrt{-(-5)-1}+2} = \frac{-1}{\sqrt{4}+2} = -\frac{1}{4}$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+7}-3}{x-1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+7}-3}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+7}+3}{\sqrt{x^2+x+7}+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+x+7}-3)(\sqrt{x^2+x+7}+3)}{(x-1)(\sqrt{x^2+x+7}+3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+7}-3}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+7}+3}{\sqrt{x^2+x+7}+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+x+7}-3)(\sqrt{x^2+x+7}+3)}{(x-1)(\sqrt{x^2+x+7}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+x+7})^2-3^2}{(x-1)(\sqrt{x^2+x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+7-9}{(x-1)(\sqrt{x^2+x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)(\sqrt{x^2+x+7}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\chi-1)(\chi+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\chi+2}{\sqrt{x^2+x+7}+3} = \frac{1+2}{\sqrt{1^2+1+7}+3} = \frac{3}{\sqrt{9}+3} = \frac{3}{3+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 24) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x+1}-2} &= \frac{0}{0} \\
 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x+1}-2} \cdot \frac{\sqrt{2x+3}+3}{\sqrt{2x+3}+3} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{2x+3}-3)(\sqrt{2x+3}+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{2x+3}+3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{[(\sqrt{2x+3})^2-3^2](\sqrt{x+1}+2)}{[(\sqrt{x+1})^2-2^2](\sqrt{2x+3}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x+3-9)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)(\sqrt{2x+3}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x-6)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{2x+3}+3} = \frac{2(\sqrt{3+1}+2)}{\sqrt{2 \cdot 3+3}+3} = \frac{2(\sqrt{4}+2)}{\sqrt{9}+3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

25) Να υπολογισθεί η παράμετρος α ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ισότητες.

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\alpha\sqrt{x}-2\alpha}{x^2-4x} = 1$$

Υπολογίζω το όριο:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\alpha\sqrt{x}-2\alpha}{x^2-4x} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\alpha(\sqrt{x}-2)}{x(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\alpha(\sqrt{x}-2)}{x(x-4)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\alpha(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{x(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\alpha[(\sqrt{x})^2-2^2]}{x(x-4)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\alpha(x-4)}{x(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\alpha}{x(\sqrt{x}+2)} = \frac{\alpha}{4(\sqrt{4}+2)} = \frac{\alpha}{4(2+2)} = \frac{\alpha}{16} \quad \text{άρα πρέπει } \frac{\alpha}{16} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 16
 \end{aligned}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x+\alpha x-3\alpha}{x^2-9} = 2$$

Υπολογίζω το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x+\alpha x-3\alpha}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)+\alpha(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+\alpha)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+\alpha}{x+3} = \frac{3+\alpha}{3+3} = \frac{3+\alpha}{6}$$

$$\text{άρα πρέπει } \frac{3+\alpha}{6} = 2 \Leftrightarrow 3+\alpha=12 \Leftrightarrow \alpha=12-3=9$$

26) Δίνεται η συνάρτηση :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-1} & \alpha \nu \ x \neq 1 \\ 4 & \alpha \nu \ x = 1 \end{cases} \quad \text{Να υπολογισθούν τα όρια: } 1) \lim_{x \rightarrow 2} \varphi(x) \text{ και } 2) \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{2^2-3 \cdot 2+2}{2-1} = \frac{4-6+2}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = 1-2 = -1$$

27) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση :

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + \alpha x + 1) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} + 1 \right) \quad (\text{απ. } \alpha = -10)$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + \alpha x + 1) &= \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} + 1 \right) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} \alpha x + \lim_{x \rightarrow 2} 1 = \alpha \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} 1 \right) \\ \Leftrightarrow 2^2 + \alpha \cdot 2 + 1 &= \alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} + \alpha \lim_{x \rightarrow 0} 1 \Leftrightarrow 4 + 2\alpha + 1 = \alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} + \alpha \cdot 1 \Leftrightarrow \\ 2\alpha + 5 &= \alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - 1^2}{x(\sqrt{x+1}+1)} + \alpha \Leftrightarrow 2\alpha + 5 = \alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} + \alpha \Leftrightarrow 2\alpha + 5 = \alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} + \alpha \Leftrightarrow 2\alpha + 5 = \alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} + \alpha \\ \Leftrightarrow 2\alpha + 5 &= \alpha \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} + \alpha \Leftrightarrow 2\alpha + 5 = \alpha \frac{1}{\sqrt{1}+1} + \alpha \Leftrightarrow 2\alpha + 5 = \alpha \frac{1}{2} + \alpha \Leftrightarrow 4\alpha + 10 = \alpha + 2\alpha \Leftrightarrow 4\alpha + 10 = 3\alpha \Leftrightarrow 4\alpha - 3\alpha = -10 \Leftrightarrow \alpha = -10 \end{aligned}$$

28) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{\sqrt{x-1}-1}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

ii) Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (απ. 12) β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)} + 4}{f(x) - 5x}$ (απ. 2)

ΛΥΣΗ

i) Πεδίο ορισμού: Πρέπει ταυτόχρονα, το υπόρριζο να είναι μη αρνητικό και ο παρονομαστής διάφορος του μηδενός. Άρα $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ και $\sqrt{x-1}-1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \neq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}^2 \neq 1^2 \Leftrightarrow x-1 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 2$. Οπότε: Π.Ο. $[1, 2) \cup (2, +\infty)$

$$\begin{aligned} \text{ii) α) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{\sqrt{x-1}-1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{\sqrt{x-1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 2x - 8)(\sqrt{x-1}+1)}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 2x - 8)(\sqrt{x-1}+1)}{(\sqrt{x-1})^2 - 1^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+4)(\sqrt{x-1}+1)}{x-1-1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+4)(\sqrt{x-1}+1)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+4)(\sqrt{x-1}+1) = (2+4)(\sqrt{2-1}+1) = 6(\sqrt{1}+1) = 12 \\ \text{β) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)} + 4}{f(x) - 5x} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{f(x)} + 4}{\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 5x)} = \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + 4)}}{\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 5x)} = \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} 4}}{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} 5x} = \frac{\sqrt{12+4}}{12-5 \cdot 2} = \\ \frac{\sqrt{12+4}}{12-10} &= \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΑΠΟ ΤΟ 2000-2021

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$ (εξ. 2000)

Απάντηση

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{\sqrt{x}^2 - \sqrt{3}^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-1)(\sqrt{x} + \sqrt{3}) = (3-1)(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

2) Δίνεται $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1)f(x)]$ (εξ.2003)

Απάντηση

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)x}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} = \frac{-1}{-1-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

3) Δίνεται $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-\sqrt{3}}{x-2}$ (επαν.εξ.2003)

Απάντηση

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3})(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3})}{(x-2)(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-1}^2 - \sqrt{3}^2}{(x-2)(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-1-3}{(x-2)(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}} = \frac{2+2}{\sqrt{2^2-1}+\sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

4) Δίνεται $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ (εξ.2004)

5) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x-15}{x^2-6x+5}$ (εξ.2005)

Απάντηση

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x-15}{x^2-6x+5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3(x-5)}{(x-1)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3}{x-1} = \frac{3}{5-1} = \frac{3}{4}$$

Για το την παραγοντοποίηση του τριώνυμου

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16 \quad x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x^2 - 6x + 5 = 1(x-1)(x-5)$$

6) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2-x+1}$ (εξ.2007)

Απάντηση

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2-x+1} = \frac{-1}{(-1)^2 - (-1) + 1} = \frac{-1}{1+1+1} = -\frac{1}{3}$$

7) Αν $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 7$ και $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2-1}$

(εξ.2009)

Απάντηση

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 12x + 9}{x^2 - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-3)}{x+1} = \frac{3(1-3)}{1+1} = \frac{3(-2)}{2} = -3$$

8) Αν $f(x) = x^3 - 8$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}$ (επαν.εξ.2009)

Απάντηση

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + x \cdot 2 + 2^2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 12$$

9) Αν $f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1}$ (εξ.2010)

Απάντηση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} - 2}{x - 1} &\stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2\sqrt{x^2 - x + 1} - 2)(2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2)}{(x-1)(2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2\sqrt{x^2 - x + 1})^2 - 2^2}{(x-1)(2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x^2 - x + 1) - 4}{(x-1)(2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 4x + 4 - 4}{(x-1)(2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 4x}{(x-1)(2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x(x-1)}{(x-1)(2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x}{2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2} = \frac{4 \cdot 1}{2\sqrt{1^2 - 1 + 1} + 2} = \frac{4}{2\sqrt{1} + 2} = 1 \end{aligned}$$

10) Αν $\theta(t) = t - 4\sqrt{t} + a$ και $\theta'(t) = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{t}}$ να υπολογισθεί το $\lim_{t \rightarrow 4} \frac{\theta'(t)}{t^2 - 16}$ (εξ.2011)

Απάντηση

$$\begin{aligned} \theta'(t) &= 1 - \frac{2}{\sqrt{t}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{t}} \cdot \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = 1 - \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{t}^2} = 1 - \frac{2\sqrt{t}}{t} = \frac{t - 2\sqrt{t}}{t} \\ \lim_{t \rightarrow 4} \frac{t - 2\sqrt{t}}{t^2 - 16} &\stackrel{0}{=} \lim_{t \rightarrow 4} \frac{(t - 2\sqrt{t})(t + 2\sqrt{t})}{t(t^2 - 4^2)(t + 2\sqrt{t})} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{t^2 - (2\sqrt{t})^2}{t(t-4)(t+4)(t+2\sqrt{t})} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{t^2 - 4t}{t(t-4)(t+4)(t+2\sqrt{t})} \\ &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{t(t-4)}{t(t-4)(t+4)(t+2\sqrt{t})} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{t}{t(t+4)(t+2\sqrt{t})} = \frac{4}{4(4+4)(4+2\sqrt{4})} = \frac{4}{4 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

11) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}$ (εξ.2012)

Απάντηση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x} &\stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x^2+x)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2[(\sqrt{x^2+3})^2 - 2^2]}{(x^2+x)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2[x^2+3-4]}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2[x^2-1]}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)(x-1)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x-1)}{x(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{2(-1-1)}{(-1)(\sqrt{(-1)^2+3}+2)} = \frac{-4}{(-1)(\sqrt{4}+2)} \\ &= \frac{-4}{(-1)(\sqrt{4}+2)} = \frac{-4}{(-1)(2+2)} = \frac{-4}{(-1)4} = 1 \end{aligned}$$

12) Αν $f(x) = 4x(3-x)^2$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2)-8}{x}$ (επαν.εξ.2012)

Απάντηση

$$f(x+2) = 4(x+2)[3-(x+2)]^2 = 4(x+2)[3-x-2]^2 = 4(x+2)[1-x]^2 = 4(x+2)[1-2x+x^2] = (4x+8)[1-2x+x^2] \\ = (4x+8)[1-2x+x^2] = 4x-8x^2+4x^3+8-16x+8x^2 = 4x^3-12x+8 \text{ και το όριο γίνεται:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3-12x+8-8}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3-12x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2-12}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} (4x^2-12) = 4 \cdot 0 - 12 = -12$$

13) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}$ (εξ.2013)

Απάντηση

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x^2+x+1}-1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}{(x^3+x^2)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x^2+x+1})^2-1^2}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x+1-1}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} \\ = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \frac{-1}{(-1)^2(\sqrt{(-1)^2+(-1)+1}+1)} \\ = \frac{-1}{1(\sqrt{1+(-1)+1}+1)} = \frac{-1}{\sqrt{1}+1} = -\frac{1}{2}$$

14) Αν $f(x) = \frac{x}{x^2+1} + 1$ και $f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1}$ (επαν.εξ.2013)

Απάντηση

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)(x^2+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(1+x)}{(x-1)(x^2+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(1+x)}{(x^2+1)^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1-x}{(x^2+1)^2} = \frac{-1-1}{(1^2+1)^2} = \frac{-2}{2^2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

15) Αν $f(x) = x\sqrt{100-x^2}$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x}$ (εξ.2015)

Απάντηση

Με τον κλασικό τρόπο: πολλαπλασιάζω με συζυγή παράσταση αφού πρώτα βρούμε το $f(x+1) = (x+1)\sqrt{100-(x+1)^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)\sqrt{100-(x+1)^2}-\sqrt{99}}{98x} \cdot \frac{(x+1)\sqrt{100-(x+1)^2}+\sqrt{99}}{(x+1)\sqrt{100-(x+1)^2}+\sqrt{99}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^2\sqrt{100-(x+1)^2}-\sqrt{99}^2}{98x[(x+1)\sqrt{100-(x+1)^2}+\sqrt{99}]} =$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{(\chi^2 + 2\chi + 1)(100 - \chi^2 - 2\chi - 1) - 99}{98\chi[(\chi + 1)\sqrt{100 - (\chi + 1)^2} + \sqrt{99}]} &= \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{(\chi^2 + 2\chi + 1)(99 - \chi^2 - 2\chi) - 99}{98\chi[(\chi + 1)\sqrt{100 - (\chi + 1)^2} + \sqrt{99}]} \\
&= \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{99\chi^2 - \chi^4 - 2\chi^3 + 198\chi - 2\chi^3 - 4\chi^2 - \chi^2 - 2\chi + 99 - 99}{98\chi[(\chi + 1)\sqrt{100 - (\chi + 1)^2} + \sqrt{99}]} = \\
&= \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{-\chi^4 - 4\chi^3 + 94\chi^2 + 196\chi}{98\chi[(\chi + 1)\sqrt{100 - (\chi + 1)^2} + \sqrt{99}]} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{-\chi^4 - 4\chi^3 + 94\chi^2 + 196\chi}{98\chi[(\chi + 1)\sqrt{100 - (\chi + 1)^2} + \sqrt{99}]} = \\
&= \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\chi(-\chi^3 - 4\chi^2 + 94\chi + 196)}{98\chi[(\chi + 1)\sqrt{100 - (\chi + 1)^2} + \sqrt{99}]} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{-\chi^3 - 4\chi^2 + 94\chi + 196}{98[(\chi + 1)\sqrt{100 - (\chi + 1)^2} + \sqrt{99}]} = \\
&= \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{-0^3 - 4 \cdot 0^2 + 94 \cdot 0 + 196}{98[(0 + 1)\sqrt{100 - (0 + 1)^2} + \sqrt{99}]} = \frac{196}{98[\sqrt{99} + \sqrt{99}]} = \frac{196}{98 \cdot 2\sqrt{99}} = \frac{196}{196\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{99}} \cdot \frac{\sqrt{99}}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}
\end{aligned}$$

16) Αν $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ και $f'(x) = 3x^2 + 6x$ να υπολογισθεί το $\lim_{\chi \rightarrow -2} \frac{f'(\chi)}{\sqrt{\chi^2 + 1} - \sqrt{5}}$ (επαν.εξ.2015)

Απάντηση

$$\begin{aligned}
\lim_{\chi \rightarrow -2} \frac{f'(\chi)}{\sqrt{\chi^2 + 1} - \sqrt{5}} &= \lim_{\chi \rightarrow -2} \frac{3\chi^2 + 6\chi}{\sqrt{\chi^2 + 1} - \sqrt{5}} \stackrel{0}{=} \lim_{\chi \rightarrow -2} \frac{3\chi^2 + 6\chi}{\sqrt{\chi^2 + 1} - \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{\chi^2 + 1} + \sqrt{5}}{\sqrt{\chi^2 + 1} + \sqrt{5}} = \lim_{\chi \rightarrow -2} \frac{(3\chi^2 + 6\chi)(\sqrt{\chi^2 + 1} + \sqrt{5})}{(\sqrt{\chi^2 + 1} - \sqrt{5})(\sqrt{\chi^2 + 1} + \sqrt{5})} = \\
&= \lim_{\chi \rightarrow -2} \frac{(3\chi^2 + 6\chi)(\sqrt{\chi^2 + 1} + \sqrt{5})}{(\chi^2 + 1) - 5} = \lim_{\chi \rightarrow -2} \frac{3\chi(\chi + 2)(\sqrt{\chi^2 + 1} + \sqrt{5})}{\chi^2 - 4} = \\
&= \lim_{\chi \rightarrow -2} \frac{3\chi(\chi + 2)(\sqrt{\chi^2 + 1} + \sqrt{5})}{(\chi + 2)(\chi - 2)} = \lim_{\chi \rightarrow -2} \frac{3\chi(\sqrt{\chi^2 + 1} + \sqrt{5})}{\chi - 2} = \frac{3(-2)(\sqrt{(-2)^2 + 1} + \sqrt{5})}{-2 - 2} = \frac{-6(\sqrt{5} + \sqrt{5})}{-4} = \frac{-12\sqrt{5}}{-4} = 3\sqrt{5}
\end{aligned}$$

17) Να υπολογίσετε το $\lim_{\chi \rightarrow 4} \frac{\chi^2 - 6\chi + 8}{\chi - 4}$ (εξ.2016)

Απάντηση

$$\lim_{\chi \rightarrow 4} \frac{\chi^2 - 6\chi + 8}{\chi - 4} \stackrel{0}{=} \lim_{\chi \rightarrow 4} \frac{(\chi - 2)(\chi - 4)}{\chi - 4} = \lim_{\chi \rightarrow 4} (\chi - 2) = 4 - 2 = 2$$

18) Αν $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{4}{3}$ και $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ και $f''(x) = 2x - 2$ να υπολογισθεί το $\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{f'(\chi) + f''(\chi) + 4}{\sqrt{\chi} - 1}$ (επαν.εξ.2016)

Απάντηση

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{f'(\chi) + f''(\chi) + 4}{\sqrt{\chi} - 1} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi^2 - 2\chi - 3 + 2\chi - 2 + 4}{\sqrt{\chi} - 1} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi^2 - 1}{\sqrt{\chi} - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{(\chi^2 - 1)(\sqrt{\chi} + 1)}{(\sqrt{\chi} - 1)(\sqrt{\chi} + 1)} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{(\chi - 1)(\chi + 1)(\sqrt{\chi} + 1)}{(\sqrt{\chi})^2 - 1^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(\sqrt{x}+1) = (1+1)(\sqrt{1}+1) = 4$$

19) Να υπολογίσετε το

(εξ.2017)

Απάντηση

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$$

$$\stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 1+2 = 3$$

20) Αν $f(x) = x^3 - 3x + 2$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2-1}$

(επαν.εξ.2017)

Απάντηση

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^2-1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x+1} = \frac{1^2+1-2}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

Με παραγοντοποίηση

$$x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2 = x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = x(x-1)(x+1) - 2(x-1) = (x-1)\{x(x+1) - 2\} = (x-1)(x^2 + x - 2)$$

$$x^3 - 3x + 2 = x^3 + 0x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x^2+x-2) \quad \text{Με σχήμα Horner}$$

1	0	-3	2	1
	1	1	-2	
1	1	-2	0	

21) Αν $f(x) = \sqrt{x^2+4} + 2018$ και $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+4)f'(x)-2x}{x^2}$

(εξ.2018)

Απάντηση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+4)f'(x)-2x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+4)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+4)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{2x\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(x^2+4)x - 2x\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+4)x - 2x\sqrt{x^2+4}}{x^2(\sqrt{x^2+4})} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[(x^2+4) - 2\sqrt{x^2+4}]}{x^2(\sqrt{x^2+4})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+4) - 2\sqrt{x^2+4}}{x(\sqrt{x^2+4})} \stackrel{0}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+4) - 2\sqrt{x^2+4}}{x(\sqrt{x^2+4})} \cdot \frac{(x^2+4) + 2\sqrt{x^2+4}}{(x^2+4) + 2\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+4)^2 - (2\sqrt{x^2+4})^2}{x(\sqrt{x^2+4})[(x^2+4) + 2\sqrt{x^2+4}]} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+4)^2 - 4(x^2+4)}{x(\sqrt{x^2+4})[(x^2+4) + 2\sqrt{x^2+4}]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+4)(x^2+4-4)}{x(\sqrt{x^2+4})[(x^2+4) + 2\sqrt{x^2+4}]} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+4)x}{x(\sqrt{x^2+4})[(x^2+4) + 2\sqrt{x^2+4}]} = \frac{(0^2+4)0}{(\sqrt{0^2+4})[(0^2+4) + 2\sqrt{0^2+4}]} = \frac{4 \cdot 0}{(\sqrt{4})[4 + 2\sqrt{4}]} = \frac{4 \cdot 0}{2[4 + 2\sqrt{4}]} = \frac{4 \cdot 0}{16} = \frac{0}{4} = 0 = \end{aligned}$$

{Παρατήρηση: Αν θυμηθούμε από την Α λυκείου ότι για $x \geq 0$ ισχύει $x = (\sqrt{x})^2$ Επειδή $x^2 + 4 > 0$ ισχύει: $x^2 + 4 = (\sqrt{x^2 + 4})^2$ και κάνοντας αυτήν την αντικατάσταση στον αριθμητή, γίνεται

ποιο απλός ο υπολογισμός του ορίου.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+4})^2 - 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x^2+4})^2 - 2x}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x^2+4}-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x^2+4}-2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)}{x(\sqrt{x^2+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+4})^2-2^2}{x(\sqrt{x^2+4}+2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+4-4}{x(\sqrt{x^2+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2} = \frac{0}{\sqrt{0^2+4}+2} = \frac{0}{4} = 0 \quad \text{αυτή τη λύση πρότεινε η επιτροπή εξετάσεων}$$

22) Αν $f(x) = x^2 + \frac{16}{x} - 17$ και $f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2}$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f'(x)}{\sqrt{4x+1}-3}$ (επαν.εξ.2018)

Απάντηση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f'(x)}{\sqrt{4x+1}-3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(2x - \frac{16}{x^2})}{\sqrt{4x+1}-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - x^2 \frac{16}{x^2}}{\sqrt{4x+1}-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 16}{\sqrt{4x+1}-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 16}{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{4x+1}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x^3 - 2^3)(\sqrt{4x+1}+3)}{(\sqrt{4x+1})^2 - 3^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x^2 + x \cdot 2 + 2^2)(\sqrt{4x+1}+3)}{4x+1-9} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x^2 + x \cdot 2 + 2^2)(\sqrt{4x+1}+3)}{4x-8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{4x+1}+3)}{2} = \frac{(2^2 + 2 \cdot 2 + 4)(\sqrt{4 \cdot 2 + 1} + 3)}{2} \\ &= \frac{12(\sqrt{9} + 3)}{2} = 6(3 + 3) = 36 \end{aligned}$$

23) Αν $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ και $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)}$ (εξ.2019)

Απάντηση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-6x+3}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)(\sqrt{x}+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{[(\sqrt{x})^2-1^2]x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{(x-1)x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{(x-1)^2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(\sqrt{x}+1)}{x} = \frac{3(\sqrt{1}+1)}{1} = 6 \end{aligned}$$

24) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x}$ (επαν.εξ.2019)

Απάντηση

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x} = \frac{3+3}{3} = 2$$

25) Αν $f(x) = (x^2 + 4x + 5)^{20}$ και $f'(x) = 40(x^2 + 4x + 5)^{19}(x + 2)$ να υπολογισθεί το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$ (εξ.2020)

Απάντηση

Η άσκηση αυτή μπόρεσε για να λυθεί με χρήση των παραγώγων αφού $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = f'(-2)$

Διαφορετικά πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα:

$\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)(\alpha^{n-1} \beta^0 + \alpha^{n-2} \beta^1 + \alpha^{n-3} \beta^2 + \alpha^{n-4} \beta^3 + \dots + \alpha^1 \beta^{n-2} + \alpha^0 \beta^{n-1})$ που δεν την έχετε διδαχθεί'

26) Αν $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 16$ και $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 16}{f'(x)}$ (επαν.εξ.2020)

Απάντηση

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 16}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 16 - 16}{3x^2 - 12x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{3x^2 - 12x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x^2 - 6x + 9)}{3(x^2 - 4x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)^2}{3(x-1)(x-3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{3(x-1)} = \frac{3(3-3)}{3(3-1)} = \frac{0}{6} = 0$$

27) Αν $f(x) = x^2 - 3x + 2$ και $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$ να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ (εξ.2021)

Απάντηση

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

28) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ (επαν.εξ.2021)

Απάντηση

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στα ζητούμενα σημεία.

i) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{αν } x \neq 3 \\ -5 & \text{αν } x = 3 \end{cases}$ αν είναι συνεχής στο $x_0 = 3$

Λύση

Για να είναι συνεχής στο $x=3$ πρέπει το όριο της συνάρτησης στο $x=3$ να υπάρχει και να είναι ίσο με την τιμή της στο ίδιο σημείο το $x=3$, δηλαδή να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 1) = 3^2 + 1 = 3 + 1 = 10$ και $f(3) = -5$ άρα $10 \neq \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3) = -5$ και η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $x=3$

$$\text{ii) } g(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - x - 4}{x + 1} & \text{αν } x \neq -1 \\ -7 & \text{αν } x = -1 \end{cases} \quad \text{αν είναι συνεχής στο } x_0 = -1$$

Λύση

Για να είναι συνεχής στο $x=-1$ πρέπει το όριο της συνάρτησης στο $x=-1$ να υπάρχει και να είναι ίσο με την τιμή της στο ίδιο σημείο το $x=-1$, δηλαδή να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - x - 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x+1)(x-\frac{4}{3})}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} 3(x - \frac{4}{3}) = \lim_{x \rightarrow -1} (3x - 4) = 3(-1) - 4 = -3 - 4 = -7$$

$f(-1) = -7$ άρα $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = -7$ και η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x=-1$

$$\underline{2)} \quad \text{Δίνεται η συνάρτηση: } f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1}, & x \neq -1 \\ 3\lambda + 1, & x = -1 \end{cases}$$

i) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (απ. -5)

ii) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = -1$ (απ. $\lambda = -2$)

Λύση

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)(x-\frac{3}{2})}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} 2(x - \frac{3}{2}) = 2(-1 - \frac{3}{2}) = -2 - 3 = -5$$

$$\text{ii) } f(-1) = 3\lambda + 1$$

Για να είναι συνεχής στο $x=-1$ πρέπει το όριο της συνάρτησης στο $x=-1$ να υπάρχει και να είναι ίσο με την τιμή της στο ίδιο σημείο το $x=-1$, δηλαδή να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ άρα

πρέπει $3\lambda + 1 = -5 \Leftrightarrow 3\lambda = -5 - 1 \Leftrightarrow 3\lambda = -6 \Leftrightarrow \lambda = -2$ άρα είναι συνεχής αν $\lambda = -2$

$$\underline{3)} \quad \text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}, & x \neq 3 \\ \lambda + 1, & x = 3 \end{cases}$$

Να βρείτε: i) το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ii) την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 3$

Λύση

$$i) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-1) = 3-1 = 2$$

ii) Για να είναι συνεχής στο $x=3$ πρέπει το όριο της συνάρτησης στο $x=3$ να υπάρχει και να είναι ίσο με την τιμή της στο ίδιο σημείο το $x=3$, δηλαδή να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2 \\ f(3) = \lambda + 1 \end{cases} \text{πρέπει } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \text{ άρα } \lambda + 1 = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2 - 1 = 1 \text{ είναι συνεχής αν } \lambda = 1$$

$$4) \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1}, & x \neq 1 \\ \lambda - 2, & x = 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε: i) το $f(0)$ και το $f(2)$ ii) το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1}$ iii) την τιμή του

$\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. (παν. 2003)

Λύση

$$i) f(0) = \frac{0^2 + 6 \cdot 0 - 7}{0 - 1} = \frac{-7}{-1} = 7 \quad f(2) = \frac{2^2 + 6 \cdot 2 - 7}{2 - 1} = \frac{4 + 12 - 7}{2 - 1} = \frac{9}{1} = 9$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+7)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+7) = 1+7 = 8$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 8 \\ f(1) = \lambda - 2 \end{cases} \text{πρέπει } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{ άρα } \lambda - 2 = 8 \Leftrightarrow \lambda = 2 + 8 = 10 \text{ είναι συνεχής αν } \lambda = 10$$

5) Να υπολογίσετε την παράμετρο a ώστε η συνάρτηση $\varphi(x)$ να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} & \text{αν } x \neq 2 \\ a & \text{αν } x = 2 \end{cases} \text{ και η } g(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 3 & \text{αν } x \neq 1 \\ 5a - a^2 & \text{αν } x = 1 \end{cases} \text{ στο } x_0 = 1$$

Λύση

$$\lim_{x \rightarrow 2} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-4) = 2-4 = -2$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2} \varphi(x) = -2 \\ \varphi(2) = a \end{cases} \text{είναι συνεχής αν } \lim_{x \rightarrow 2} \varphi(x) = \varphi(2) \text{ άρα αν } a = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + 3) = 1^2 + a \cdot 1 + 3 = 4 + a \quad \text{άρα} \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4 + a$$

$$g(1) = 5a - a^2 \quad \text{οπότε πρέπει } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) \text{ ή } 4 + a = 5a - a^2 \Leftrightarrow a^2 - 5a + a + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Leftrightarrow (a-2)^2 = 0 \Leftrightarrow a-2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

$$6) \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 + 3x^2 - x + 2}{x^2 - 4} & \text{αν } x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +2), \text{ με } \lambda \in \mathbb{R} \\ \lambda & \text{αν } x = -2 \end{cases}$$

Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = -2$

Λύση

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 3x^2 - x + 2}{x^2 - 4} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x^2 - x + 1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x + 1}{x - 2} = \frac{2(-2)^2 - (-2) + 1}{-2 - 2} = -\frac{11}{4}$$

$$f(-2) = \lambda \quad \text{οπότε για να είναι συνεχής στο } x = -2 \text{ πρέπει: } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) \text{ ή } \lambda = -\frac{11}{4}$$

$$7) \text{ Δίνεται η συνάρτηση: } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ a - 2, & x = 0 \end{cases} \quad \text{i) Να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

ii) Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - 1^2}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1 - 1}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \frac{0}{\sqrt{0^2 + 1} + 1} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \\ f(0) = a - 2 \end{cases} \quad \text{οπότε για να είναι συνεχής στο } x = 0 \text{ πρέπει: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \text{ ή}$$

$$a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

8) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι συνεχής στο $x = 1$ η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{3x+1} - 2} & \text{αν } x \in [0, 1) \cup (1, +\infty) \\ \lambda & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Λύση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{3x+1} - 2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{3x+1} + 2)}{(\sqrt{3x+1} - 2)(\sqrt{3x+1} + 2)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[(\sqrt{x})^2 - 1^2](\sqrt{3x+1} + 2)}{[(\sqrt{3x+1})^2 - 2^2](\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(\sqrt{3x+1} + 2)}{(3x + 1 - 4)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(\sqrt{3x+1} + 2)}{(3x - 3)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(\sqrt{3x+1} + 2)}{3(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} + 2}{3(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{3 \cdot 1 + 1} + 2}{3(\sqrt{1} + 1)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{2}{3} \\ f(1) = \lambda \end{cases} \quad \text{οπότε για να είναι συνεχής στο } x = 1 \text{ πρέπει: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{ ή } \lambda = \frac{2}{3}$$