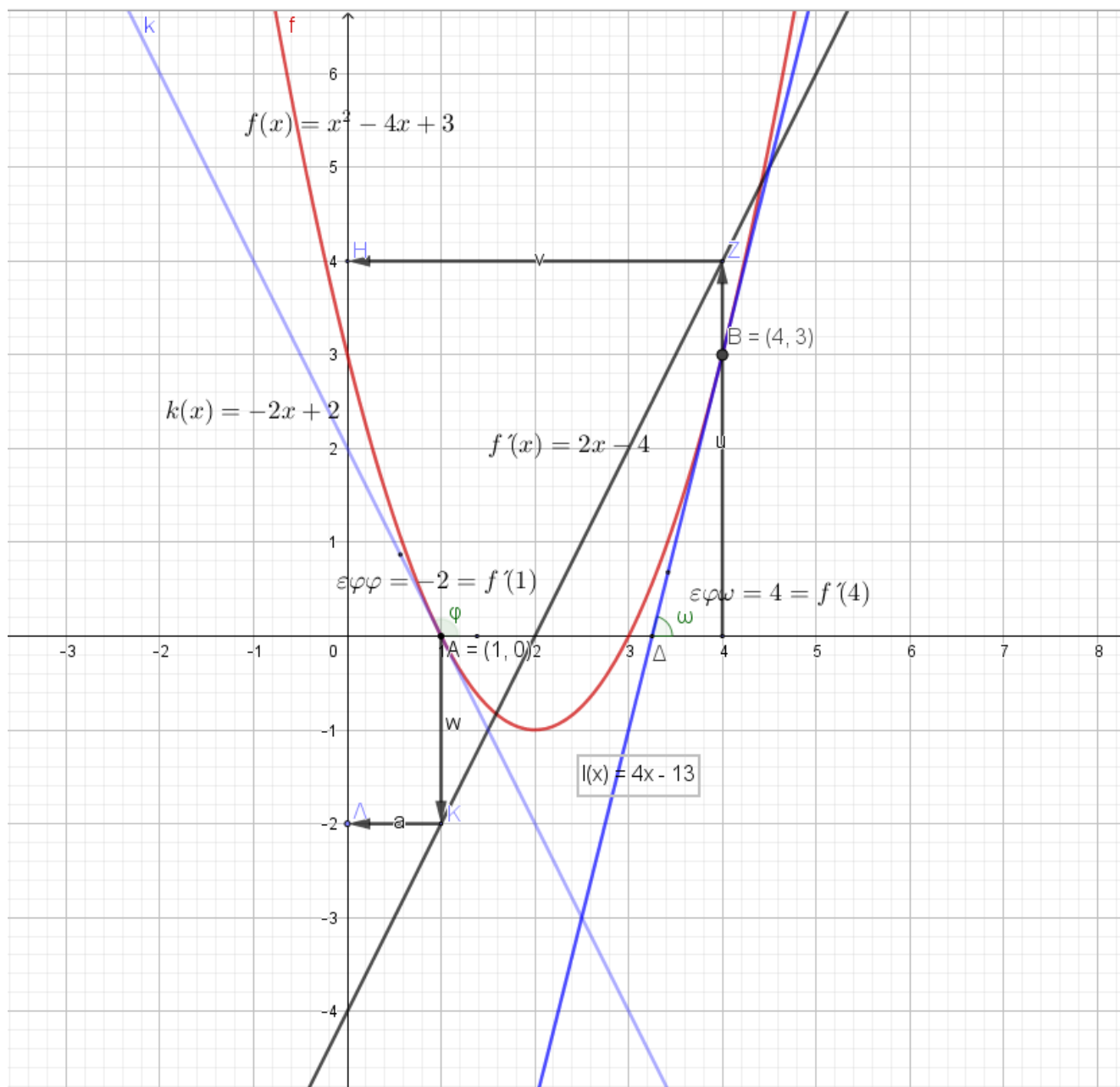


Αγαπητέ μαθητή/μαθήτρια . Για να ασχοληθείς, η άποψή μου είναι ότι, πρέπει να κλείσεις το κινητό .

Για λάθη ,παραλήψεις , ασάφειες στην τάξη ή στο katsarosarist@gmail.com Για κάθε άσκηση που δεν μπορείς να λύσεις ,αφού δεις τη λύση, σκέψου ποια σημεία της θεωρίας δεν είχες κατά νου και επανάληψη-επανάληψη-επανάληψη.



1. Στα παραπάνω έχουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x + 3$, τη γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου της $f'(x) = 2x - 4$ και τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών που εφάπτονται στη συνάρτηση στα σημεία $A(1,0)$ με εξίσωση $k(x) = -2x + 2$ και στο σημείο $B(4,3)$ με εξίσωση $l(x) = 4x - 13$. Διαπιστώνουμε από το γράφημα αυτό που γνωρίζουμε και θα εφαρμόζουμε στις ασκήσεις ότι: Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που εφάπτεται της γραφικής παράστασης στο σημείο $A(1,0)$ (δηλαδή ο συντελεστής του x στην εξίσωση της ευθείας $k(x) = -2x + 2$) είναι ίσος με την εφαπτόμενη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x και ίσος με την τιμή της πρώτης

παραγώγου στο $x=1$ δηλαδή το $f'(1) = -2 = \text{εφφ}$. Το ίδιο ισχύει για το σημείο $B(4,3)$ $f'(4) = 4 = \text{εφω}$ (δές και τα βέλη)

2. Το ότι το σημείο $B(4,3)$ είναι κοινό σημείο της εφαπτόμενης ευθείας και της συνάρτησης

σημαίνει ότι επαληθεύει τους τύπους και των δύο συναρτήσεων : $f(4) = 3$ και $l(4) = 3$

$f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$ και $l(4) = 4 \cdot 4 - 13 = 16 - 13 = 3$ Αυτό το χρησιμοποιούμε όταν σε ασκήσεις μας ζητούν να υπολογίσουμε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στην συνάρτηση ή και κάποιες παραμέτρους. Άλλοτε μας δίνουν το σημείο και άλλοτε μας δίνουν την τιμή της πρώτης παραγώγου με έμμεσο τρόπο.

Αν μας ζητούσε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στο σημείο $B(4, f(4))$ Έστω $\psi = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στο σημείο αυτό. Υπολογίζουμε το $f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$ (οπότε το σημείο είναι $B(4,3)$) και το $f'(4) = 2 \cdot 4 - 4 = 8 - 4 = 4$ γνωρίζοντας ότι αυτός ο αριθμός (δηλαδή η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης στο σημείο $B(4,3)$) είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που εφάπτεται στο $B(4,3)$ και η εξίσωση γράφεται **$\psi = 4x + \beta$**

Επειδή όμως το σημείο $B(4,3)$ είναι και σημείο της ευθείας, όπως προαναφέρθηκε, επαληθεύει την εξίσωσή της, δηλαδή ισχύει: $3 = 4 \cdot 4 + \beta \Leftrightarrow 3 - 16 = \beta \Leftrightarrow -13 = \beta$ και συνεπώς η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο $B(4,3)$ είναι **$\psi = 4x - 13$**

Την εξίσωση μπορούμε να την προσδιορίσουμε ποιο εύκολα χρησιμοποιώντας τον τύπο: **$\psi - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$** τον οποίο χρησιμοποιούμε όταν γνωρίζουμε ένα σημείο από το οποίο διέρχεται η ευθεία, εδώ το $(4, f(4)) = (4, 3)$

$$\psi - f(4) = f'(4)(x - 4) \Leftrightarrow \psi - 3 = 4(x - 4) \Leftrightarrow \psi - 3 = 4x - 16 \Leftrightarrow \psi = 4x - 16 + 3 \Leftrightarrow \psi = 4x - 13$$

(Είναι αποδεκτή η χρήση του τύπου αλλά δεν τον έχετε διδαχθεί αφού είναι στα μαθηματικά κατεύθυνσης της Β γενικού λυκείου). Αν η διατύπωση της άσκησης ήταν:

<<να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης στο σημείο $B(4,3)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi = 4x + 2$ >>

Θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι **οι παράλληλες ευθείες έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης** άρα

$f'(4) = 4$ και συνεχίζουμε όπως περιγράφεται παραπάνω.

Γιαυτό πρέπει να γνωρίζουμε τη θεωρία που θα τη βρείτε παρακάτω πάνω στα σχήματα και στο αρχείο ,εξίσωση εφαπτόμενης>σε διαφορετικά διαγράμματα για να μη γίνουν πολύπλοκα, πιστεύοντας ότι θα τα κατανοήσετε ποιο καλά. Το μέλλον θα δείξει.)

Δεν ξεχνάμε τα πρωταρχικά:

Τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{δηλαδή αν βρούμε σε μια άσκηση κάτι σαν αυτό } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \text{ να}$$

πάει το μυαλό μας ότι είναι η $f'(3)$, η παράγωγος στο σημείο και να την υπολογίσουμε από τα δεδομένα της άσκησης με άλλο τρόπο.

2) Τους ορισμούς της μονοτονίας (αύξουσα-φθίνουσα) και το πρακτικό τους αποτέλεσμα που είναι η δυνατότητά μας να λύνουμε ανισώσεις, να διατάσσουμε αριθμούς.

Για να είναι η συνάρτηση **γνησίως αύξουσα** (συμβολικά $\nearrow$) σε ένα διάστημα Δ πρέπει για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ να ισχύει **$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$** και αντίστροφα

Αν η συνάρτηση είναι **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$$

Για να είναι η συνάρτηση **γνησίως φθίνουσα** (συμβολικά $\searrow$) σε ένα διάστημα Δ πρέπει για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ να ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ και αντίστροφα

Αν η συνάρτηση είναι **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2$$

Για κάθε **μονότονη** συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει:

αν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Π.χ. α) Αν f γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(-4)$ και $f(3)$

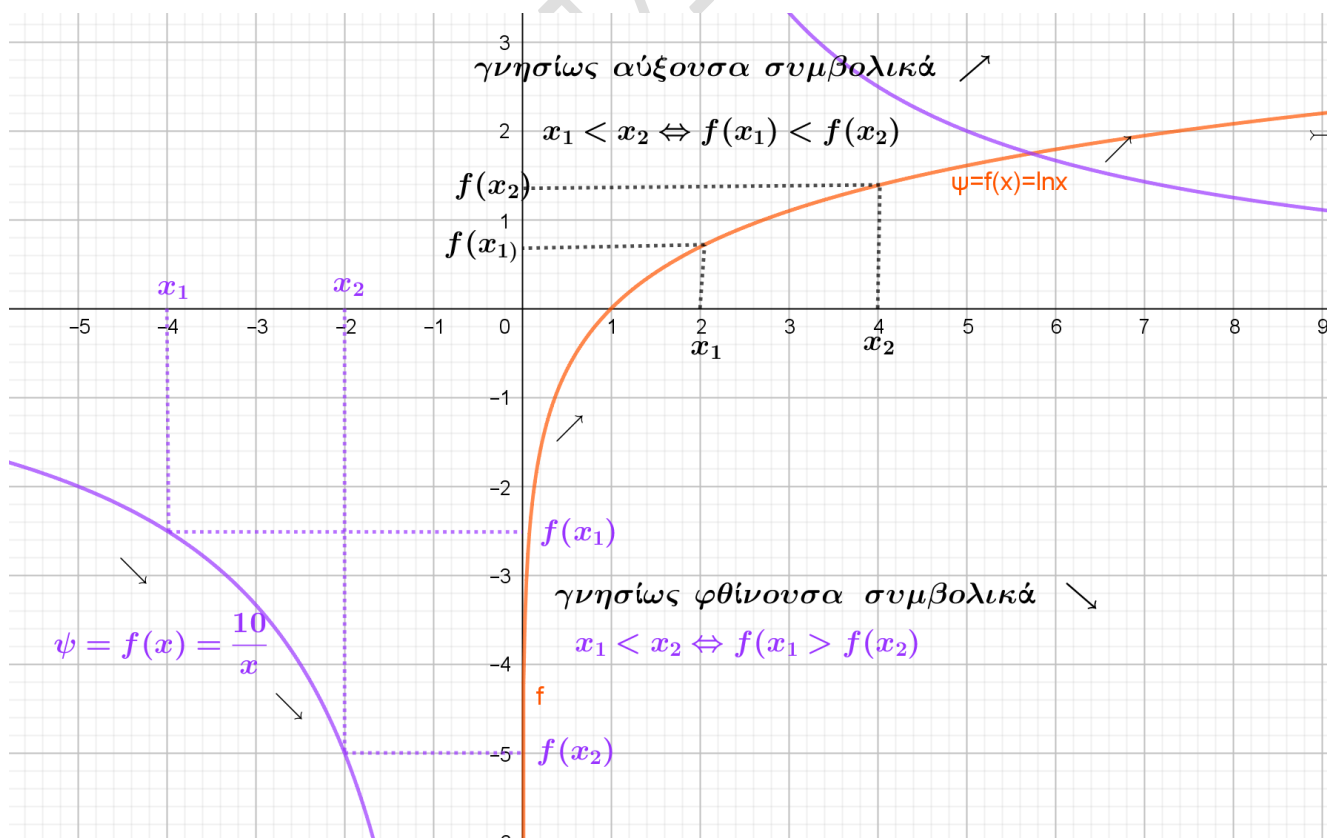
Επειδή η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα για $x_1 = -4 < x_2 = 3 \Leftrightarrow f(-4) > f(3)$

Β) Αν f γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της να δείξετε ότι: $f(x) > f(3x-2)$ για κάθε $x > 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{θυμάμαι: } \alpha > \beta \text{ αν } \alpha - \beta > 0 \text{ η διαφορά τους είναι θετικός αριθμός} \\ \alpha < \beta \text{ αν } \alpha - \beta < 0 \text{ η διαφορά τους είναι αρνητικός αριθμός} \end{array} \right\}$$

Αν $x < 3x-2 \Leftrightarrow x-3x+2 < 0 \Leftrightarrow -2x+2 < 0 \Leftrightarrow -x+1 < 0 \Leftrightarrow -x < -1 \Leftrightarrow x > 1$ που από τα

δεδομένα ισχύει άρα επειδή είναι **γνησίως φθίνουσα** από τον ορισμό θα ισχύει για $x < 3x-2 \Rightarrow f(x) > f(3x-2)$ για κάθε $x > 1$



Γ) Αν σε μια άσκηση μου ζητήσει να βρω τις τιμές που είναι **πάνω από τον άξονα χχ'** λύνω την ανίσωση

$\phi(x) > 0$ ενώ για κάτω από τον $\chi\chi'$ λύνω την ανίσωση $\phi(x) < 0$

Δ) Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $\chi\chi'$ στις τιμές που βρίσκουμε λύνοντας την $\phi(x) = 0$

Ε) Εστω η συνάρτηση $\phi(x) = x^4 + 4x + 2020$ Αν παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=-1$ να δείξετε ότι

$$x^4 + 4x \geq -3 \quad \{ \text{Βάσει του ορισμού του ελαχίστου έχω ότι, για κάθε } x \text{ του πεδίου ορισμού}$$

(περιγράψω) η τιμή του κάθε x (τιμή του x είναι η εικόνα, το $\psi = \phi(x)$) θα είναι μεγαλύτερη ή ίση, από την τιμή που παίρνω στο ελάχιστο (εδώ στο $x=-1$) αυτό το γράφουμε μαθηματικά:}

Επειδή η συνάρτηση παρουσιάζει στο $x=-1$ ολικό ελάχιστο ισχύει : $\phi(x) \geq \phi(-1)$ αλλά

$$\phi(x) = x^4 + 4x + 2020 \quad \text{και} \quad \phi(-1) = (-1)^4 + 4(-1) + 2020 = 2017 \quad \text{άρα}$$

$$x^4 + 4x + 2020 \geq 2017 \Leftrightarrow x^4 + 4x \geq 2017 - 2020 \Leftrightarrow x^4 + 4x \geq -3$$

Επίκαιρο θέμα σαν β θέμα: (Αν ήταν στην ύλη μας ποιο σωστό θα ήταν η συνάρτηση να ήταν εκθετική)

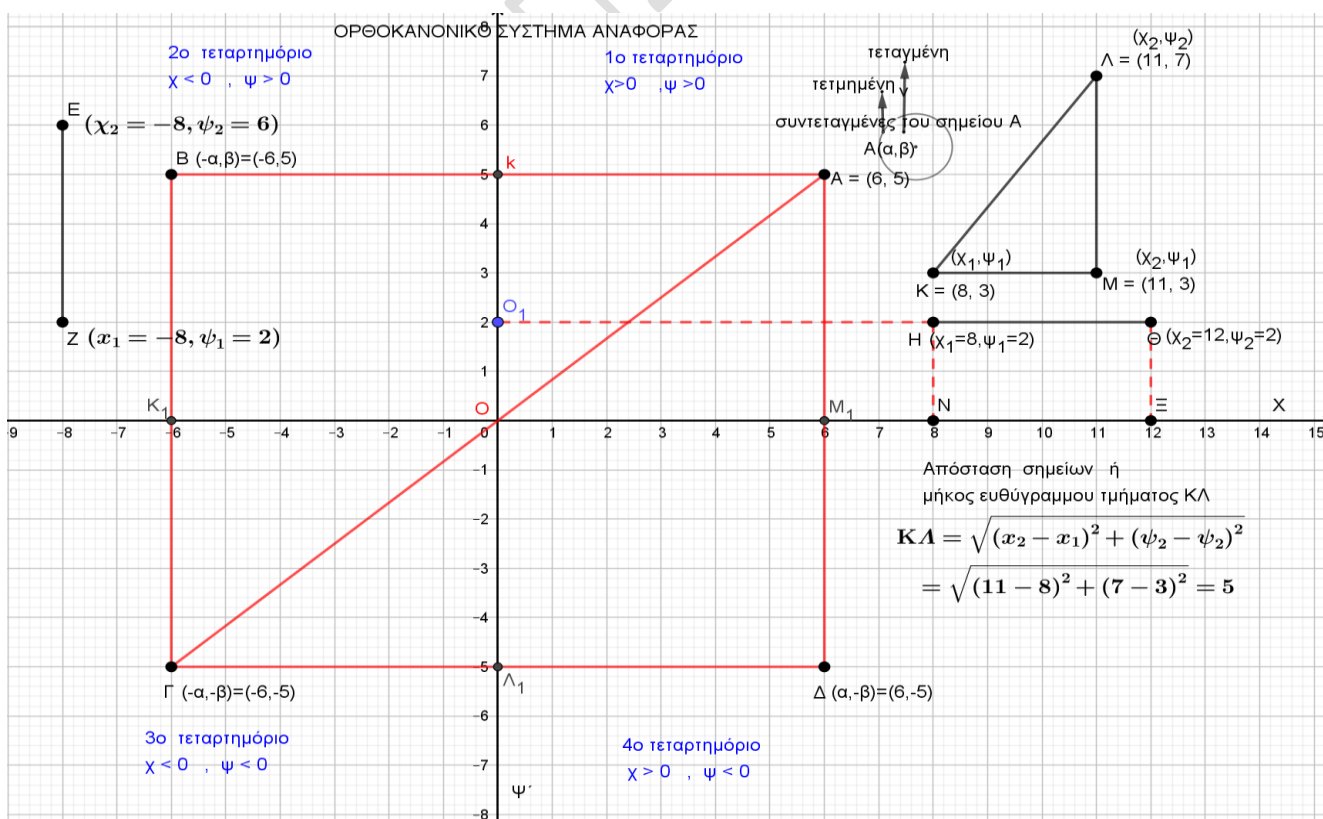
Τον Μάρτιο παρουσιάστηκε έξαρση στα κρούσματα του ιού covid19. Ο πληθυσμός που προσβλήθηκε από τον ιό δίνεται από τη συνάρτηση : $f(t) = -t^2 + 40t + 30$ $t \in [1, 30]$ όπου t ο χρόνος σε ημέρες και f ο πληθυσμός σε εκατοντάδες.

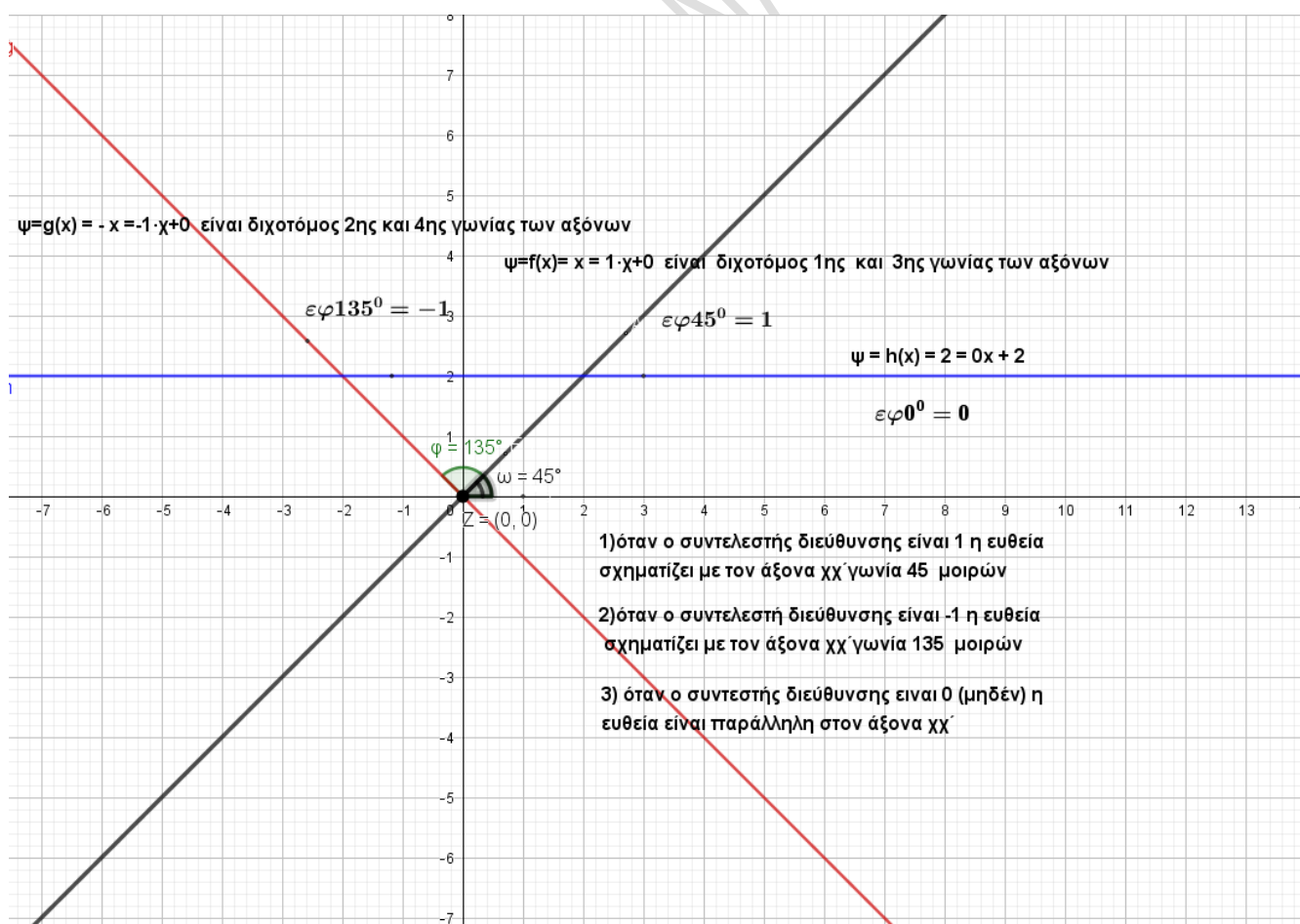
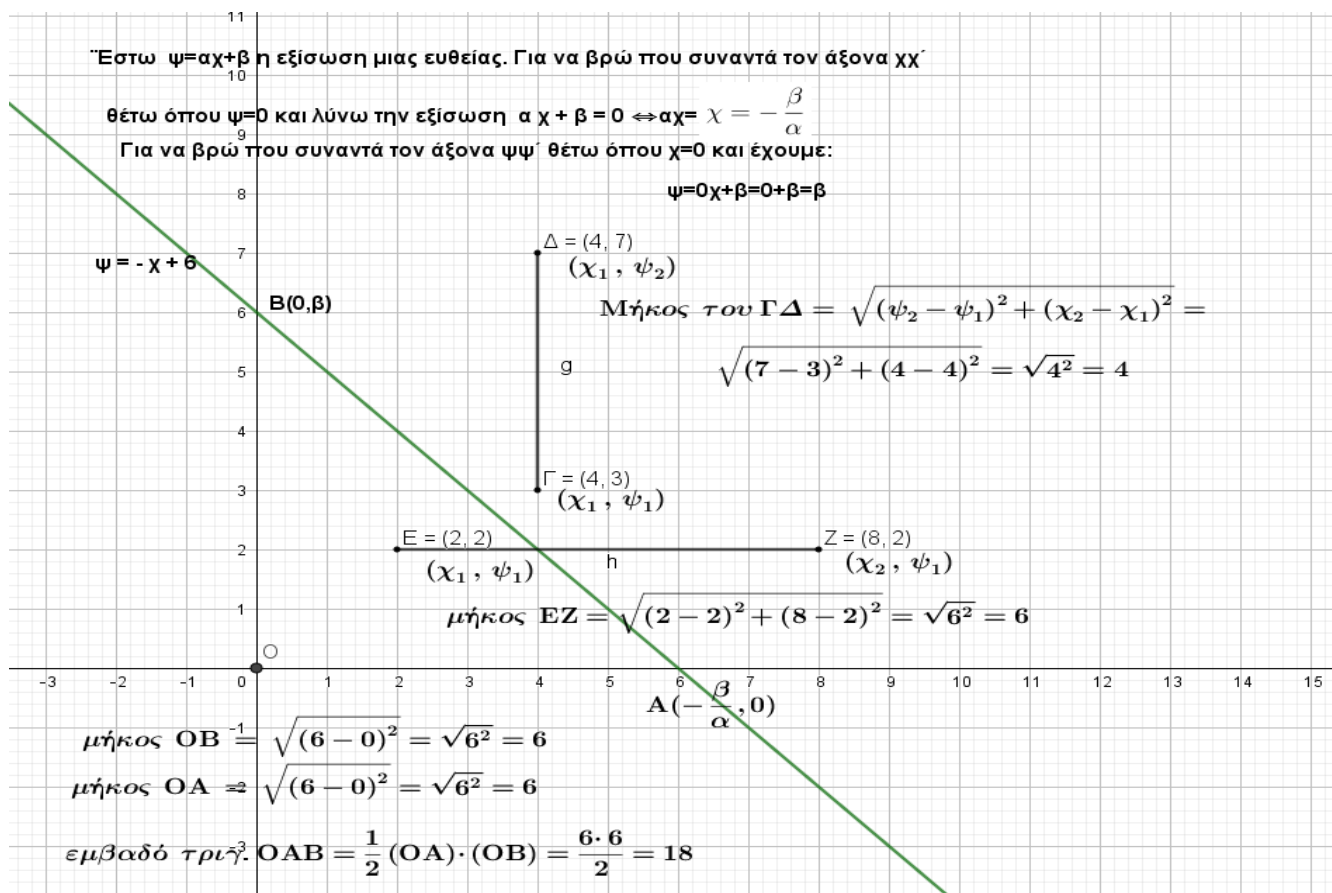
Α) Να βρείτε πόσα ήταν τα κρούσματα στην αρχή και πόσα στο τέλος του μήνα.

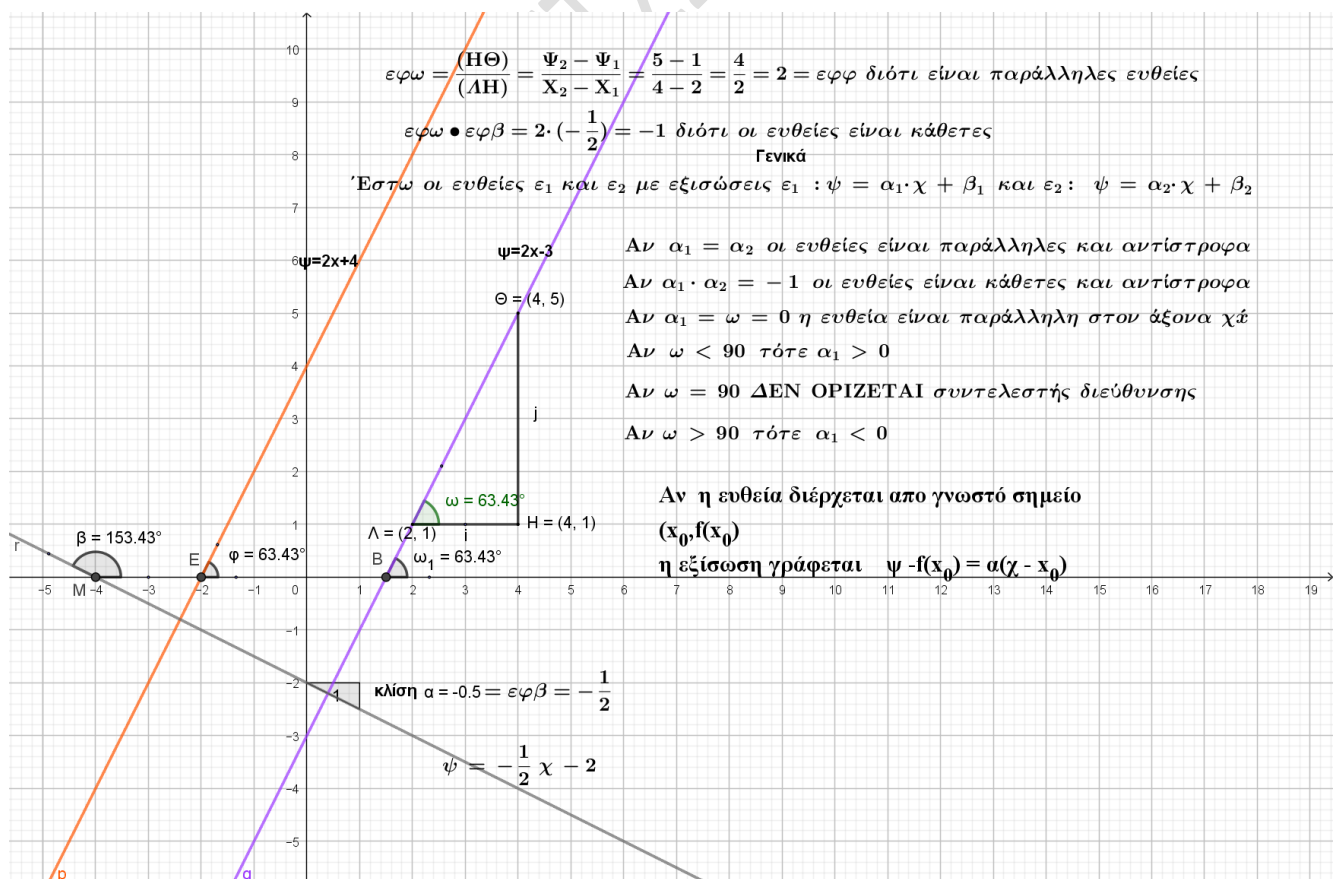
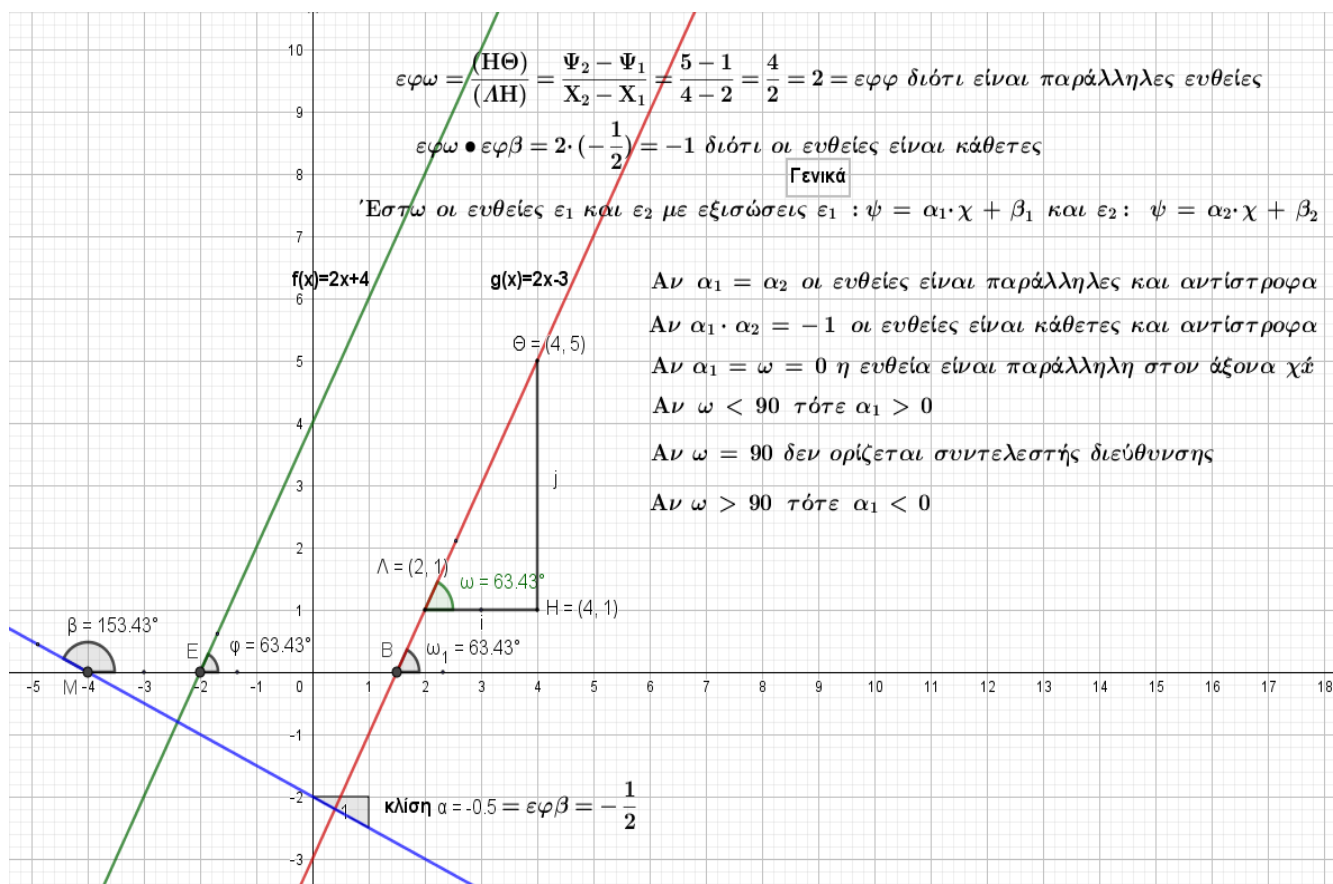
Β) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής των κρουσμάτων την 10^η και την 25^η μέρα και να τα ερμηνεύσετε.

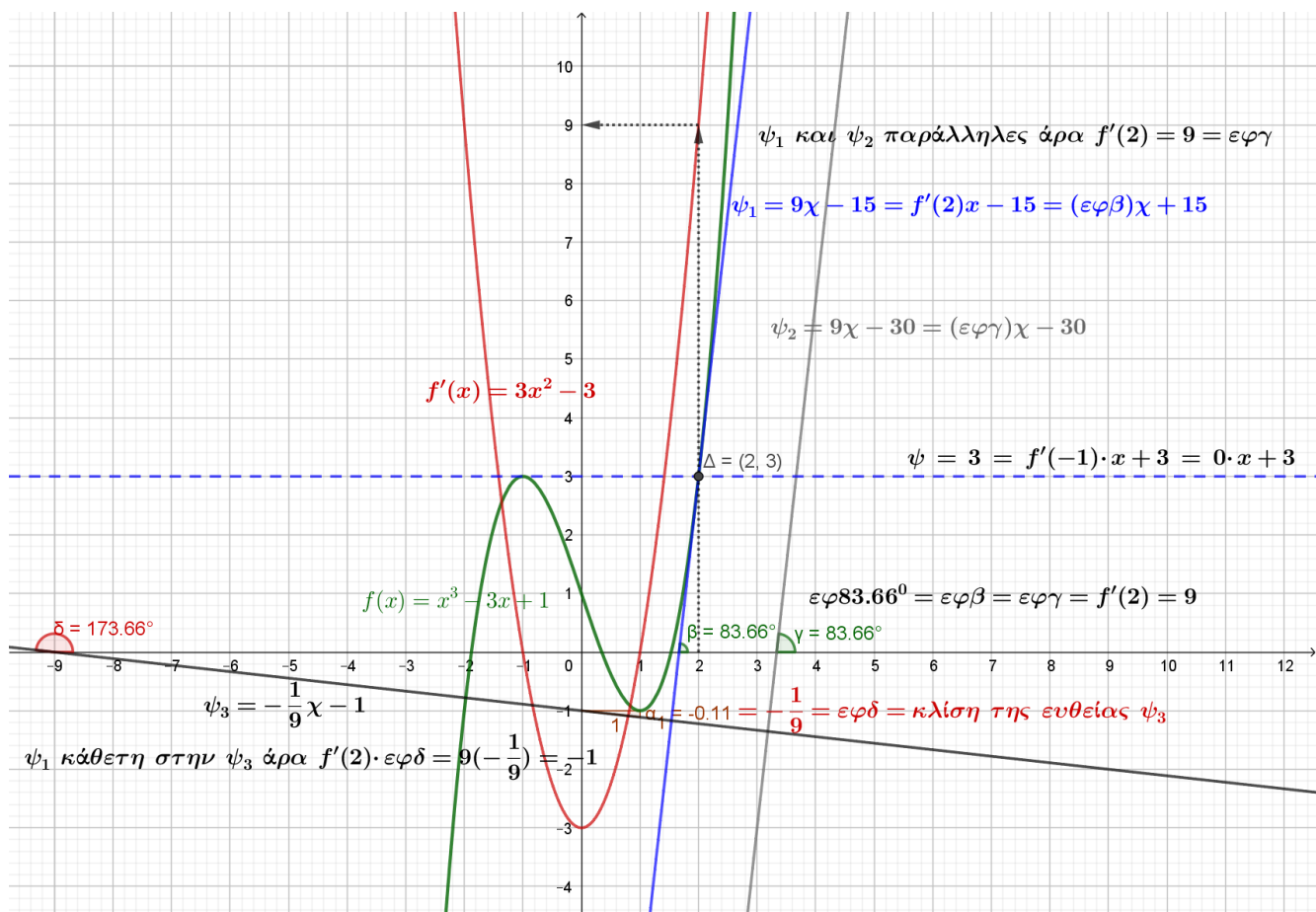
Γ) Να βρείτε ποια μέρα παρουσιάστηκαν τα περισσότερα κρούσματα.

Ξεκινήστε από τις τελευταίες που είναι του ΕΠΑΛ καλή δύναμη!









- 1) **2002, Θέμα 2^ο** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ γ. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f .
 δ. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y=2x+5$

1) ΛΥΣΗ

α) Πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός, άρα $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ άρα Π.Ο. = $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x+1} = \frac{2 \cdot 3}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\gamma) f'(x) = \left(\frac{2x}{x+1} \right)' = \frac{(2x)'(x+1) - 2x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1) - 2x(1+0)}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

δ) (σχόλιο: Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι οι παράλληλες ευθείες έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, που είναι ο συντελεστής του x . Λέγεται κλίση της ευθείας και είναι ίσος με την εφαπτόμενη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$. Όταν η ευθεία εφάπτεται της γραφικής παράστασης σε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι ίσος με την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης στο σημείο επαφής. Έτσι αφού ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $y=2x+5$ προς την οποία θέλουμε να είναι παράλληλη, είναι το 2, πρέπει για τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που εφάπτεται της καμπύλης στο $A(x_0, f(x_0))$ να ισχύει $f'(x_0) = 2$)

Η εφαπτόμενη της C_f (με C_f συμβολίζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f) και η ευθεία $\psi=2x+5$ είναι παράλληλες άρα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης : $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2(x+1)^2 \Leftrightarrow$

$$(x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1\text{ος τρόπος } x+1 = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \\ x+1 = -1 \Leftrightarrow x = -2 \end{cases} \\ 2\text{ος τρόπος } x^2 + 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+2 = 0 \text{ ή } x = -2 \end{cases} \end{cases}$$

(Θέτω τις τιμές $x=0$ και $x=-2$ στον τύπο της συνάρτησης και βρίσκω τις τεταγμένες, άρα τα σημεία

είναι $A(0, f(0)) = (0, \frac{2 \cdot 0}{0+1}) = (0, 0)$ και $B(-2, f(-2)) = (-2, \frac{2(-2)}{-2+1}) = (-2, 4)$

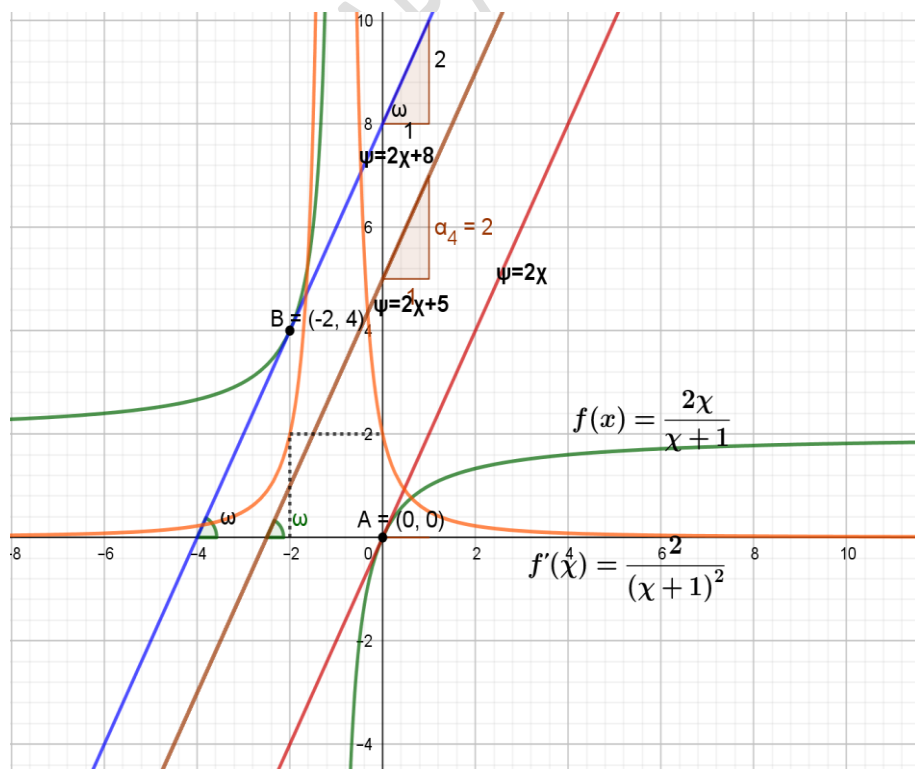
Έστω ότι στο σημείο $A(0,0)$ η εφαπτόμενη της καμπύλης έχει εξίσωση $\psi = \alpha x + \beta$ με $\alpha = f'(0)$ άρα $\psi = f'(0)x + \beta$ αλλά $f'(0) = \frac{2}{(0+1)^2} = \frac{2}{1} = 2$ οπότε η εξίσωση γίνεται : $\psi = 2x + \beta$ Το σημείο $A(0,0)$ είναι κοινό σημείο της καμπύλης και της ευθείας άρα επαληθεύει τις εξισώσεις και των δύο. **{υπενθύμιση: εξίσωση της γραμμής του γράφηματος ή εξίσωση της γραφικής παράστασης είναι ο εκάστοτε τύπος $\psi = f(x)$ }. Θέτουμε τις συντεταγμένες του σημείου $A(0,0)$ στην εξίσωση της ευθείας και υπολογίζουμε το β }** άρα: $0 = 2 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 0$ και η ευθεία έχει εξίσωση $\psi = 2x$

Έστω $\psi = \alpha x + \beta$ με $\alpha = f'(-2)$ άρα $\psi = f'(-2)x + \beta_1$ η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται της γραφικής παράστασης στο σημείο $B(-2,4)$ έχουμε: $f'(-2) = \frac{2}{(-2+1)^2} = 2$ οπότε $\psi = 2x + \beta_1$ Το σημείο $B(-2,4)$ είναι κοινό σημείο της καμπύλης και της ευθείας άρα επαληθεύει τις εξισώσεις και των δύο. άρα $4 = 2 \cdot (-2) + \beta_1 \Leftrightarrow 4 = -4 + \beta_1 \Leftrightarrow \beta_1 = 8$ και η εξίσωση γίνεται $\psi = 2x + 8$

2ος τρόπος Μια ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης α που διέρχεται από ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση την $\psi - f(x_0) = \alpha(x - x_0)$ Όταν το σημείο, έστω το $A(x_0, f(x_0))$, είναι αυτό όπου εφάπτεται η ευθεία στο γράφημα της συνάρτησης, τότε γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης α είναι ίσος με $f'(x_0)$ και η εξίσωση γίνεται : $\psi - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ Συνεπώς για τα δεδομένα της άσκησης έχουμε το σημείο είναι $B(-2,4)$ και $f'(-2) = 2$ άρα

$$\psi - 4 = 2[x - (-2)] \Leftrightarrow \psi - 4 = 2(x + 2) \Leftrightarrow \psi - 4 = 2x + 4 \Leftrightarrow \psi = 2x + 4 + 4 \Leftrightarrow \psi = 2x + 8$$

Στο παρακάτω σχεδιάστηκαν τα γραφήματα που υπολογίσαμε παραπάνω θεωρητικά.



Πράσινο το γράφημα της συνάρτησης. Πορτοκαλί το γράφημα της πρώτης παραγώγου. Οι τρεις ευθείες με εξισώσεις $\psi = 2x + 8$, $\psi = 2x + 5$, $\psi = 2x$ είναι παράλληλες έχουν τον ίδιο **συντελεστή διεύθυνσης** (είναι ο συντελεστής του x) που ισούται με $2 = \epsilon\phi\omega = f'(0) = f'(-2)$ που διαφορετικά ονομάζεται και **κλίση της ευθείας**. Το $\alpha_4 = 2$ είναι η κλίση της ευθείας όπως προγραμματίστηκε να εμφανίζεται από το

πρόγραμμα. Στο πάνω τρίγωνο σας δίνω τα δεδομένα να γράψουμε την κλίση με χρήση του ορισμού $\epsilon\phi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκειμένη κάθετη}} = \frac{2}{1} = 2$

2) **2004, Θέμα 2^ο.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

B. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

2) ΛΥΣΗ

α) Πρέπει παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός άρα: $\sqrt{x} - \sqrt{3} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq \sqrt{3} \Leftrightarrow x \neq 3$ και $x \geq 0$
Συνεπώς: $D_f = [0, 3) \cup (3, +\infty)$

β) Διαπιστώνοντας ότι το όριο είναι απροσδιόριστη μορφή, πολλαπλασιάζω και διαιρώ με τη συζυγή παράσταση του ριζικού.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-1)(\sqrt{x} + \sqrt{3}) = (3-1)(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

{Πρόχειρο: Ή θα βάλετε το 3 στο x και θα δείξετε ότι είναι απροσδιόριστη μορφή ή θα το γράψετε πάνω από το = όπως φαίνεται παραπάνω.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 \quad \begin{cases} x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Θυμάμαι ☺ $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ }

4)

2006, Θέμα 4^ο. Έστω η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + kx + 4\sqrt{x} + 10$, $x \geq 0$.

α. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $k = 2$ και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μία τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x} = f(1)$ και τυπική απόκλιση

$s = -\frac{2f'(4)}{13}$. Τρεις παρατηρήσεις, αντιπροσωπευτικού δείγματος μεγέθους n , είναι μικρότερες ή ίσες του 8.

ι) Να βρείτε τον αριθμό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $(10, 16)$ (Μονάδες 10)

ιι) Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παρατηρήσεων που έχει ληφθεί, δεν είναι ομοιογενές.

Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παραμέτρου $\alpha > 0$, που πρέπει να προστεθεί σε κάθε μία από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των νέων παρατηρήσεων να είναι ομοιογενές. (Μονάδες 10)

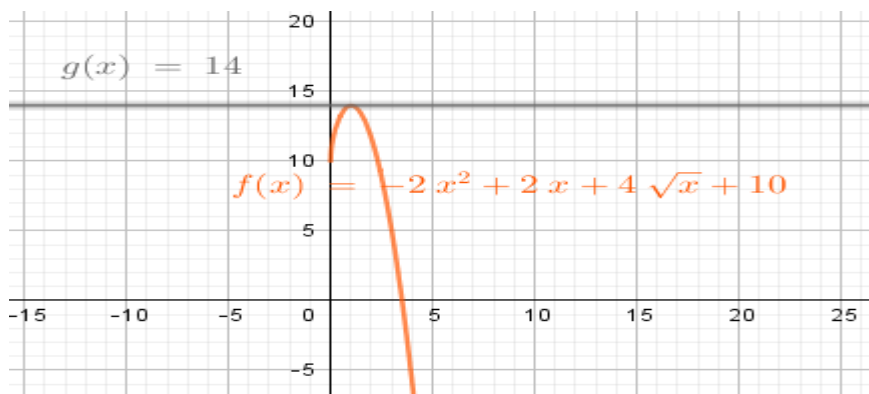
(Εδώ θα μπορούσε να μη δίνει το πεδίο ορισμού και να το ζητάει. Πρέπει το υπόρριζο να είναι μη αρνητικό.)

4 ΛΥΣΗ

{Σχόλιο: Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο γιατί γνωρίζουμε ότι, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης (ή με άλλη έκφραση : η ευθεία που εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης) στο σημείο $A(1, f(1))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό $f'(1)$ }

$$\alpha) f'(x) = (-2x^2 + kx + 4\sqrt{x} + 10)' = -4x + k + \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

Η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα xx' άρα έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με τον άξονα xx' που είναι το μηδέν. Άρα $f'(1)=0$ Αλλά $f'(1) = -4 \cdot 1 + k + \frac{2}{\sqrt{1}} = -4 + k + 2 = k - 2$ οπότε $k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$ και η συνάρτηση γίνεται: $f(x) = -2x^2 + 2x + 4\sqrt{x} + 10$ και η πρώτη παράγωγος $f'(x) = -4x + 2 + \frac{2}{\sqrt{x}}$ και $f'(1) = -4 \cdot 1 + 2 + \frac{2}{\sqrt{1}} = 0$ Ακόμη $f(1) = -2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 4\sqrt{1} + 10 = 14$ οπότε το σημείο είναι $A(1, f(1)) = A(1, 14)$. Η εξίσωση της εφαπτόμενης έχει την μορφή $\psi = \alpha x + \beta$ με $\alpha = f'(1) = 0$ Το σημείο $A(1, 14)$ είναι κοινό σημείο του γραφήματος και της ευθείας, άρα επαληθεύει την εξίσωσή της δηλαδή ισχύει: $14 = 0 \cdot 1 + \beta$ άρα $\beta = 14$ και η εξίσωση της ευθείας είναι $(\epsilon): \psi = 0x + 14$ ή $\psi = 14$



$$\beta) f(1) = 14 \quad \text{άρα } \bar{x} = f(1) = 14 \quad \text{και} \quad f'(4) = -4 \cdot 4 + 2 + \frac{2}{\sqrt{4}} = -16 + 2 + 2 = -13 \quad \text{οπότε:}$$

$$s = -\frac{2f'(4)}{13} = -\frac{2 \cdot (-13)}{13} = 2$$

{σχόλιο: Φτιάχνουμε ένα πρόχειρο σχεδιάγραμμα της καμπύλης της κανονικής κατανομής και βάζουμε τα νούμερα σε κάθε άκρο βάσει της θεωρίας. $\bar{x} - 3S, \bar{x} - 2S, \bar{x} - S, \bar{x}, \bar{x} + S, \bar{x} + 2S, \bar{x} + 3S$, άρα

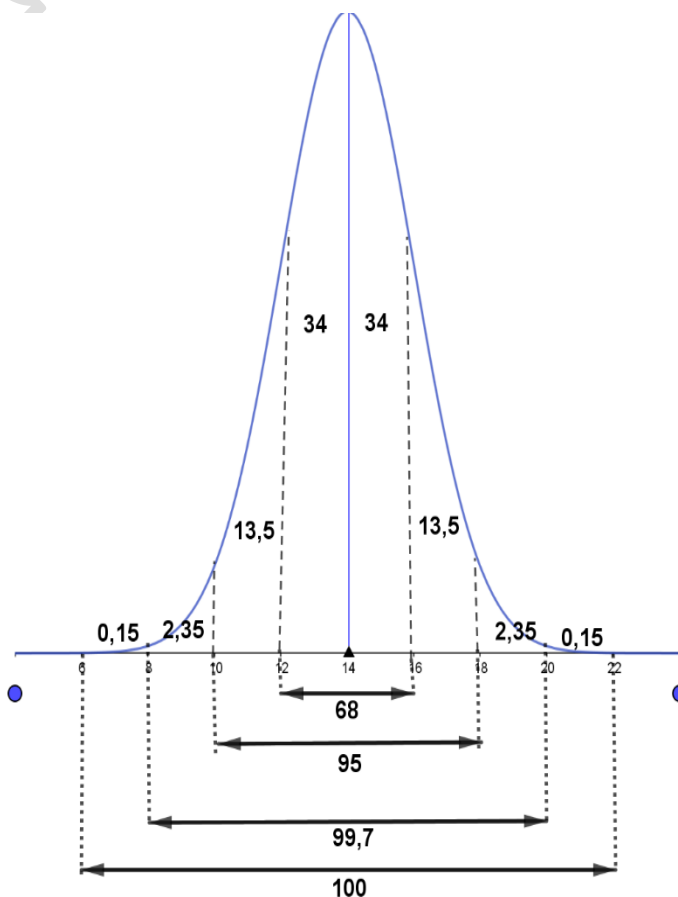
$$14 - 3 \cdot 2 = 8, 14 - 2 \cdot 2 = 10, 14 - 2 = 12, 14, 14 + 2 = 16, 14 + 2 \cdot 2 = 18, 14 + 3 \cdot 2 = 20$$

Σε κάθε διάστημα γνωρίζουμε το ποσοστό των παρατηρήσεων που περιέχονται και ανάλογα με τα ζητούμενα από την κάθε άσκηση προχωράμε }

Έστω n το πλήθος των παρατηρήσεων.

Επειδή 3 παρατηρήσεις είναι μικρότερες ή ίσες του 8 (δες το γράφημα) και στο διάστημα αυτό ανήκει το 0,15% των παρατηρήσεων ισχύει: $\frac{0,15}{100} n = 3 \Leftrightarrow n = \frac{300}{0,15} = \frac{30000}{15} = 2000$

ι) Στο διάστημα (10,16) βρίσκεται το 13,5%+34%+34%=81,5% των



παρατηρήσεων άρα $\frac{81,5}{100} 2000 = 81,5 \cdot 20 = 1630$ παρατηρήσεις.

υ) $CV = \frac{s}{\bar{x}} 100\% = \frac{2}{14} 100\% \cong 14,29\% > 10\%$ άρα το δείγμα **δεν είναι ομοιογενές**.

Όταν προστεθεί το $\alpha > 0$ σε κάθε μία παρατήρηση τότε(από εφαρμογή 3 σελίδα 99 σχ. Βιβλίου) για την νέα μέση τιμή και την παλαιά ισχύει: $\bar{x}' = \bar{x} + \alpha = 14 + \alpha$ και $S' = S = 2$ Για να **είναι το δείγμα ομοιογενές πρέπει** : $CV < 10\% \Leftrightarrow \frac{S'}{\bar{x}'} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{14+\alpha} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow 14 + \alpha \geq 20 \Leftrightarrow \alpha \geq 6$ Συνεπώς η μικρότερη τιμή του α είναι $\alpha = 6$

5) **2009, Θέμα 3^ο**. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x - 7$, όπου α πραγματικός αριθμός, για την

οποία ισχύει $2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$ α. Να δείξετε ότι $\alpha = 9$

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x$

5) ΛΥΣΗ

$$\alpha) f'(x) = (x^3 - 6x^2 + \alpha x - 7)' = (x^3)' - (6x^2)' + (\alpha x)' - 7' = 3x^2 - 12x + \alpha - 0 = 3x^2 - 12x + \alpha$$

$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 - 12x + \alpha)' = (3x^2)' - (12x)' + \alpha' = 6x - 12 + 0 = 6x - 12$ αντικαθιστούμε στη δοθείσα σχέση και $2(6x-12) + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow 12x - 24 + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow -9 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 9$ και η συνάρτηση γίνεται : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 7$ και η παράγωγος : $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 12x + 9}{x^2 - 1} = \frac{3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 9}{1^2 - 1} = \frac{12 - 12}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

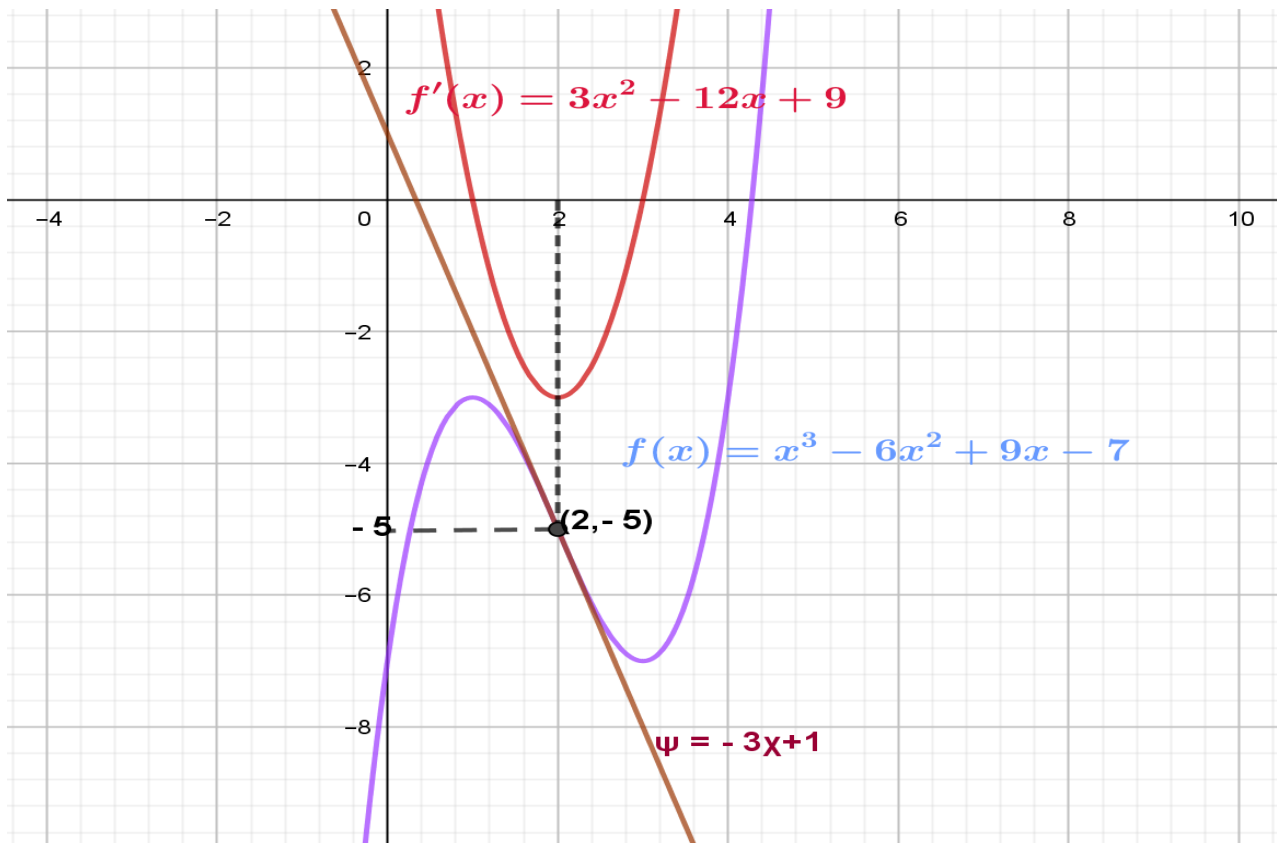
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 12x + 9}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-3)}{x+1} = \frac{3(1-3)}{1+1} = \frac{-6}{2} = -3$$

{ Πρόχειρο: είναι απροσδιόριστη μορφή και για την άρση της απροσδιοριστίας δηλαδή την απλοποίηση των παραγόντων που μηδενίζουν αριθμητή και παρονομαστή, παραγοντοποιούμε τα πολυώνυμα αριθμητή και παρονομαστή. $3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0$, $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$ $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ οπότε

$$3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3) \quad x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x-1)(x+1) \}$$

γ) Έστω $\psi = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$

με $\alpha = f'(x_0)$ άρα $\psi = f'(x_0)x + \beta$ επειδή είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi = -3x$, έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με αυτή, άρα $f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 9 = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 12 = 0 \Leftrightarrow 3(x_0^2 - 4x_0 + 4) = 0 \Leftrightarrow 3(x_0 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$ διπλή ρίζα. Υπολογίζουμε το $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = 12 - 24 + 9 = -3$ και η ευθεία έχει τη μορφή $\psi = -3x + \beta$ Προσδιορίζουμε το σημείο $A(2, f(2)) = A(2, -5)$ (αφού $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 7 = 8 - 24 + 18 - 7 = -5$) επειδή το σημείο $A(2, -5)$ είναι κοινό σημείο, άρα επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή ισχύει : $-5 = -3 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -5 + 6 = 1$ οπότε $\psi = -3x + 1$ 2^{ος} τρόπος Η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(2, -5)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(2) = -3$ άρα η εξίσωσή της είναι : $\psi - (-5) = -3(x - 2) \Leftrightarrow \psi + 5 = -3x + 6 \Leftrightarrow \psi = -3x + 6 - 5 \Leftrightarrow \psi = -3x + 1$



6)

2010, Θέμα Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - 1$, $x \in \mathbb{R}$

B1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$

B2. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$

B3. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$

α) είναι λάθος. Η συνάρτηση είναι $f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1}$ β) γιατί το Π.Ο. είναι το $\mathbb{R}$;

6) ΛΥΣΗ

{σχόλιο: Παρά το ότι δίνεται το πεδίο ορισμού, αν έπρεπε να το υπολογίσουμε πρέπει το υπόρριζο να είναι μη αρνητικό. $x^2 - x + 1 \geq 0$ $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$ το τριώνυμο δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ και είναι ομόσημο του $\alpha = 1 > 0$ άρα θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$. άρα Π.Ο. = $\mathbb{R}$ }

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} - 2}{x - 1} \cdot \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2}{2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2} =$$

$$\text{B1) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} - 2)(2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2)}{(x - 1)(2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2\sqrt{x^2 - x + 1})^2 - 2^2}{(x - 1)(2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x^2 - x + 1) - 4}{(x - 1)(2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 4x + 4 - 4}{(x - 1)(2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x(x - 1)}{(x - 1)(2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x}{2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2} = \frac{4 \cdot 1}{2\sqrt{1^2 - 1 + 1} + 2} = \frac{4}{4} = 1$$

B2) προσδιορίζουμε το σημείο $A(0, f(0)) = A(0, 1)$ διότι $f(0) = 2\sqrt{0^2 - 0 + 1} - 1 = 2\sqrt{1} - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

$$f'(x) = (2\sqrt{x^2 - x + 1})' - 1' = \frac{2(x^2 - x + 1)'}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} - 0 = \frac{2(2x - 1 + 0)}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \quad \text{άρα}$$

$$f'(0) = \frac{2 \cdot 0 - 1}{\sqrt{0^2 - 0 + 1}} = \frac{-1}{\sqrt{1}} = \frac{-1}{1} = -1 \quad \text{Έστω } \psi = \alpha x + \beta \text{ η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται της καμπύλης της}$$

συνάρτησης στο σημείο $A(0, 1)$ με $\alpha = f'(0) = -1$ τότε $\psi = f'(0)x + \beta$ ή $\psi = -x + \beta$ Το σημείο $A(0, 1)$ ως κοινό σημείο συνάρτησης και ευθείας επαληθεύει τις εξισώσεις τους, άρα ισχύει: $1 = -1 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow 1 = 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$ και η ευθεία έχει εξίσωση $\psi = -x + 1$

2ος τρόπος Για το σημείο $A(0, 1)$ και τον συντελεστή διεύθυνσης στο 0 το $f'(0) = -1$ έχουμε: $\psi - 1 = -1(x - 0) \Leftrightarrow \psi - 1 = -x \Leftrightarrow \psi = -x + 1$

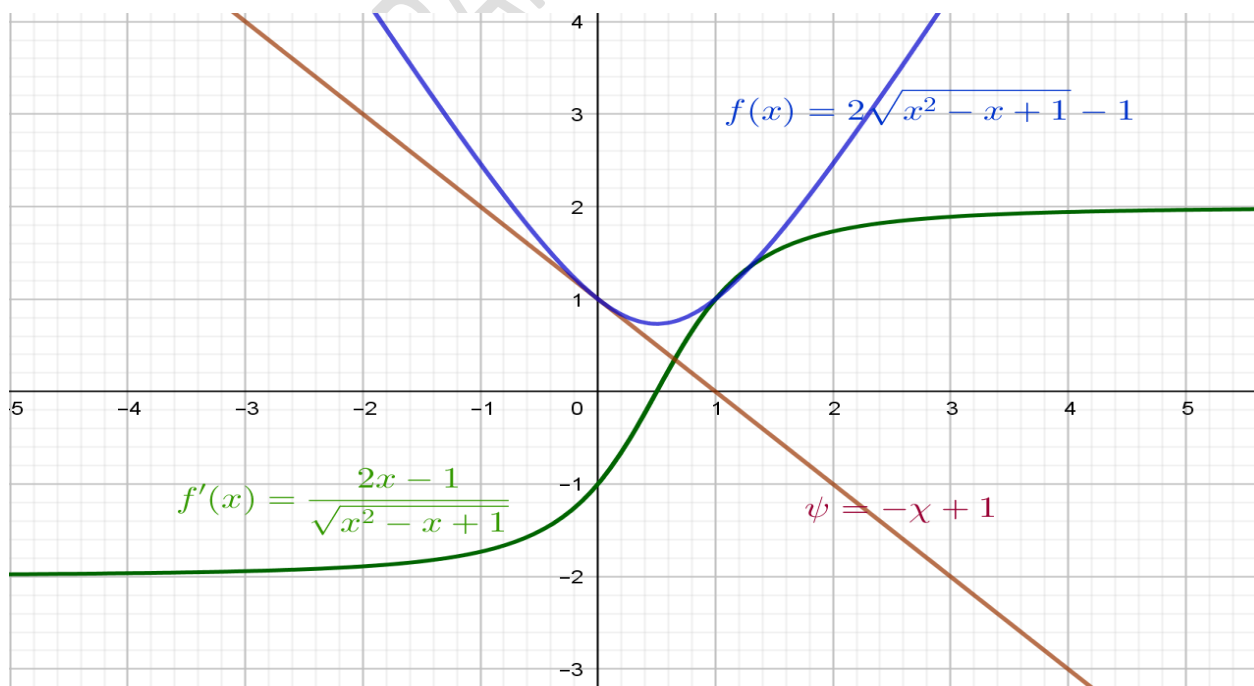
B3) Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι ο συντελεστής διεύθυνσης ή κλίση της ευθείας με εξίσωση $\psi = \alpha x + \beta$ είναι ο συντελεστής του x ο α και είναι ίσος με την εφαπτόμενη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα των τετμημένων (οριζόντιο άξονα $x'x$). Αν η ευθεία εφάπτεται της γραφικής παράστασης σε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ τότε ισούται ακόμη με την πρώτη παράγωγο της τετμημένης x_0 στο σημείο επαφής ευθείας και γραφήματος συνάρτησης, δηλαδή ισχύει: $\epsilon\phi\omega = f'(0) = -1$ }

Για την ευθεία $\psi = -x + 1$ ισχύει: $\epsilon\phi\omega = -1$ λύνω την εξίσωση

$$\begin{cases} \epsilon\phi\omega = -1 \\ \epsilon\phi 135^\circ = -1 \end{cases} \quad \text{άρα } \epsilon\phi\omega = \epsilon\phi 135^\circ \quad \text{οπότε } \omega = \kappa\pi + 135^\circ, \kappa \in \mathbb{Z} \text{ και επειδή } 0 \leq \omega \leq 180^\circ, \kappa = 0 \text{ άρα}$$

$$\omega = 135^\circ \text{ ή } \frac{3\pi}{4} \text{ ακτίνια}$$

{σχόλιο: όπως παραπάνω, μάθατε στη Β λυκείου να λύνετε μια τριγωνομετρική εξίσωση. Δεκτό θα γίνει και το να γράψετε $\epsilon\phi\omega = -1 = \epsilon\phi 135^\circ$ άρα $\omega = 135^\circ$ χάνοντας κάποια μόρια ίσως. Άλλες περιπτώσεις που θα θυμάστε οπωσδήποτε: $\epsilon\phi\omega = 0^\circ = \epsilon\phi 0^\circ$ άρα $\omega = 0^\circ$ και $\epsilon\phi\omega = 1 = \epsilon\phi 45^\circ$ άρα $\omega = 45^\circ$ ή $\frac{\pi}{4}$ ακτίνια. Ακόμη $\epsilon\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3} = \epsilon\phi 30^\circ$ άρα $\omega = 30^\circ$ και $\epsilon\phi\omega = \sqrt{3} = \epsilon\phi 60^\circ$ άρα $\omega = 60^\circ$)



7) ΓΕΛ ΕΣΠΕΡΙΝΑ 2014

ΘΕΜΑ Β

7) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$, $x \in \mathbb{R}$
Να βρείτε:

B1. τον ρυθμό μεταβολής της f ως προς x , όταν $x = 2$.

Μονάδες 7

B2. τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα της f .

Μονάδες 10

B3. την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(2, f(2))$.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

B1. Ρυθμός μεταβολής $f'(x) = (x^3 - 3x^2 - 9x + 2)' = (x^3)' - (3x^2)' - (9x)' + 2' = 3x^2 - 6x - 9 + 0$

Ο ρυθμός μεταβολής στο $x=2$ είναι $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 9 = 12 - 12 - 9 = -9$

➤ B2. {σχόλιο: μηδενίζω την πρώτη παράγωγο, λύνω τις ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$ δηλαδή βρίσκω το πρόσημο της πρώτης παραγώγου σε κάθε διάστημα και εφαρμόζω τα θεωρήματα της σελίδας 40 του βιβλίου μαθηματικά και στοιχεία στατιστικής τοποθετώντας τα δεδομένα σε έναν πίνακα, που λέγεται πίνακας μεταβολών. Αυτά είναι:

➤ Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ . (συμβολικά ↗)

➤ Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ . (Συμβολικά ↘)

➤ Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν: $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x=x_0$ μέγιστο.

➤ Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν: $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x=x_0$ ελάχιστο. }

$$f'(x) = 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \quad \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 \quad \begin{cases} x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

$f'(x) = 3(x^2 - 2x - 3) > 0$ όταν $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ και $f'(x) = 3(x^2 - 2x - 3) < 0$ όταν $x \in (-1, 3)$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
	$\tau. \mu$			$\tau. \varepsilon.$	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (συμβολικά ↗) στο διάστημα $(-\infty, -1]$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα (συμβολικά ↘) στο διάστημα $[-1, 3]$ Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (συμβολικά ↗) στο διάστημα $[3, +\infty)$

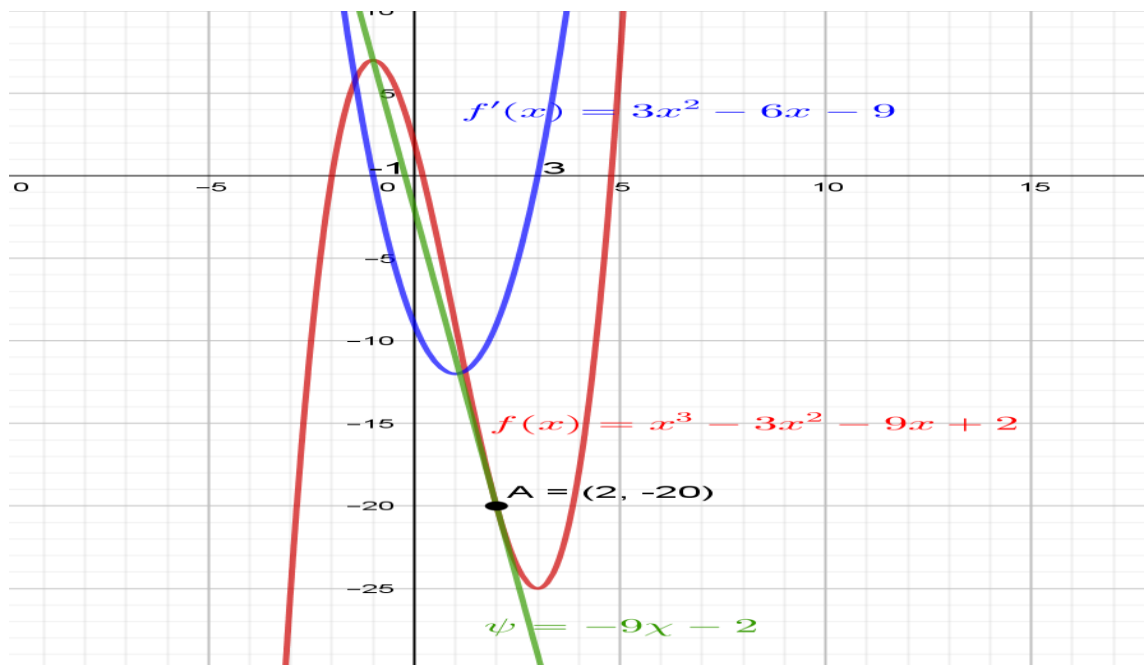
Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=-1$ το $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 2 = -1 - 3 + 9 + 2 = 7$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x=3$ το $f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 2 = 27 - 27 - 27 + 2 = -25$

B3. Το $A(2, f(2)) = A(2, -20)$ διότι $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 2 = 8 - 12 - 18 + 2 = -20$

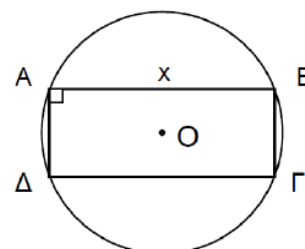
Από το δεύτερο ερώτημα υπολογίσαμε ότι $f'(2) = -9$ Συνεπώς έστω $\psi = \alpha x + \beta$ η ευθεία που εφάπτεται στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $A(2, -20)$ με $\alpha = f'(2)$ άρα $\psi = f'(2)x + \beta$ ή $\psi = -9x + \beta$ Το σημείο $A(2, -20)$ είναι κοινό σημείο γραφήματος και ευθείας άρα επαληθεύει την εξίσωσή της οπότε:

$$-20 = -9 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow -20 = -18 + \beta \Leftrightarrow -20 + 18 = \beta \Leftrightarrow \beta = -2 \text{ άρα } \psi = -9x - 2$$



8)

2015, Θέμα Δ. Δίνεται κύκλος (O, ρ) με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 5$ και ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτόν με πλευρά $AB = x$, όπως φαίνεται στο Σχήμα Ι.



ΣΧΗΜΑ Ι

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον

$$\text{τύπο } f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}, \quad 0 < x < 10.$$

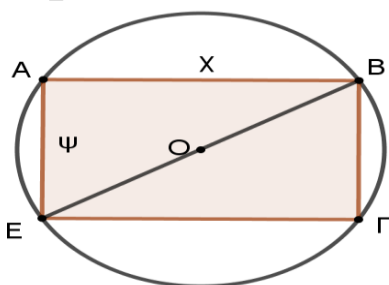
Δ2. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ γίνεται μέγιστο.

Για την τιμή αυτήν του x , δείξτε ότι το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο.

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98x}$

{σχόλιο: σκεφτείτε “πονηρά” για το Δ3 ή θα χαθείτε στις πράξεις }

8) ΛΥΣΗ (αντί για Ε θέστε Δ στο σχήμα)



Δ1. (σχόλιο: είναι εφαρμογή της άσκησης 5 σελ.46 του βιβλίου. Στις ασκήσεις αυτής της μορφής θα έχουμε μια σταθερή σχέση και θα τη χρησιμοποιούμε για να αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή ψ ως συνάρτηση του x γιατί η συνάρτησή μας είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής του x . Θεωρούμε ως συνάρτηση, τη σχέση που θέλουμε να μελετήσουμε ως προς το μέγιστο ή το ελάχιστο βαφτίζοντάς την με όποιο γράμμα θέλουμε π.χ. $f(x)$, $g(x)$, $E(x)$ και αντικαθιστούμε το ψ από δεδομένη σχέση που συνδέει το x με το ψ . Προσέχουμε πάντα σε προβλήματα

γεωμετρικά να παίρνουμε, για τις τιμές της μεταβλητής μας, τον περιορισμό $\chi > 0, \psi > 0$ για να έχει νόημα το πρόβλημα)

Φέρνουμε τη διαγώνιο ΒΔ που είναι διάμετρος διότι, η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή, άρα βαίνει σε ημικύκλιο. (ΒΔ=2ρ=10) και από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $\chi^2 + \psi^2 = 10^2 \Leftrightarrow \psi^2 = 100 - \chi^2 \Leftrightarrow \psi = \sqrt{100 - \chi^2}$ (1) με $\chi > 0$ και $\psi > 0$ ως πλευρές ορθογωνίου και ισχύει αν $100 - \chi^2 > 0 \Leftrightarrow -\chi^2 > -100 \Leftrightarrow \chi^2 < 100 \Leftrightarrow \chi < \sqrt{100} \Leftrightarrow \chi < 10$ άρα $0 < \chi < 10$ Το εμβαδό του ορθογωνίου $f(\chi) = \chi \cdot \psi$ αντικαθιστούμε το ψ από τη σχέση (1) και έχουμε $f(\chi) = \chi \cdot \sqrt{100 - \chi^2}$, $0 < \chi < 10$

$$\Delta 2. f'(\chi) = (x \cdot \sqrt{100 - \chi^2})' = \chi' \sqrt{100 - \chi^2} + \chi (\sqrt{100 - \chi^2})' = 1 \sqrt{100 - \chi^2} + \chi \frac{(100 - \chi^2)'}{2\sqrt{100 - \chi^2}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{100 - \chi^2})(2\sqrt{100 - \chi^2})}{2\sqrt{100 - \chi^2}} + \frac{\chi(0 - 2\chi)}{2\sqrt{100 - \chi^2}} = \frac{2(\sqrt{100 - \chi^2})^2 - 2\chi^2}{2\sqrt{100 - \chi^2}} = \frac{2(100 - \chi^2) - 2\chi^2}{2\sqrt{100 - \chi^2}} \\ & = \frac{200 - 2\chi^2 - 2\chi^2}{2\sqrt{100 - \chi^2}} = \frac{200 - 4\chi^2}{2\sqrt{100 - \chi^2}} = \frac{2(100 - 2\chi^2)}{2\sqrt{100 - \chi^2}} = \frac{100 - 2\chi^2}{\sqrt{100 - \chi^2}} \end{aligned}$$

$$f'(\chi) = \frac{100 - 2\chi^2}{\sqrt{100 - \chi^2}} = 0 \text{ αν } 100 - 2\chi^2 = 0 \Leftrightarrow -2\chi^2 = -100 \Leftrightarrow \chi^2 = 50 \Leftrightarrow \chi = \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 25} = \sqrt{2} \sqrt{25} = 5\sqrt{2} \text{ δεδομένου ότι } \chi > 0$$

χ	$-\infty$	$-5\sqrt{2}$	0	$5\sqrt{2}$	10	$+\infty$
$f'(\chi)$	Δεν ανήκει στο Π.Ο.		+	-	Δεν ανήκει στο Π.Ο.	
$f(\chi)$			↗	↘		

τ.μ.

Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 5\sqrt{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[5\sqrt{2}, 10)$ παρουσιάζει τ.μ. στο

$$\chi = 5\sqrt{2} \text{ το } f(5\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} \sqrt{100 - (5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2} \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} \sqrt{50} = (\sqrt{50})^2 = 50$$

Όταν $\chi = 5\sqrt{2}$ το $\psi = \sqrt{100 - (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{100 - 5^2(\sqrt{2})^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ Συνεπώς όταν το εμβαδό γίνεται μέγιστο οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι ίσες, είναι δηλαδή τετράγωνο.

$$\Delta 3. \text{Επειδή } f(1) = 1\sqrt{100 - 1^2} = \sqrt{99} \text{ έχουμε } \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(1+\chi) - f(1)}{\chi} = f'(1)$$

$$\text{Άρα } \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(1+\chi) - \sqrt{99}}{98\chi} = \frac{1}{98} \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(1+\chi) - f(1)}{\chi} = \frac{1}{98} f'(1) \text{ όμως}$$

$$f'(1) = \frac{100 - 2 \cdot 1^2}{\sqrt{100 - 1^2}} = \frac{100 - 2}{\sqrt{100 - 1}} = \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{98 \sqrt{99}}{\sqrt{99} \sqrt{99}} = \frac{98 \sqrt{99}}{(\sqrt{99})^2} = \frac{98 \sqrt{99}}{99} \text{ άρα } \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(1+\chi) - \sqrt{99}}{98\chi} = \frac{1}{98} \frac{98 \sqrt{99}}{99} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$

Με τον κλασικό τρόπο: πολλαπλασιάζω με συζυγή παράσταση αφού πρώτα βρούμε το $f(\chi+1) = (\chi+1)\sqrt{100 - (\chi+1)^2}$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(1+\chi) - \sqrt{99}}{98\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{(\chi+1)\sqrt{100 - (\chi+1)^2} - \sqrt{99}}{98\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{(\chi+1)\sqrt{100 - (\chi+1)^2} + \sqrt{99}}{98\chi[(\chi+1)\sqrt{100 - (\chi+1)^2} + \sqrt{99}]} =$$

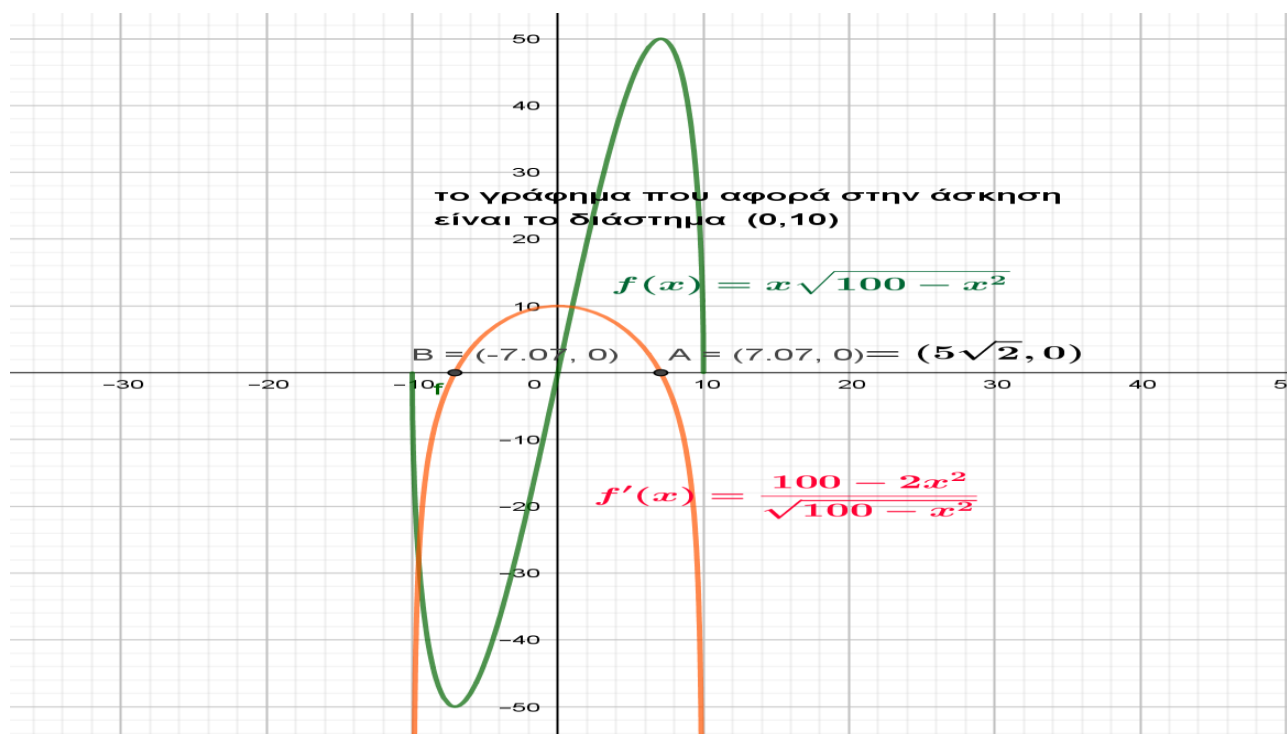
$$\begin{aligned} & \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{(\chi^2 + 2\chi + 1)(100 - \chi^2 - 2\chi - 1) - 99}{98\chi[(\chi+1)\sqrt{100 - (\chi+1)^2} + \sqrt{99}]} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{(\chi^2 + 2\chi + 1)(99 - \chi^2 - 2\chi) - 99}{98\chi[(\chi+1)\sqrt{100 - (\chi+1)^2} + \sqrt{99}]} \\ & = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{99\chi^2 - \chi^4 - 2\chi^3 + 198\chi - 2\chi^3 - 4\chi^2 - \chi^2 - 2\chi + 99 - 99}{98\chi[(\chi+1)\sqrt{100 - (\chi+1)^2} + \sqrt{99}]} = \end{aligned}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{-\chi^4 - 4\chi^3 + 94\chi^2 + 196\chi}{98\chi[(\chi+1)\sqrt{100 - (\chi+1)^2} + \sqrt{99}]} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{-\chi^4 - 4\chi^3 + 94\chi^2 + 196\chi}{98\chi[(\chi+1)\sqrt{100 - (\chi+1)^2} + \sqrt{99}]} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-x^3 - 4x^2 + 94x + 196)}{98x[(x+1)\sqrt{100 - (x+1)^2 + \sqrt{99}}]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3 - 4x^2 + 94x + 196}{98[(x+1)\sqrt{100 - (x+1)^2 + \sqrt{99}}]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-0^3 - 4 \cdot 0^2 + 94 \cdot 0 + 196}{98[(0+1)\sqrt{100 - (0+1)^2 + \sqrt{99}}]} = \frac{196}{98[\sqrt{99} + \sqrt{99}]} = \frac{196}{98 \cdot 2\sqrt{99}} = \frac{196}{196\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{99}} \cdot \frac{\sqrt{99}}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{\sqrt{99}^2} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$



9) ΓΕΛ ΕΣΠΕΡΙΝΑ 2015

9) ΛΥΣΗ

$$f'(x) = (x^3 - 3x + 4)' = (x^3)' - (3x)' + 4' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 > 0 \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \quad \text{και} \quad f'(x) = 3x^2 - 3 < 0 \quad x \in (-1, 1)$$

X	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$					
	τ. μ.			τ. ε.	

Η συνάρτηση f στο διάστημα $(-\infty, -1]$ είναι γνησίως αύξουσα, στο διάστημα $[-1, 1]$ είναι γνησίως φθίνουσα και στο διάστημα $[1, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα. Στο $x = -1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 4 = -1 + 3 + 4 = 6$. Στο $x = 1$ παρουσιάζει τοπικό

$$\text{ελάχιστο το } f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 4 = 1 - 3 + 4 = 2$$

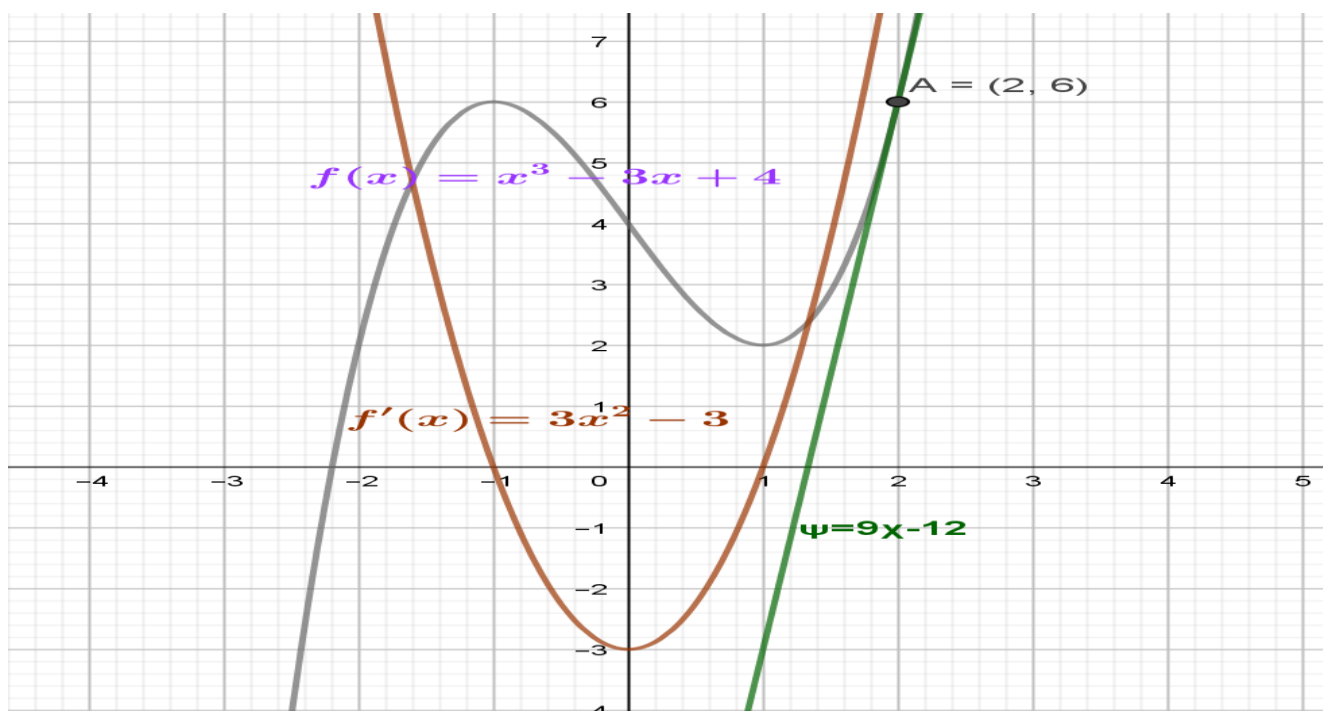
$$B2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2 - 1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 3(x+1) = 3(1+1) = 3 \cdot 2 = 6$$

$$B3. \text{ Στο σημείο } (2, f(2)) = (2, 6) \text{ αφού } f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 4 = 8 - 6 + 4 = 6 \quad \text{και } f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9$$

Συνεπώς έστω $\psi = \alpha x + \beta$ με $\alpha = f'(2) = 9$ η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται του γραφήματος της συνάρτησης στο $(2, 6)$ έχει εξίσωση $\psi = f'(2)x + \beta \Leftrightarrow \psi = 9x + \beta$. Επειδή το σημείο $(2, 6)$ ως κοινό σημείο επαληθεύει την εξίσωσή της έχουμε: $6 = 9 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow 6 = 18 + \beta \Leftrightarrow \beta = 6 - 18 = -12$ και η εξίσωση γίνεται $\psi = 9x - 12$

2^{ος} τρόπος :παίρνοντας την εξίσωση της ευθείας στη μορφή $\psi - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$; έχουμε $\psi - 6 = 9(x - 2)$

$$\Leftrightarrow \psi - 6 = 9x - 18 \Leftrightarrow \psi = 9x - 18 + 6 \Leftrightarrow \psi = 9x - 12$$



10) ΕΠΑΛ ΕΣΠΕΡΙΝΑ 2015

ΘΕΜΑ Δ

Η ημερήσια είσπραξη (σε €) μίας μονάδας παραγωγής χάλυβα από την πώληση x τόνων χάλυβα δίνεται από τη συνάρτηση

$$E(x) = 250x, \quad 0 \leq x \leq 20,$$

ενώ το συνολικό κόστος παραγωγής αυτής της ποσότητας δίνεται από τη συνάρτηση

$$K(x) = 10x^2 - 50x + 500$$

Δ1. Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση του κέρδους είναι:

$$P(x) = -10x^2 + 300x - 500$$

Μονάδες 6

Δ2. Να βρεθεί το κέρδος της μονάδας παραγωγής από την πώληση 10 τόνων χάλυβα.

Μονάδες 5

Δ3. Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κέρδους;

Μονάδες 3

Δ4. Πόση ποσότητα χάλυβα πρέπει να πουληθεί, ώστε το κέρδος της μονάδας παραγωγής να γίνει μέγιστο;

Μονάδες 7

Δ5. Να βρεθεί το μέγιστο κέρδος της μονάδας παραγωγής.

Μονάδες 4

10) ΛΥΣΗ

$E(x)$:συνάρτηση εσόδων $P(x)$: συνάρτηση κέρδους $K(x)$: συνάρτηση κόστους

Γνωρίζουμε ότι: $E(x) = P(x) + K(x)$

$$\Delta 1. \quad P(x) = E(x) - K(x) = 250x - (10x^2 - 50x + 500) = 250x - 10x^2 + 50x - 500 = -10x^2 + 300x - 500 \quad \text{με } 0 \leq x \leq 20$$

$$\Delta 2. \quad \text{Το κέρδος από την πώληση 10 μονάδων προϊόντος είναι: } P(10) = -10 \cdot 10^2 + 300 \cdot 10 - 500 = -1000 + 3000 - 500 = 1500$$

Δ3. Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κέρδους είναι : $P'(x) = (-10x^2 + 300x - 500)' = (-10x^2)' + (300x)' - 500' = -20x + 300 - 0 = -20x + 300$ με $0 \leq x \leq 20$

Δ4. $P'(x) = 0$ ή $-20x + 300 = 0 \Leftrightarrow -20x = -300 \Leftrightarrow x = \frac{-300}{-20} = 15$

$P'(x) > 0 \Leftrightarrow -20x + 300 > 0 \Leftrightarrow -20x > -300 \Leftrightarrow x < \frac{-300}{-20} \Leftrightarrow x < 15$

$P'(x) < 0 \Leftrightarrow -20x + 300 < 0 \Leftrightarrow -20x < -300 \Leftrightarrow x > \frac{-300}{-20} \Leftrightarrow x > 15$

X	$-\infty$	0	15	20	$+\infty$
$P'(X)$		+	0	-	
$P(X)$			↗	↘	
τ. μ					

Πρέπει να πωληθούν 15 τόνοι άνθρακα για να έχουμε μέγιστο κέρδος το οποίο είναι:

Δ5. $P(15) = -10 \cdot 15^2 + 300 \cdot 15 - 500 = -2250 + 4500 - 500 = 1750$ €

11) ΓΕΛ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2015

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 - 4$, $x \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-2, 0)$.

B1. Να αποδείξετε ότι $a=1$ και $b=3$.

Μονάδες 6

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{5}}$$

Μονάδες 6

11) ΛΥΣΗ

{ΣΧΟΛΙΟ: Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι στο σημείο $(x_0, 0)$ όπου, το γράφημα της συνάρτησης $\psi = f(x)$, τέμνει τον οριζόντιο άξονα, ισχύει : $\psi = f(x_0) = 0$. Επίσης αν μια ευθεία εφάπτεται της καμπύλης του γραφήματος μιας συνάρτησης σε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ και είναι παράλληλη στον οριζόντιο άξονα $x'x$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσής της είναι ίσος με $f'(x_0) = 0$. Ακόμη γνωρίζουμε ότι η εξίσωση του άξονα $x'x$ είναι $\psi = 0$ ή με την τυπική μορφή $\psi = 0x + 0$ }

B1. Επειδή το σημείο $A(-2, 0)$ είναι σημείο του γραφήματος της συνάρτησης ισχύει: $f(-2) = 0$ ή

$$a(-2)^3 + b(-2)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow -8a + 4b - 4 = 0 \Leftrightarrow -8a + 4b = 4 \quad (1)$$

Ο άξονας $x'x$ με εξίσωση $\psi = 0 = 0x + 0$ **εφάπτεται** του γραφήματος C_f

{σχόλιο: συνεπώς ισχύει ότι ισχύει για κάθε ευθεία που εφάπτεται σε ένα σημείο του γραφήματος μιας συνάρτησης δηλαδή ο συντελεστής διεύθυνσής της, είναι ίσος με την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης ,στην τετμημένη του σημείου επαφής, εδώ στο $x=-2$ }

στο σημείο A(-2,0) άρα ισχύει: $f'(-2) = 0$ όμως $f'(x) = (\alpha x^3 + \beta x^2 - 4)' = (\alpha x^3)' + (\beta x^2)' - 4' = 3\alpha x^2 + 2\beta x$ οπότε: $f'(-2) = 3 \cdot \alpha \cdot (-2)^2 + 2 \cdot \beta \cdot (-2) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \alpha \cdot 4 + 4 \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow 12 \cdot \alpha - 4 \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow 12 \cdot \alpha = 4 \cdot \beta \Leftrightarrow 3 \cdot \alpha = \beta$ (2) Από την ισότητα (2) αντικαθιστώ την τιμή του β στην (1) και έχουμε:

$$-8 \cdot \alpha + 4 \cdot 3 \cdot \alpha = 4 \Leftrightarrow -8 \cdot \alpha + 12 \cdot \alpha = 4 \Leftrightarrow 4 \cdot \alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ και για } \alpha = 1 \text{ παίρνουμε από την (2) } \beta = 3 \cdot 1 = 3$$

B2. {Υπολογίζουμε τις ρίζες της πρώτης παραγώγου και λύνουμε τις ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$ και εφαρμόζουμε, τα θεωρήματα της σελίδας 40 του βιβλίου <<μαθηματικά και στοιχεία στατιστικής>> (δες και άσκηση 7) τοποθετώντας τα δεδομένα στον πίνακα μεταβολών.}

Με $\alpha = 1$ και $\beta = 3$ η συνάρτηση είναι: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ και η πρώτη παράγωγος: $f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow$

$$3x(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} f'(x) = 3x^2 + 6x > 0 & \text{αν } x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \\ f'(x) = 3x^2 + 6x < 0 & \text{αν } x \in (-2, 0) \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		$\tau. \mu.$		$\tau. \epsilon.$		

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = -2$ το $f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4 = -8 + 12 - 4 = 0$ και

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 0$ το $f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4$

B3. Γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι ίσος με $f'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f'(x) = 3x^2 + 6x$ και μελετάμε τη μονοτονία της. $g'(x) = f''(x) = (3x^2 + 6x)' = 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow 6x = -6 \Leftrightarrow x = -1$

$$g'(x) = 6x + 6 > 0 \Leftrightarrow 6x > -6 \Leftrightarrow x > -1 \text{ και } g'(x) = 6x + 6 < 0 \Leftrightarrow 6x < -6 \Leftrightarrow x < -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$
	$\tau. \epsilon.$			

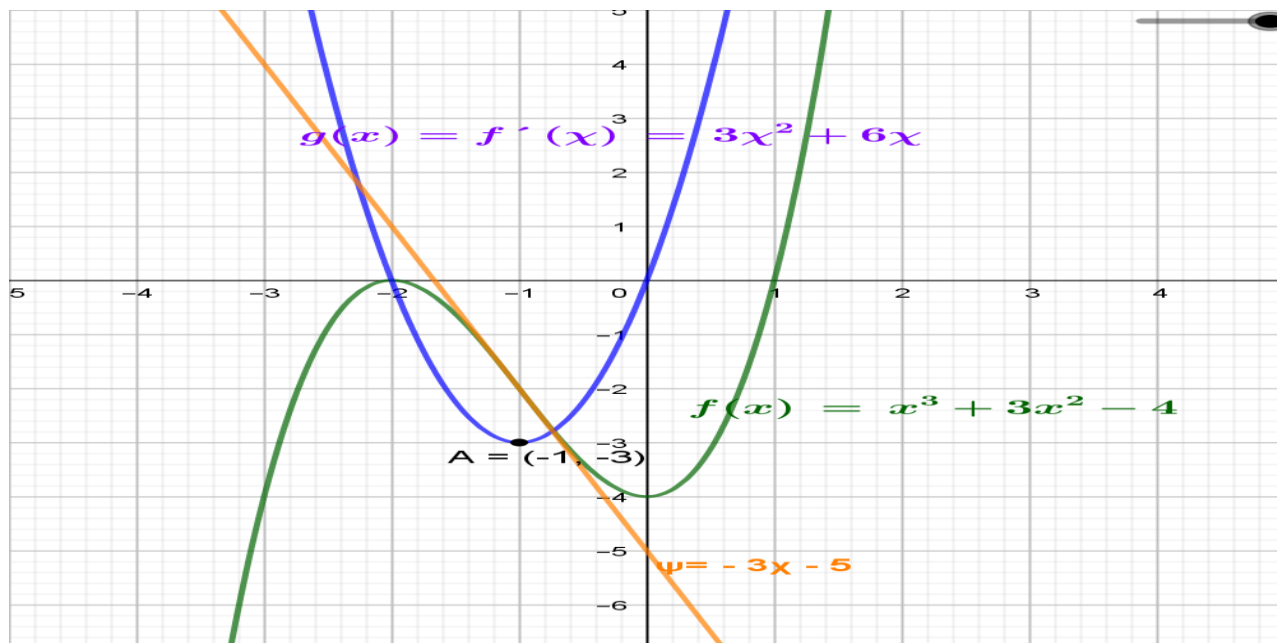
Συνεπώς στο $x = -1$ έχουμε τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης που είναι

$f'(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) = -3$ και το σημείο της γραφικής παράστασης που έχω τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης είναι το $B(-1, f(-1)) = (-1, -2)$ αφού $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 = -1 + 3 - 4 = -2$

{ Αν δεν σας μπερδεύει, δεν είναι απαραίτητο να βαφτίσετε την πρώτη παράγωγο με άλλο όνομα $g(x)$, αλλά να βρείτε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου και άρα τη μονοτονία της πρώτης παραγώγου. Ένα ερώτημα επιπλέον θα μπορούσε να είναι: Να προσδιορίσετε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στο σημείο του ερωτήματος B3. Η εξίσωση είναι: $\psi = f'(-1)x + \beta \Leftrightarrow \psi = -3x + \beta$. Εφάπτεται στο σημείο $(-1, -2)$ κοινό σημείο άρα ισχύει: $-2 = -3(-1) + \beta \Leftrightarrow -2 = 3 + \beta \Leftrightarrow -2 - 3 = \beta \Leftrightarrow -5 = \beta$ και η εξίσωση γίνεται: $\psi = -3x - 5$ }

$$\begin{aligned} \text{B4. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2+6x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2+6x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(3x^2+6x)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})} = \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(3x^2+6x)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}{(x^2+1)-(\sqrt{5})^2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x(x+2)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}{x^2+1-5} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x(x+2)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x(x+2)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}{(x+2)(x-2)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}{x-2} = \frac{3(-2)(\sqrt{(-2)^2+1}+\sqrt{5})}{-2-2} = \frac{-6(\sqrt{5}+\sqrt{5})}{-4} = \frac{-12\sqrt{5}}{-4} = 3\sqrt{5}$$



12) ΓΕΛ 2016 ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΑ 2016

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 9

B2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$.

Μονάδες 8

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x) - 12}{x + 1}$.

Μονάδες 8

12) ΛΥΣΗ

B1. {Υπολογίζουμε τις ρίζες της πρώτης παραγώγου και λύνουμε τις ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$ και εφαρμόζουμε, με συμβολικό τρόπο σε έναν πίνακα μεταβολών, τα θεωρήματα της σελίδας 40 του βιβλίου <<μαθηματικά και στοιχεία στατιστικής>> (δες και άσκηση 7)}

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' - \left(\frac{5}{2}x^2\right)' + (6x)' - 1' = \frac{3x^2}{3} - \frac{5}{2} \cdot 2x + 6 \cdot 1 - 0 =$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \{\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2 \end{array} \right. \}$$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
	τ. μ.		τ. ε.		

Η f είναι ↗ στο $(-\infty, 2]$

Η f είναι ↘ στο $[2, 3]$

Η f είναι ↗ στο $[3, +\infty)$

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=2$ το $f(2) = \frac{2^3}{3} - \frac{5}{2}2^2 + 6 \cdot 2 - 1 = \frac{8}{3} - 10 + 12 - 1 = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$ και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x=3$ το $f(3) = \frac{3^3}{3} - \frac{5}{2}3^2 + 6 \cdot 3 - 1 = 9 - \frac{45}{2} + 18 - 1 = -\frac{45}{2} + 26 = \frac{-45+52}{2} = \frac{7}{2}$

B2. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που εφάπτεται στο σημείο $A(0, f(0))=A(0,-1)$ (αφού $f(0) = \frac{0^3}{3} - \frac{5}{2}0^2 + 6 \cdot 0 - 1 = -1$) είναι η $f'(0) = 0^2 - 5 \cdot 0^2 + 6 = 6$ οπότε η εξίσωση της ευθείας είναι : $\psi = 6x + \beta$ Το σημείο $A(0,-1)$ ως κοινό σημείο επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας άρα $-1 = 6 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow -1 = 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1$ και η εξίσωση γίνεται : $\psi = 6x - 1$

{2ος τρόπος: $\psi - (-1) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow \psi + 1 = 6(x - 0) \Leftrightarrow \psi + 1 = 6 \cdot x \Leftrightarrow \psi = 6x - 1$ }

$$\text{B3. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x) - 12}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x + 6 - 12}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x + 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{[x - (-1)][x - 6]}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 6)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 6) = -1 - 6 = -7$$

13) ΓΕΛ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟ 2016

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x^2 + \alpha}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

B1. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$, να βρείτε το α .

Μονάδες 4

B2. Για $\alpha = 3$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

Μονάδες 7

B3. Για $\alpha = 3$ να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

B4. Για $\alpha = 3$ να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1}$.

Μονάδες 8

13) ΛΥΣΗ

B1. Αφού διέρχεται από το σημείο **A(1,2)** ισχύει **f(1)=2** άρα $\sqrt{1^2 + \alpha} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1 + \alpha} = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{1 + \alpha})^2 = 2^2 \Leftrightarrow 1 + \alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 4 - 1 = 3$ και η συνάρτηση γίνεται $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$

B2. Το σημείο με τετμημένη $x_0=1$ είναι το $A(1, f(1))=A(1,2)$ επειδή $f(1) = \sqrt{1^2 + 3} = \sqrt{4} = 2$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που εφάπτεται του γραφήματος στο σημείο $A(1,2)$ είναι η $f'(1)$.

$$\text{Οπότε: } f'(x) = (\sqrt{x^2 + 3})' = \frac{(x^2 + 3)'}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} \quad \text{και } f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 3}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

Η εξίσωση της ευθείας είναι $\psi = \frac{1}{2}x + \beta$ Το σημείο $A(1,2)$ ως κοινό σημείο γραφήματος και ευθείας επαληθεύει την εξίσωσή της 'δηλαδή ισχύει: $2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2 - \frac{1}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$ αντικαθιστώντας την τιμή του β έχουμε : $\psi = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

{2ος τρόπος: Όταν μια ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ η εξίσωσή της γράφεται στη μορφή :

$$\psi - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow \psi - 2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \psi = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 2 \Leftrightarrow \psi = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \}$$

B3. {Υπολογίζουμε τις ρίζες της πρώτης παραγώγου, λύνουμε τις ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$ και εφαρμόζουμε, με συμβολικό τρόπο σε έναν πίνακα μεταβολών, τα θεωρήματα της σελίδας 40 του βιβλίου <<μαθηματικά και στοιχεία στατιστικής>> (δες και άσκηση 7)} Ένα κλάσμα είναι ίσο με το μηδέν αν ο αριθμητής του είναι ίσος με το μηδέν $\frac{0}{5} = 0$, $\frac{5}{0}$ = δεν ορίζεται }

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = 0 \quad \text{αν } x = 0, \quad f'(x) > 0 \quad \text{αν } x > 0 \quad \text{και } f'(x) < 0 \quad \text{αν } x < 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
	τ. ε.		

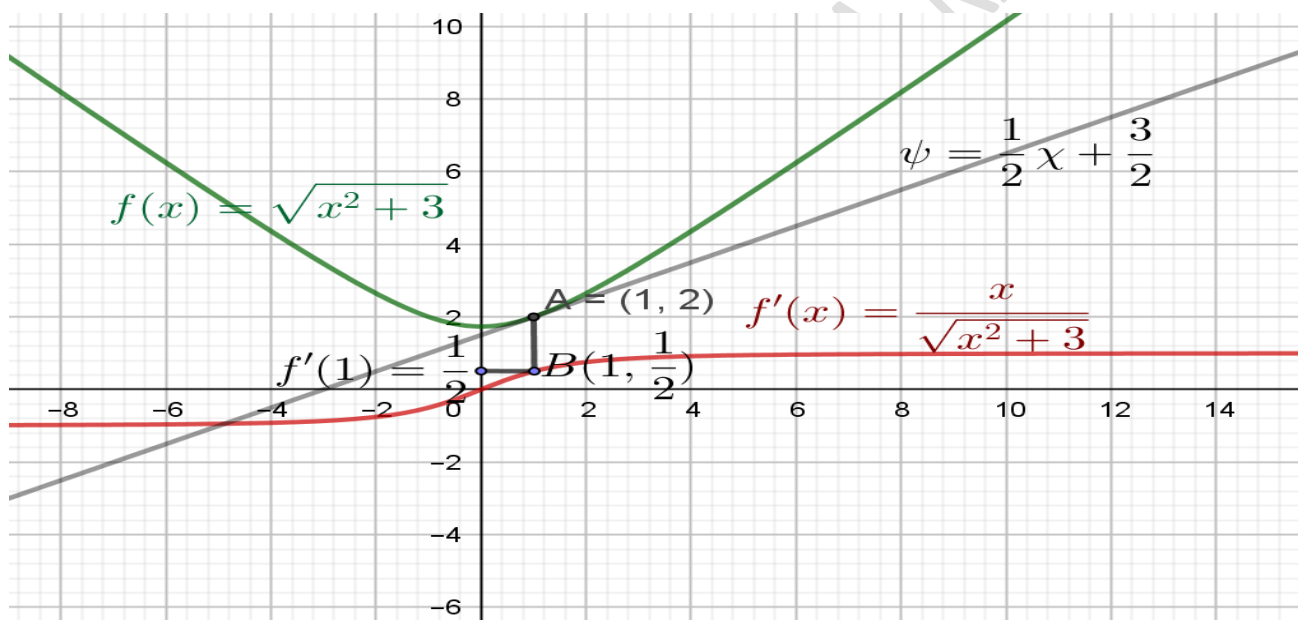
Η f είναι γνησίως φθίνουσα ($\searrow$) στο $(-\infty, 0]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα ($\nearrow$) στο $[0, +\infty)$

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x=0$ (που είναι και ολικό ελάχιστο) το $f(0) = \sqrt{0^2+3} = \sqrt{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+3})^2-2^2}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3-4}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{1+1}{\sqrt{1^2+3}+2} = \frac{2}{\sqrt{4}+2} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$$



14) ΓΕΛ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟ 2016

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -x^2 + 3\alpha x + 2$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να υπολογίσετε το α , αν γνωρίζετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, f(1))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

Μονάδες 9

Γ2. Για $\alpha = 1$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $B(2, f(2))$ είναι $y = -x + 6$.

Μονάδες 8

Γ3. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία (ϵ) του ερωτήματος Γ2 με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 8

14) ΛΥΣΗ

Γ1. Η εφαπτόμενη στο $A(1, f(1))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(1) = \tan 45^\circ = 1$ Η παράγωγος είναι

$f'(x) = -2x + 3\alpha$ οπότε $f'(1) = -2 \cdot 1 + 3\alpha = 1 \Leftrightarrow 3\alpha = 1 + 2 \Leftrightarrow 3\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{3} = 1$ και η συνάρτηση γίνεται:
 $f(x) = -x^2 + 3x + 2$ και η πρώτη παράγωγος: $f'(x) = -2x + 3$

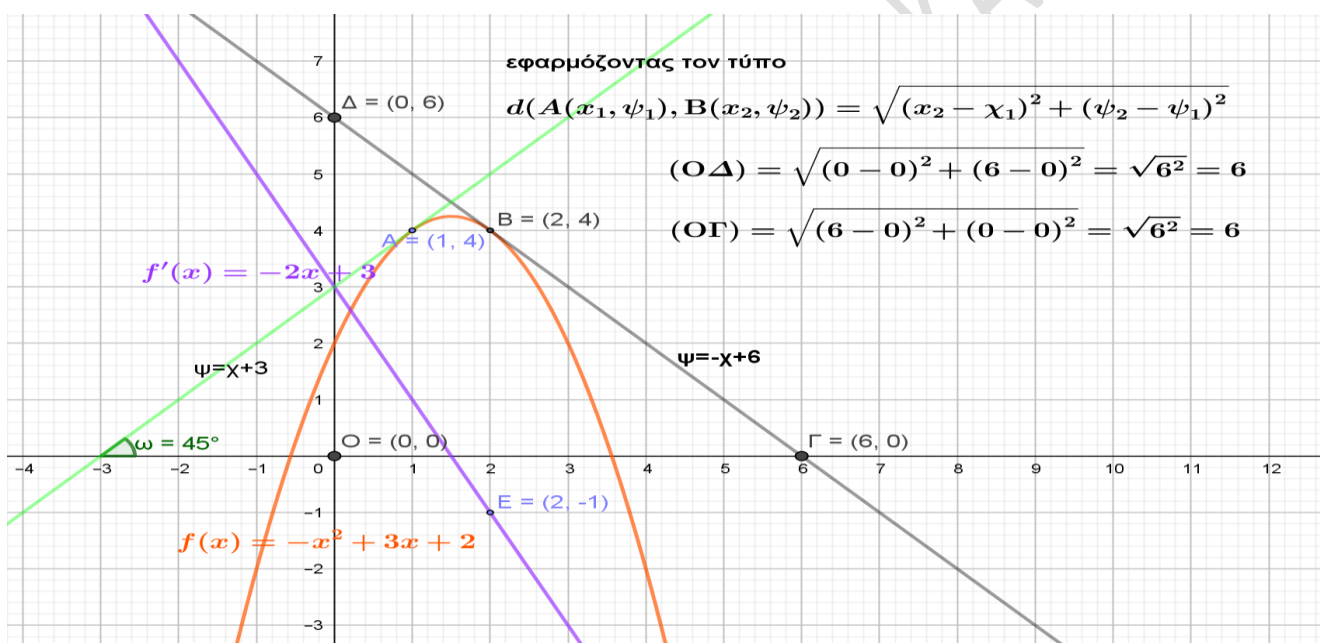
Γ2. Η εφαπτόμενη στο σημείο $B(2, f(2)) = B(2, 4)$ (διότι $f(2) = -2^2 + 3 \cdot 2 + 2 = -4 + 6 + 2 = 4$)

έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(2) = -2 \cdot 2 + 3 = -4 + 3 = -1$ και η εξίσωσή της είναι: $\psi = -x + \beta$ Το σημείο $B(2, 4)$ ως κοινό σημείο επαληθεύει την εξίσωσή της άρα $4 = -2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 4 + 2 = 6$ οπότε $\psi = -x + 6$

{2ος τρόπος: $\psi - 4 = -1(x - 2) \Leftrightarrow \psi - 4 = -x + 2 \Leftrightarrow \psi = -x + 4 + 2 \Leftrightarrow \psi = -x + 6$ }

Γ3. Η ευθεία $\psi = -x + 6$ τέμνει τον άξονα $x'x$ αν $\psi = 0$ οπότε $0 = -x + 6 \Leftrightarrow -x = -6 \Leftrightarrow x = 6$ δηλαδή στο σημείο $\Gamma(6, 0)$ ενώ τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$ αν $x = 0$ οπότε $\psi = -0 + 6 \Leftrightarrow \psi = 6$ δηλαδή στο σημείο $\Delta(0, 6)$

Τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ ορθογώνιο στο O και $(O\Gamma) = 6$, $(O\Delta) = 6$ άρα $E = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$



15) ΕΠΑΛ 20016

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.

Μονάδες 4

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

Μονάδες 12

Γ4. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2015)$ και $f(2016)$ της συνάρτησης f .

Μονάδες 3

15) ΛΥΣΗ

$$\Gamma 1. f'(-1) = \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\right)' = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' + \left(\frac{1}{2}\right)' = \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} + 0 = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-1}{(1+1)^2} = 0$$

$$\Gamma 2. f'(-1) = \frac{1-(-1)^2}{((1)^2+1)^2} = \frac{1-1}{(1+1)^2} = \frac{0}{2^2} = 0 \quad \text{και} \quad f'(1) = \frac{1-1^2}{(1^2+1)^2} = \frac{0}{2^2} = 0$$

Γ3. {Υπολογίζουμε τις ρίζες της πρώτης παραγώγου, λύνουμε τις ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$ και εφαρμόζουμε, με συμβολικό τρόπο σε έναν πίνακα μεταβολών, τα θεωρήματα της σελίδας 40 του βιβλίου <<μαθηματικά και στοιχεία στατιστικής>> (δες και άσκηση 7)}

Από το ερώτημα Γ2 τα $\chi_1 = -1$ και $\chi_2 = 1$ είναι ρίζες του πολυωνύμου της πρώτης παραγώγου.

$$f'(x) > 0 \quad \text{αν} \quad -1 < x < 1 \quad \text{και} \quad f'(x) < 0 \quad \text{αν} \quad -\infty < x < -1 \quad \text{και} \quad 1 < x < +\infty$$

x	$-\infty$	-1			1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$	$ $	$\nearrow$	$ $	$\searrow$
		$\tau. \varepsilon.$			$\tau. \mu.$	

Η f είναι $\searrow$ στο $(-\infty, -1]$

Η f είναι $\nearrow$ στο $[-1, 1]$

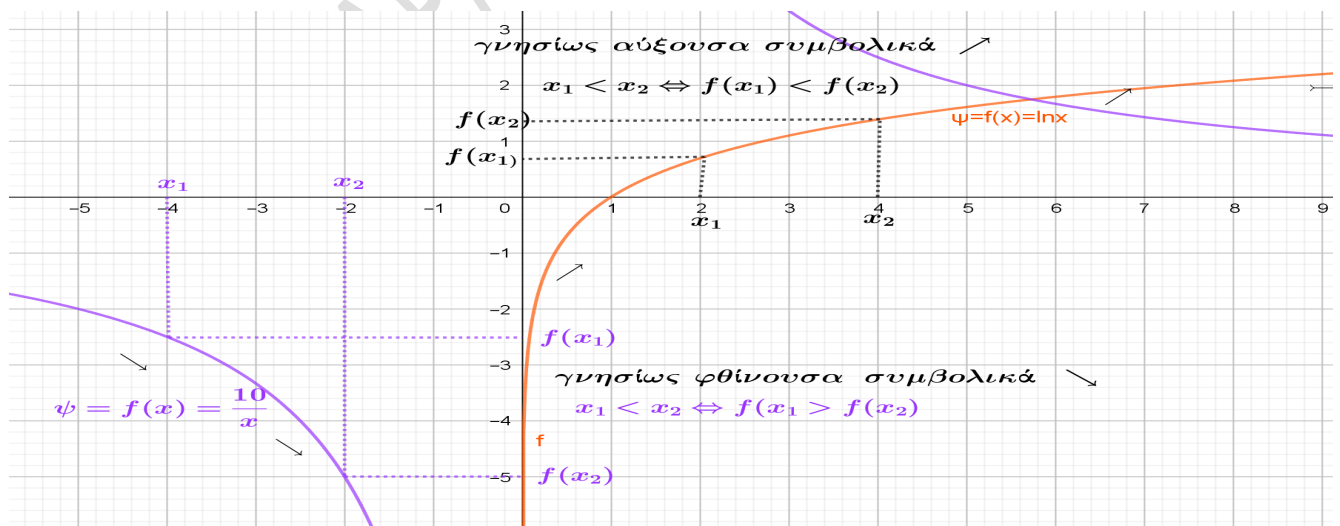
Η f είναι $\searrow$ στο $[1, +\infty)$

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $\chi_1 = -1$ το

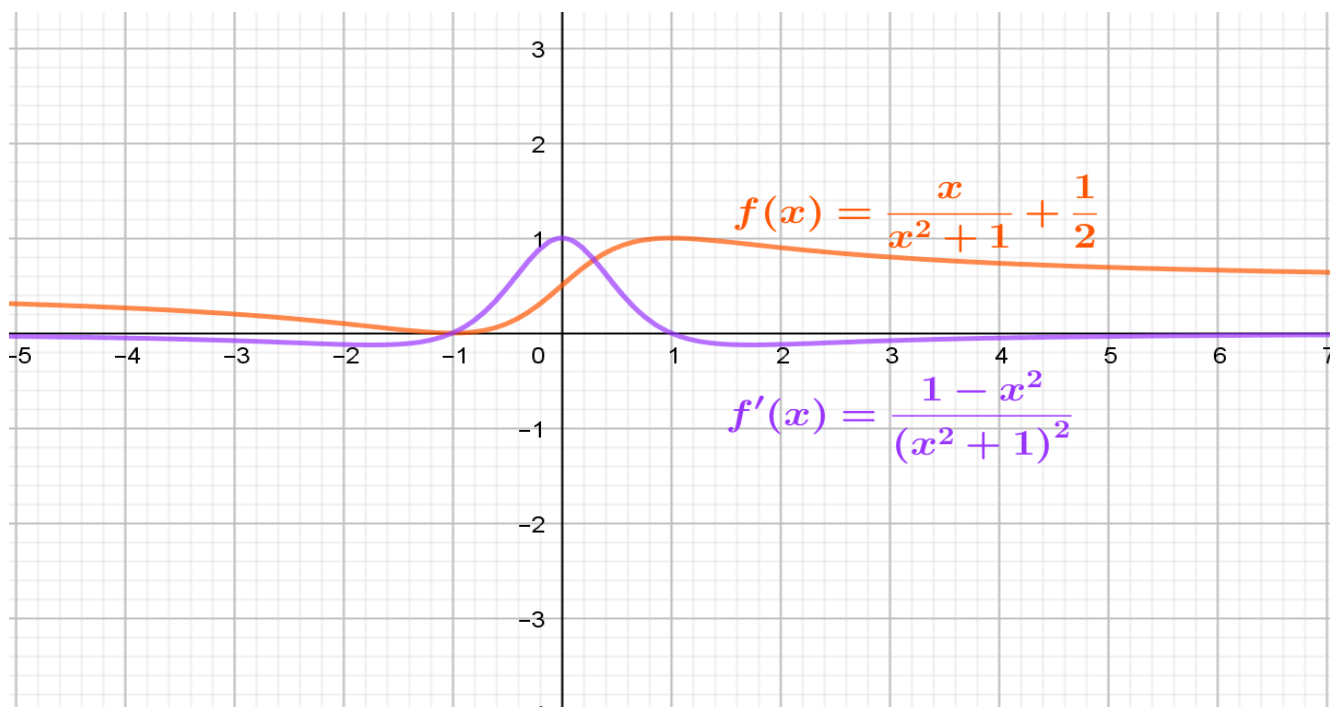
$$f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} + \frac{1}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο } \chi_2 = 1 \text{ το} \quad f(1) = \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Γ4. {σχόλιο: τη δυνατότητα να συγκρίνουμε μεταξύ τους τις τιμές μιας συνάρτησης, μας τη δίνει ο ορισμός της μονοτονίας της. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2 \Rightarrow f(\chi_1) < f(\chi_2)$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2 \Rightarrow f(\chi_1) > f(\chi_2)$. Άρα αν γνωρίζω τη σχέση των στοιχείων του πεδίου ορισμού και τη μονοτονία της συνάρτησης στο διάστημα αυτό του πεδίου ορισμού, τότε μπορώ να συμπεράνω για την σχέση των αντίστοιχων τιμών $[f(\chi)]$ της συνάρτησης. Γι αυτό βρίσκουμε τη σχέση που έχουν μεταξύ τους τα αρχέτυπα, δηλαδή τα χ_1, χ_2 , τη μονοτονία της συνάρτησης στο διάστημα που ανήκουν τα αρχέτυπα και εφαρμόζουμε τον ορισμό.}



1<2015<2016 Ανήκουν στο διάστημα $[1, +\infty)$ στο οποίο η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και βάσει του ορισμού της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης θα ισχύει: $2015 < 2016 \Leftrightarrow f(2015) > f(2016)$



16) ΕΠΑΛ 20016

ΘΕΜΑ Α

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^2 + \alpha x - 3, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Α1. Να υπολογίσετε την τιμή του α αν

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$$

Μονάδες 8

Α2. Για $\alpha=2$ να βρείτε την $f'(x)$.

Μονάδες 3

Α3. Για $\alpha=2$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(-2, f(-2))$.

Μονάδες 8

Α4. Αν τα σημεία $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), A_4(x_4, y_4), A_5(x_5, y_5)$ ανήκουν στην ευθεία $\varepsilon: y = -2x - 7$ και οι τετμημένες x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των σημείων A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 έχουν μέση τιμή $\bar{x}=2$, να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{y}$ των τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων αυτών.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

$$\Delta 1. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-2)(x-4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x-2) = 4 - 2 = 2 \text{ και η συνάρτηση γίνεται: } f(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$\Delta 2. f'(x) = (x^2 + 2x - 3)' = (x^2)' + (2x)' - 3' = 2x + 2$$

Δ3. Η εφαπτομένη στο σημείο $M(-2, f(-2)) = M(-2, -3)$ (διότι $f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$) έχει συντελεστή διεύθυνσης την $f'(-2) = 2(-2) + 2 = -4 + 2 = -2$. Συνεπώς έστω $\psi = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται της γραφικής παράστασης της (C_f) στο $M(-2, -3)$, τότε $\alpha = f'(-2) = -2$ και η εξίσωση είναι

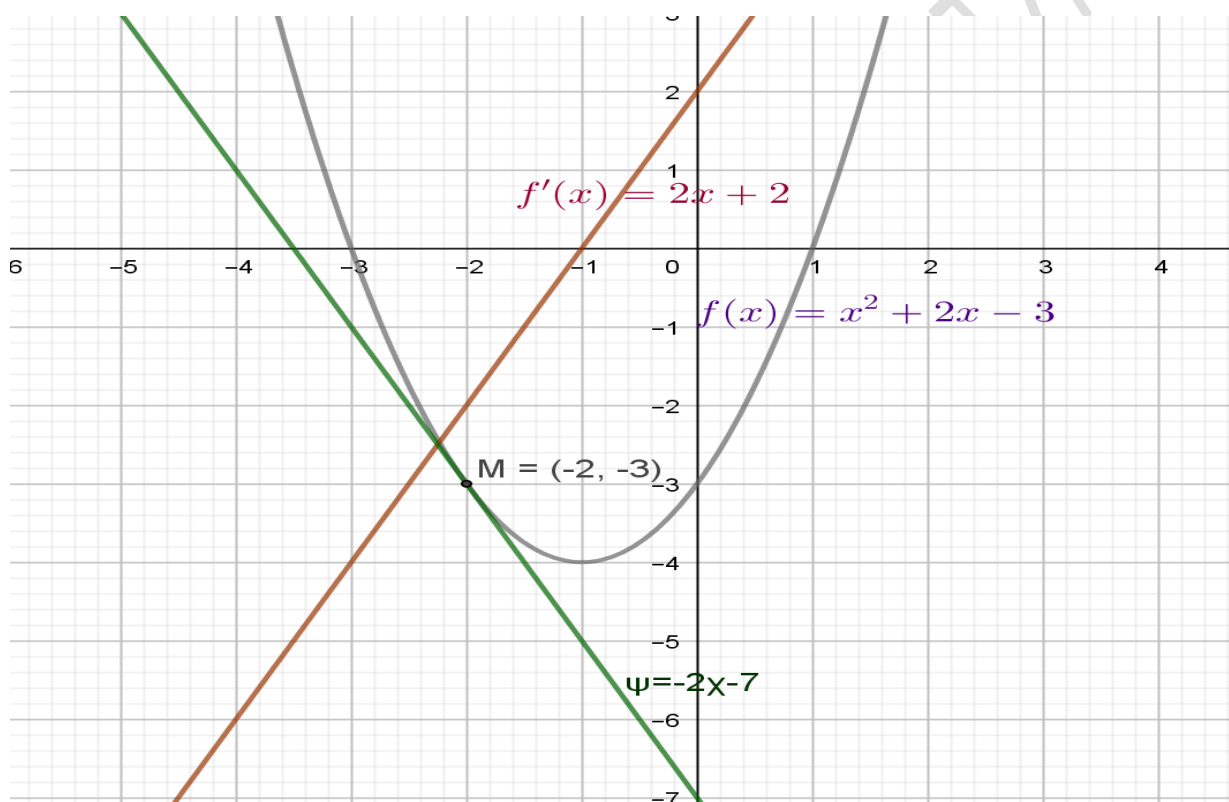
$\psi = -2\chi + \beta$ Το σημείο $M(-2, -3)$ είναι κοινό σημείο της C_f και της ευθείας άρα επαληθεύει τις εξισώσεις τους δηλαδή ισχύει $-3 = -2(-2) + \beta \Leftrightarrow -3 = 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3 - 4 = -7$ και η εξίσωση γίνεται: $\psi = -2\chi - 7$

Δ4. (Σχόλιο: βάση της εφαρμογής 3 σελ.99 σε συνδυασμό με την άσκηση 18 Α ομάδας σελ.102)

Αν $\psi_i = -2\chi_i - 7$ με $i=1,2,3,4,5$ τότε ισχύει $\bar{\psi} = -2\bar{\chi} - 7 \Leftrightarrow \bar{\psi} = -2 \cdot 2 - 7 \Leftrightarrow \bar{\psi} = -4 - 7 = -11$

{2^{ος} τρόπος κλασικά με βάση τον ορισμό: Αν $\psi_i = -2\chi_i - 7$ με $i=1,2,3,4,5$ τότε

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -2\chi_1 - 7, \psi_2 = -2\chi_2 - 7, \psi_3 = -2\chi_3 - 7, \psi_4 = -2\chi_4 - 7, \psi_5 = -2\chi_5 - 7 \text{ και } \bar{\psi} = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 + \psi_5}{5} = \\ &= \frac{-2\chi_1 - 7 - 2\chi_2 - 7 - 2\chi_3 - 7 - 2\chi_4 - 7 - 2\chi_5 - 7}{5} = \frac{-2(\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5) + 5(-7)}{5} \\ &= -2 \frac{\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5}{5} + \frac{5(-7)}{5} = -2\bar{\chi} - 7 = -2 \cdot 2 - 7 = -4 - 7 = -11 \text{ εκτός ύλης για σχ.έτος 2020-21 } \end{aligned}$$



17) ΕΠΑΛ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2016

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{4}{3}$$

Γ1. Να βρείτε τις $f'(x)$ και $f''(x)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + f''(x) + 4}{\sqrt{x} - 1}$

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -4x + 16$.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 6

17) ΛΥΣΗ

$$\Gamma 1. f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x - \frac{3}{4}\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' - (x^2)' - (3x)' - \left(\frac{3}{4}\right)' = \frac{3x^2}{3} - 2x - 3 - 0 = x^2 - 2x - 3$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (x^2 - 2x - 3)' = (x^2)' - (2x)' - 3' = 2x - 2 - 0 = 2x - 2$$

$$\Gamma 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + f''(x) + 4}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 3 + 2x - 2 + 4}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}^2 - 1^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(\sqrt{x}+1) = (1+1)(\sqrt{1}+1) = 2 \cdot 2 = 4$$

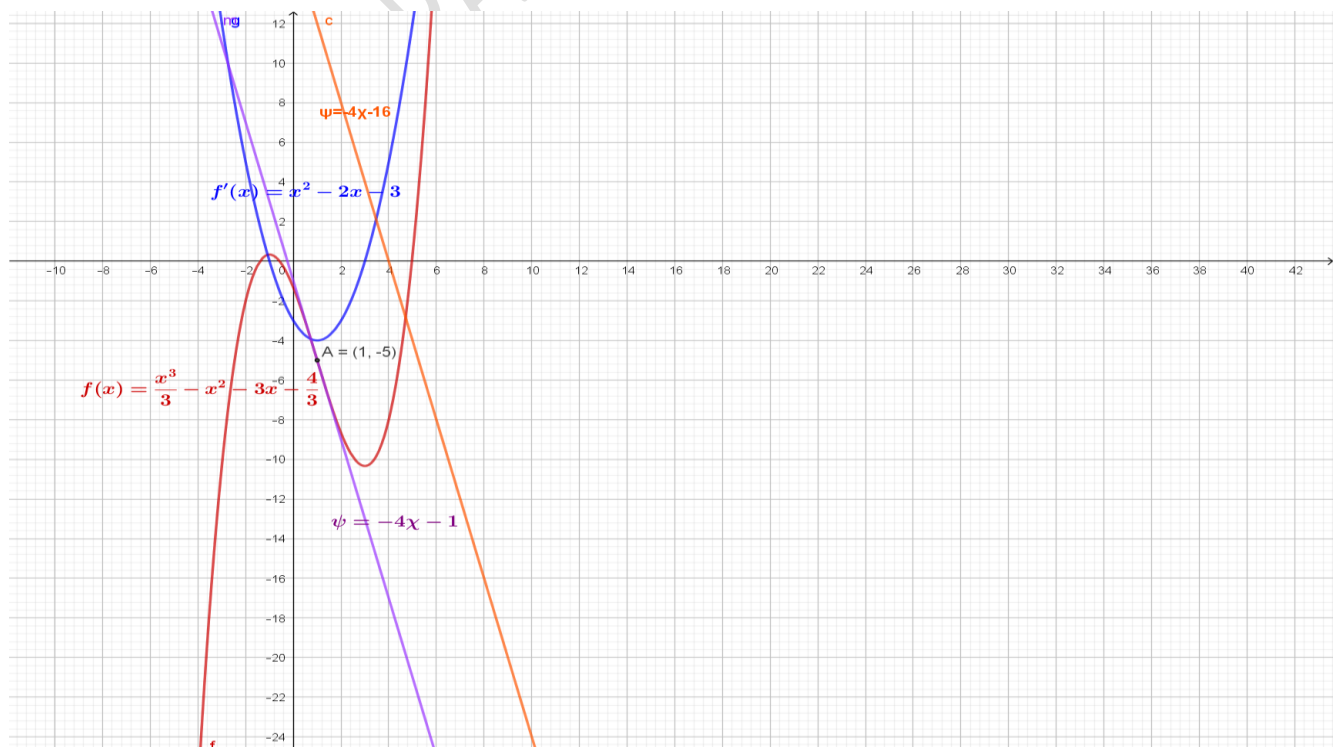
Γ3. Έστω $A(x, f(x))$ το σημείο της γραφικής παράστασης όπου εφάπτεται η ευθεία με εξίσωση

$\psi = \alpha x + \beta$ με $\alpha = f'(x)$ άρα $\psi = f'(x)x + \beta$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi = -4x + 16$. Γνωρίζουμε ότι οι παράλληλες ευθείες έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης. Συνεπώς ισχύει: $f'(x) = -4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = -4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$ ή $x-1=0$ ή $x=1$ διπλή ρίζα οπότε το σημείο είναι το $A(1, f(1)) = A(1, -5)$ διότι:

$$f(1) = \frac{1^3}{3} - 1^2 - 3 \cdot 1 - \frac{4}{3} = \frac{1}{3} - 1 - 3 - \frac{4}{3} = -4 - 1 = -5$$

Γ4. Αν $\psi = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στη γραφική παράσταση στο σημείο

$A(1, f(1)) = A(1, -5)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = f'(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = 1 - 2 - 3 = 1 - 5 = -4$ και η εξίσωσή της είναι $\psi = -4x + \beta$. Το σημείο $A(1, -5)$ είναι κοινό σημείο ευθείας και γραφήματος άρα επαληθεύει την εξίσωσή της, δηλαδή ισχύει $-5 = -4 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -5 + 4 = -1$ και η εξίσωση είναι: $\psi = -4x - 1$



ΘΕΜΑ ΔΔίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^4 + \alpha x + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να υπολογίσετε τις τιμές των α (μον. 6) και β (μον. 2) αν

$$f(0) = 2019 \text{ και } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 0$$

Μονάδες 8**Δ2.** Για $\alpha = 4$ και $\beta = 2019$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το ακρότατό της.**Μονάδες 12****Δ3.** Να αποδείξετε ότι $x^4 + 4x \geq -3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.**Μονάδες 5****18) ΛΥΣΗ**

Δ1. $\begin{cases} f(0) = 2019 \\ f(x) = x^4 + \alpha x + \beta \end{cases} \quad f(0) = 0^4 + \alpha \cdot 0 + \beta = 2019 \Leftrightarrow \beta = 2019 \quad \text{Από τον ορισμό της}$
 παραγώγου της f στο x_0 $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ άρα το $f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 0$ (1)

Υπολογίζουμε την $f'(x) = (x^4)' + (\alpha x)' + \beta' = 4x^3 + \alpha$ και την $f'(-1) = 4(-1)^3 + \alpha = -4 + \alpha$ (2)

Από σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $-4 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4$ και η συνάρτηση γίνεται:

$$f(x) = x^4 + 4x + 2019 \quad \text{η δε παράγωγος } f'(x) = 4x^3 + 4$$

Δ2. { Υπολογίζουμε τις ρίζες της πρώτης παραγώγου και λύνουμε τις ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$ και εφαρμόζουμε, με συμβολικό τρόπο σε έναν πίνακα μεταβολών, τα θεωρήματα της σελίδας 40 του βιβλίου <<μαθηματικά και στοιχεία στατιστικής>> } (δες και άσκηση 7)

$$f'(x) = 4x^3 + 4 = 0 \Leftrightarrow 4x^3 = -4 \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{|-1|} = -\sqrt[3]{1} = -1$$

{**σχόλιο:** επίλυση εξίσωσης $x^v = a$ με v περιττό και $a < 0$ Α λυκείου σελ.86 : $x = -\sqrt[v]{|a|}$ }

{διαφορετικά αναλύουμε την ταυτότητα $4x^3 + 4 = 0 \Leftrightarrow 4(x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$ }

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \\ x^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$$

($\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$ ομόσημο του $a = 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$)

Ακόμη με το σχήμα Horner $x^3 + 1 = x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 = 0$

$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$ άρα -1 ρίζα οπότε έχουμε $x^3 + 1 = [x - (-1)](x^2 - 1x + 1) = 0$

$\begin{array}{cccc|c} & -1 & 1 & -1 & \end{array}$ όμως το $x^2 - x + 1$ έχει διακρίνουσα αρνητική άρα δεν έχει

-----| ρίζες όπως δείχθηκε παραπάνω. }

$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$

Συνεπώς $f'(x) > 0$ αν $x > -1$ και $f'(x) < 0$ αν $x < -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$ $	$\nearrow$
	τ. ε.		

Η f είναι $\searrow$ στο $(-\infty, -1]$

Η f είναι $\nearrow$ στο $[-1, +\infty)$

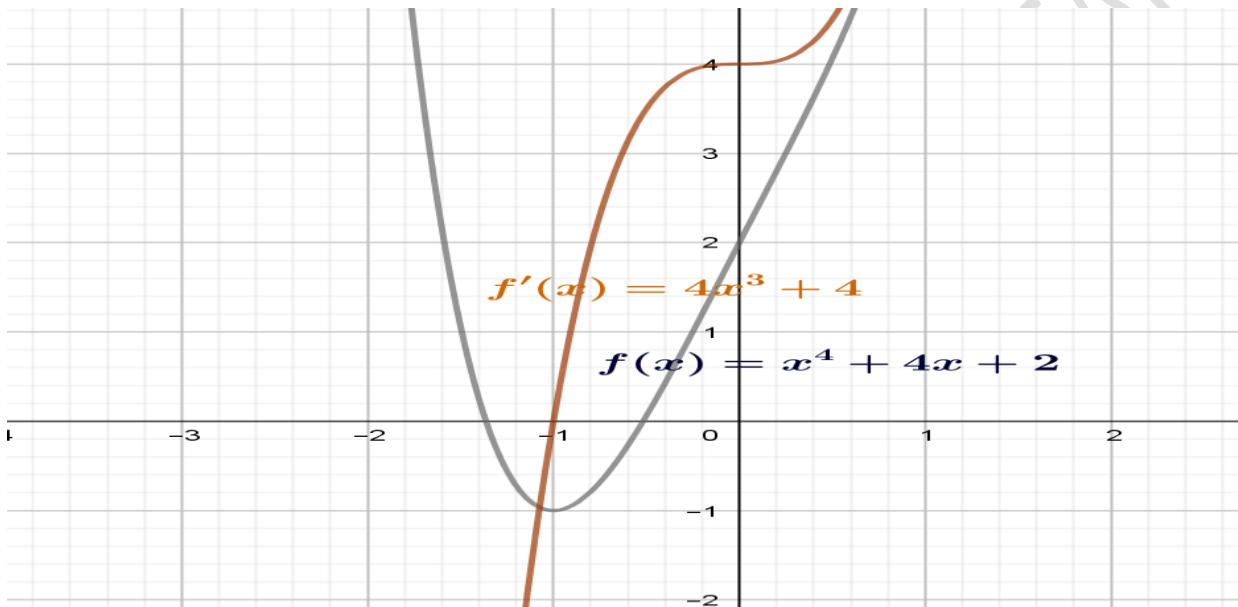
Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο(ολικό ελάχιστο)
στο $x=-1$ το $f(-1) = (-1)^4 + 4(-1) + 2019 =$

$$1 - 4 + 2019 = 2016$$

Δ3. {σχόλιο: Στο $x=-1$ η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(-1) = 2016$ που σημαίνει ότι για κάθε x του πεδίου ορισμού ισχύει : $f(x) \geq f(-1) = 2016$ σελ 14 βιβλίου}

Επειδή η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=-1$ το $f(-1) = 2016$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Π.Ο. ισχύει:

$$f(x) \geq 2016 \Leftrightarrow x^4 + 4x + 2019 \geq 2016 \Leftrightarrow x^4 + 4x \geq 2016 - 2019 \Leftrightarrow x^4 + 4x \geq -3$$



19) ΓΕΛ ΕΣΠΕΡΙΝΑ 2017

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με

$$f(x) = x^2 - 6x + 9, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$g(x) = x - 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης h με $h(x) = f(x) + g(x)$.

Μονάδες 4

B2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης φ με $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ και να γράψετε τον τύπο της στην απλούστερη δυνατή μορφή.

Μονάδες 8

B3. Να υπολογίσετε τα όρια

α. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{h(x)}$ (μονάδες 6) και

β. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{h(x)}{\varphi(x)}$. (μονάδες 7)

Μονάδες 13

19)ΛΥΣΗ

B1. $h(x)=f(x)+g(x)=x^2-6x+9+x-3=x^2-5x+6$ Και έχει Π.Ο. το $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

B2. $\phi(x)=\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{x^2-6x+9}{x-3}=\frac{(x-3)^2}{x-3}=x-3$ Π.Ο.= $\mathbb{R}-\{g(x)=0\}=\mathbb{R}-\{3\}$ αφού $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

B3. α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-5x+6} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{2-3} = \frac{1}{-1} = -1$

β) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{h(x)}{\phi(x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-2) = 3-2=1$

20) ΓΕΛ ΕΣΠΕΡΙΝΑ 201

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, f(2))$.

Μονάδες 7

Δ3. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία (ϵ) του ερωτήματος Δ2 τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 4

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1}$.

Μονάδες 8

20) ΛΥΣΗ

Δ1. {Υπολογίζουμε τις ρίζες της πρώτης παραγώγου και λύνουμε τις ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$ και εφαρμόζουμε, με συμβολικό τρόπο σε έναν πίνακα μεταβολών, τα θεωρήματα της σελίδας 40 του βιβλίου <<μαθηματικά και στοιχεία στατιστικής>> (δες και άσκηση 7)}

$f'(x) = (x^2 - x + 1)' = (x^2)' - x' + 1' = 2x - 1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$ $	$\nearrow$
	τ. ε.		

Η συνάρτηση f είναι $\searrow$ στο $(-\infty, \frac{1}{2}]$

Η συνάρτηση f είναι $\nearrow$ στο $[\frac{1}{2}, +\infty)$

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = \frac{1}{2}$ το

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{3}{4}$

Δ2. Αν $\psi = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της ευθείας που εφαπτεται στη γραφική παράσταση στο σημείο

$A(2, f(2)) = A(2, 3)$ (διότι $f(2) = (2)^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$ Η εξίσωση τότε είναι $\psi = f'(2)x + \beta = 3x + \beta$ Το σημείο $A(2, 3)$ ως κοινό σημείο της της γραφικής παράστασης και της ευθείας επαληθεύει τον τύπο της άρα ισχύει $3 = 3 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow 3 = 6 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3 - 6 = -3$ και η εξίσωση γίνεται $\psi = 3x - 3$

{2ος τρόπος: Όταν η ευθεία διέρχεται από ένα σημείο $A(x_0, \psi_0=f(x_0))$, γράφεται στη μορφή:

$\psi - f(x_0) = f'(x_0)(\chi - x_0)$ Εδώ διέρχεται από το σημείο $A(2,3)$ και έχει $f'(2)=3$ άρα $\psi - 3 = 3(\chi - 2) \Leftrightarrow$

$$\psi - 3 = 3\chi - 6 \Leftrightarrow \psi = 3\chi - 6 + 3 \Leftrightarrow \psi = 3\chi - 3 \quad \}$$

Δ3. {Σχόλιο: Τα σημεία του άξονα $\chi'\chi$ έχουν τεταγμένη $\psi=0$ Άρα η ευθεία $\psi = \alpha\chi + \beta$ συναντά τον άξονα, αν έχει σημείο που η τεταγμένη του είναι ίση με μηδέν. Στον τύπο $\psi = \alpha\chi + \beta$, θέτω $\psi=0$ και λύνω την εξίσωση που προκύπτει. $\alpha\chi + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha\chi = -\beta \Leftrightarrow \chi = -\frac{\beta}{\alpha}$ (με $\alpha \neq 0$) και το σημείο είναι το $(-\frac{\beta}{\alpha}, 0)$ Γιαυτό και λέμε ότι, τα σημεία που η γραφική παράσταση συναντά τον άξονα $\chi'\chi$, είναι οι ρίζες της εξίσωσής της (του τύπου της). Για τον κατακόρυφο άξονα, τον άξονα των τεταγμένων ή όπως λέμε τον άξονα των τιμών της συνάρτησης, γνωρίζουμε ότι τα σημεία του, έχουν τεταγμένη ($\chi=0$) ίση με το μηδέν. Για να βρω το σημείο, στον τύπο $\psi = \alpha\chi + \beta$, θέτω $\chi=0$ και βρίσκω το ψ . $\psi = \alpha \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \psi = \beta$ και το σημείο είναι το $(0, \beta)$ Δηλαδή κάθε ευθεία $\psi = \alpha\chi + \beta$ συναντά τον $\psi'\psi$ στο β που μας δίνεται κάθε φορά. Αν το $\beta=0$ η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων }

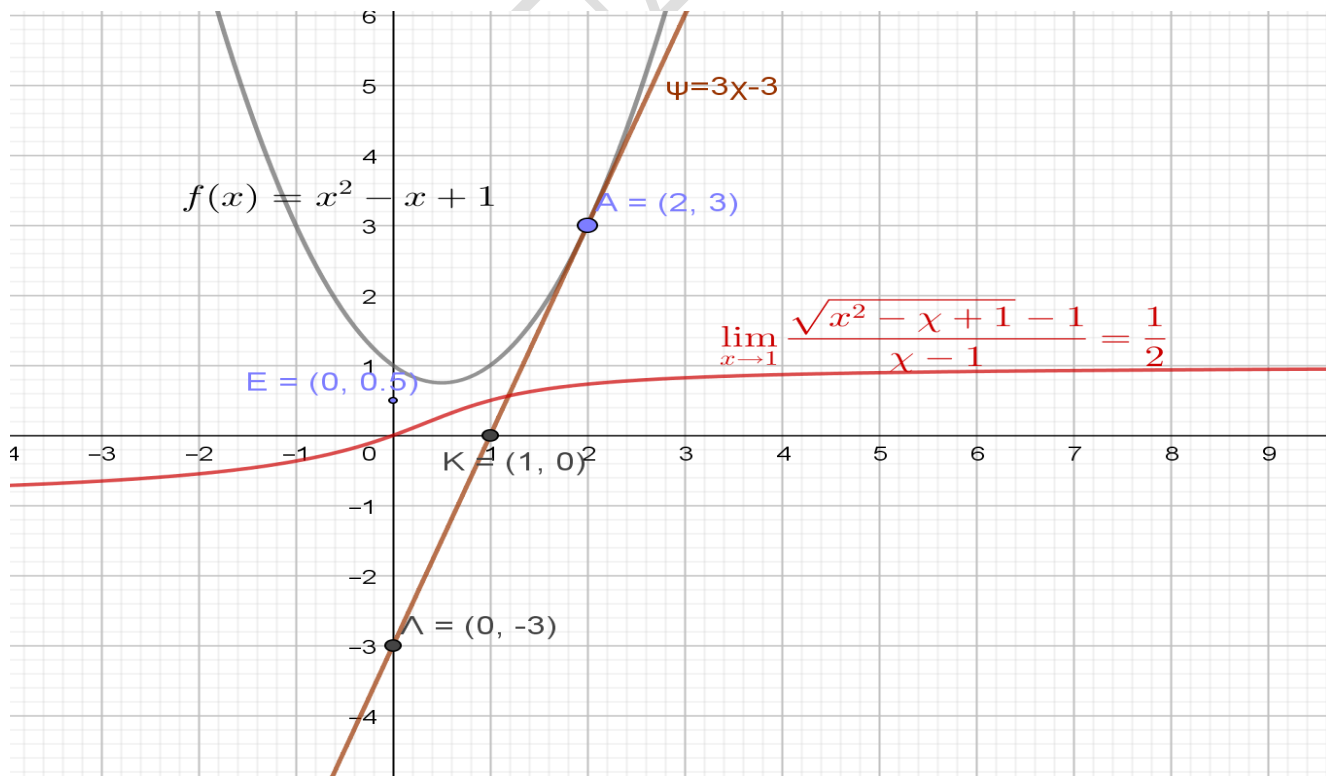
Συναντά τον άξονα $\chi'\chi$ όταν $\psi=0$ οπότε: $3\chi - 3 = 0 \Leftrightarrow 3\chi = 3 \Leftrightarrow \chi = \frac{3}{3} = 1$ το σημείο είναι το $K(1,0)$

Συναντά τον άξονα $\psi'\psi$ όταν $\chi=0$ οπότε: $\psi = 3 \cdot 0 - 3 \Leftrightarrow \psi = 0 - 3 \Leftrightarrow \psi = -3$ το σημείο είναι το $\Lambda(0, -3)$

$$\Delta 4. \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(\chi)} - 1}{\chi - 1} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1} - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1})^2 - 1^2}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1 - 1}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1^2 - 1 + 1} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$



21) ΓΕΛ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2017

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{x - 1}$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στα οποία ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ισούται με 1.

Μονάδες 6

21) ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \Gamma 1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \frac{x}{x^2 + 1} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2x}{x^2 + 1} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2x - x^2 - 1}{x^2 + 1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 2x - 1}{(x - 1)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[-\frac{x^2 - 2x + 1}{(x - 1)(x^2 + 1)} \right] = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \left[-\frac{x^2 - 2x + 1}{(x - 1)(x^2 + 1)} \right] &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left[-\frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x^2 + 1)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[-\frac{x - 1}{x^2 + 1} \right] = -\frac{1 - 1}{1^2 + 1} = -\frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

Γ2. {Υπολογίζουμε τις ρίζες της πρώτης παραγώγου και λύνουμε τις ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$ και εφαρμόζουμε, με συμβολικό τρόπο σε έναν πίνακα μεταβολών, τα θεωρήματα της σελίδας 40 του βιβλίου <<μαθηματικά και στοιχεία στατιστικής>> (δες και άσκηση 7)}

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{x'(x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1(x^2 + 1) - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - x)(1 + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ 1 + x = 0 \Leftrightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$f(x) > 0 \quad \text{αν} \quad x \in [-1, 1] \quad \text{και} \quad f(x) < 0 \quad \text{αν} \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$	$ $	$\nearrow$	$ $	$\searrow$
		$\tau. \epsilon.$		$\tau. \mu.$		

Η f είναι $\searrow$ στο $(-\infty, -1]$

Η f είναι $\nearrow$ στο $[-1, 1]$

Η f είναι $\searrow$ στο $[1, +\infty)$

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = -1$ το

$$f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} = -\frac{1}{2} \quad \text{Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο } x = 1 \text{ το} \quad f(1) = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

Γ3. Έστω $\psi = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(\sqrt{2}, f(\sqrt{2})) = A(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{3})$ (διότι

$$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{3}) \quad \text{με } \alpha = f'(\sqrt{2}) \text{ οπότε: } \psi = f'(\sqrt{2})x + \beta \quad \text{αλλά} \quad f'(\sqrt{2}) = \frac{1 - (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2}^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{1 - 2}{(2 + 1)^2} = \frac{-1}{3^2} = -\frac{1}{9} \quad \text{και αντικαθιστώντας έχουμε: } \psi = -\frac{1}{9}x + \beta \quad \text{Το σημείο } A(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}) \text{ ως κοινό}$$

σημείο της γραφικής παράστασης και της ευθείας επαληθεύει τον τύπο της άρα ισχύει:

$$\frac{\sqrt{2}}{3} = -\frac{1}{9} \cdot \sqrt{2} + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{9} = \frac{3\sqrt{2}}{9} + \frac{\sqrt{2}}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \quad \text{και η εξίσωση γίνεται: } \psi = -\frac{1}{9}\chi + \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

{2ος τρόπος: Όταν η ευθεία διέρχεται από ένα σημείο $A(\chi_0, \psi_0=f(\chi_0))$, γράφεται στη μορφή:

$$\psi - f(\chi_0) = f'(\chi_0)(\chi - \chi_0) \quad \text{Εδώ διέρχεται από το σημείο } A(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}) \quad \text{και έχει } f'(\sqrt{2}) = -\frac{1}{9}$$

$$\text{άρα } \psi - \frac{\sqrt{2}}{3} = -\frac{1}{9}(\chi - \sqrt{2}) \Leftrightarrow \psi - \frac{\sqrt{2}}{3} = -\frac{1}{9}\chi + \frac{1}{9}\sqrt{2} \Leftrightarrow \psi = -\frac{1}{9}\chi + \frac{1}{9}\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow$$

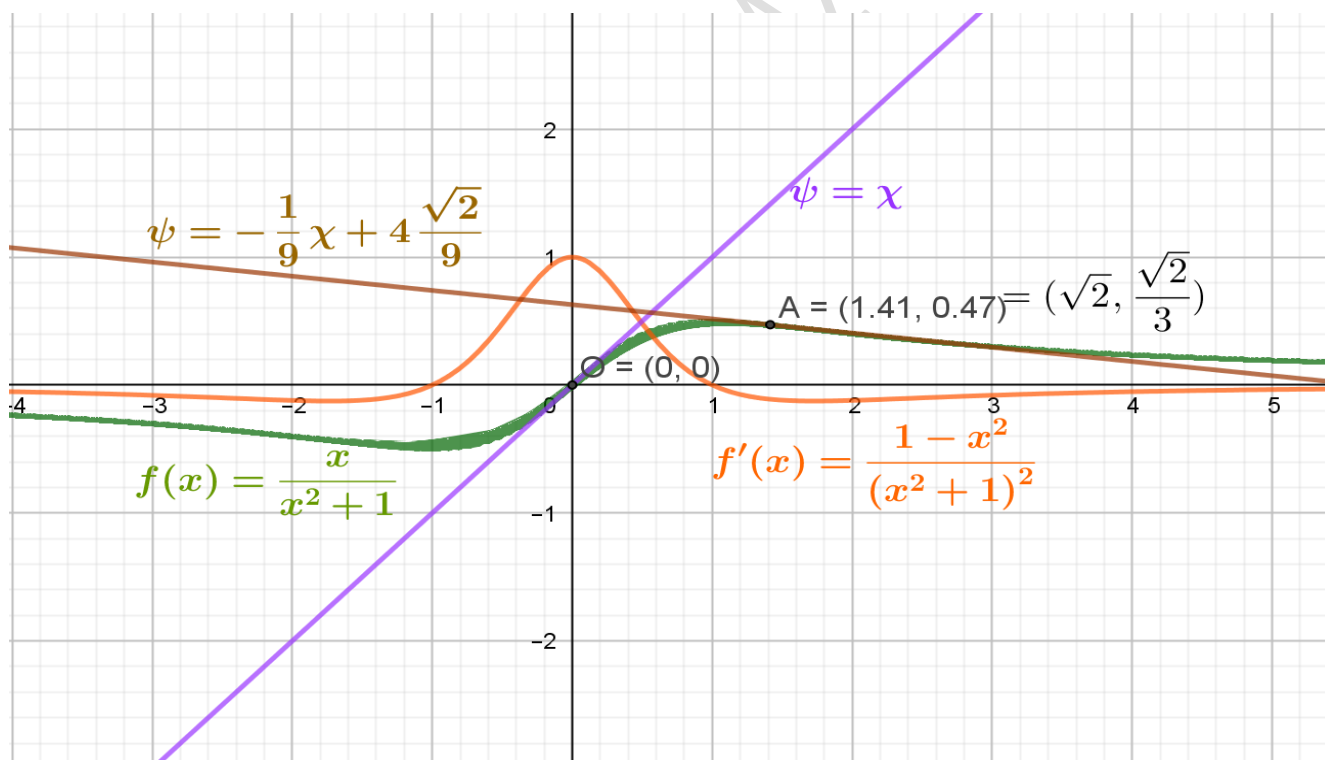
$$\psi = -\frac{1}{9}\chi + \frac{\sqrt{2}}{9} + \frac{\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow \psi = -\frac{1}{9}\chi + \frac{\sqrt{2}}{9} + \frac{3\sqrt{2}}{9} \Leftrightarrow \psi = -\frac{1}{9}\chi + \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\text{Γ4. } f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 1 \Leftrightarrow 1 - x^2 = (x^2+1)^2 \Leftrightarrow 1 - x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^4 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ x^2 + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{αδύνατο ως άθροισμα δύο θετικών}$$

Για $\chi=0$ $f(0) = \frac{0}{0^2+1} = \frac{0}{1} = 0$ άρα στο σημείο $A(0, f(0)) = A(0,0)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης ένα.

{Σχόλιο : αν ζητούσε την εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης ένα και εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο $A(0,0)$ η εξίσωση είναι: $\psi - 0 = 1(\chi - 0) \Leftrightarrow \psi = \chi$ είναι η διχοτόμος της $1^{\text{ης}}$ - $3^{\text{ης}}$ γωνίας των αξόνων. Θυμάμαι ακόμη ότι: $\epsilon\phi 45^\circ = \epsilon\phi \frac{\pi}{4} = 1$ και $\epsilon\phi 135^\circ = \epsilon\phi \frac{3\pi}{4} = -1$ }



22) ΕΠΑΛ 2017

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

Δ2. Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 2017$.

Μονάδες 6

22) ΛΥΣΗ

Δ1. { Υπολογίζουμε τις ρίζες της πρώτης παραγώγου, λύνουμε τις ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$ και εφαρμόζουμε, με συμβολικό τρόπο σε έναν πίνακα μεταβολών, τα θεωρήματα της σελίδας 40 του βιβλίου <<μαθηματικά και στοιχεία στατιστικής>> (δες και άσκηση 7) }

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \right)' = \left(-\frac{1}{3}x^3 \right)' + (2x^2)' - (3x)' + 1' = -\frac{3x^2}{3} + 2 \cdot 2x - 3 \cdot 1 + 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -x^2 + 4x - 3, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \quad (\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = 4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_1 = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 + 2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \\ \chi_2 = \frac{-4 - 2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \end{array} \right. \quad) \quad f(x) > 0 \text{ αν } x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \text{ και } f(x) < 0 \text{ αν } x \in [1, 3]$$

x	$-\infty$	1		3		$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+	0	—	
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
		τ. ε.		τ. μ.		

Η f είναι $\searrow$ στο $(-\infty, 1]$

Η f είναι $\nearrow$ στο $[1, 3]$

Η f είναι $\searrow$ στο $[3, +\infty)$

Δ2. Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x=1$ το $f(1) = -\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -\frac{1}{3} + 2 - 3 + 1 = -\frac{1}{3}$

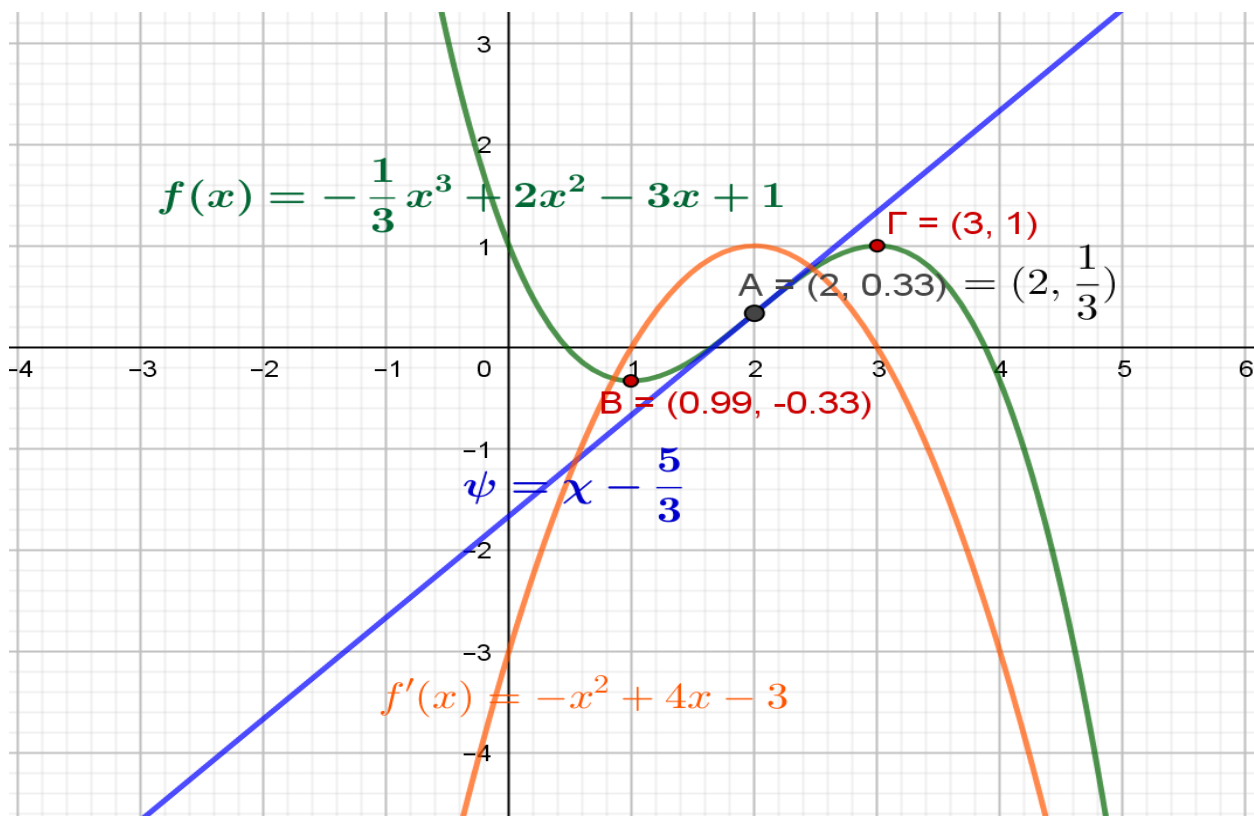
Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=3$ το $f(3) = -\frac{1}{3}3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = -9 + 18 - 9 + 1 = 1$

Δ3. Έστω $A(x, f(x))$ το σημείο όπου η ευθεία με εξίσωση $\psi = ax + b$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. Γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσής της είναι ο $f'(x)$. Επειδή η εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης στο σημείο A είναι παράλληλη στην $\psi = x + 2017$ που έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με ένα και οι παράλληλες ευθείες έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, ισχύει: $f'(x) = 1 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 1 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ διπλή ρίζα. Οπότε το σημείο είναι: $A(2, f(2)) = A(2, \frac{1}{3})$ διότι: $f(2) = -\frac{1}{3}2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -\frac{8}{3} + 8 - 6 + 1 = -\frac{8}{3} + 3 = -\frac{8}{3} + \frac{9}{3} = \frac{1}{3}$

{ δεν το απαιτεί η άσκηση: η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στο $A(2, \frac{1}{3})$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης:

$$f'(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = -4 + 8 - 3 = 8 - 7 = 1 \text{ είναι } \psi - \frac{1}{3} = 1(x - 2) \Leftrightarrow$$

$$\psi - \frac{1}{3} = x - 2 \Leftrightarrow \psi = x - 2 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \psi = x - \frac{5}{3} \quad \}$$



23) ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΕΠΑΛ 2018

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = 2x^3 - 3kx^2 + k, \quad k \in \mathbb{R} \text{ και } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Εάν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε τον αριθμό k .

Μονάδες 5

Γ2. Για $k=1$ να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ γίνεται ελάχιστος.

Μονάδες 10

Γ3. Για $k=1$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $(-1, f'(-1))$.

Μονάδες 10

23) ΛΥΣΗ Γ1. **{Θυμάμαι:}** ο άξονας $x'x$ έχει εξίσωση $\psi=0$ ή με την τυπική μορφή $\psi=0x+0$ δηλαδή έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με μηδέν, άρα κάθε ευθεία παράλληλη στον $x'x$ έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με μηδέν, αφού οι παράλληλες ευθείες έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης. Για όποιον ακόμα απορεί.

Ορίσαμε ως συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας την εφω, όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$. Ο $x'x$ λοιπόν με τον εαυτό του σχηματίζει μηδενική γωνία, άρα $\varepsilon\phi 0^0 = \frac{\eta\mu 0^0}{\sigma\upsilon\nu 0^0} = \frac{0}{1} = 0$.

Έστω $\psi=ax+b$ η εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$. Τότε $a=f'(1)$ και αφού είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, άρα ο συντελεστής διεύθυνσής της, $f'(1) = 0$. Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο $f'(x) = (2x^3 - 3kx^2 + k)' = (2x^3)' - (3kx^2)' + (k)' = 6x^2 - 6kx$. Οπότε: $f'(1) = 6 \cdot 1^2 - 6 \cdot k \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 6 - 6 \cdot k = 0 \Leftrightarrow -6 \cdot k = -6 \Leftrightarrow k = \frac{-6}{-6} = 1$ και η συνάρτηση γίνεται: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

Γ2. {σχόλιο: Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $\psi = f(x)$ ως προς x , όταν $x=x_0$. Έτσι ο ρυθμός μεταβολής γίνεται ελάχιστος όταν η πρώτη παράγωγος έχει ελάχιστο. Γιαυτό μελετάμε την μονοτονία της πρώτης παραγώγου. Υπολογίζουμε τις ρίζες της δεύτερης παραγώγου, λύνουμε τις ανισώσεις $f''(x) > 0$ και $f''(x) < 0$ και εφαρμόζουμε, με συμβολικό τρόπο σε έναν πίνακα, τα θεωρήματα της σελίδας 40 του βιβλίου <<μαθηματικά και στοιχεία στατιστικής>> (δες και άσκηση 7) }

$$f'(x) = (2x^3 - 3x^2 + 1)' = (2x^3)' - (3x^2)' + 1' = 6x^2 - 6x + 0 = 6x^2 - 6x$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (6x^2 - 6x)' = (6x^2)' - (6x)' = 12x - 6 = 0 \Leftrightarrow 12x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

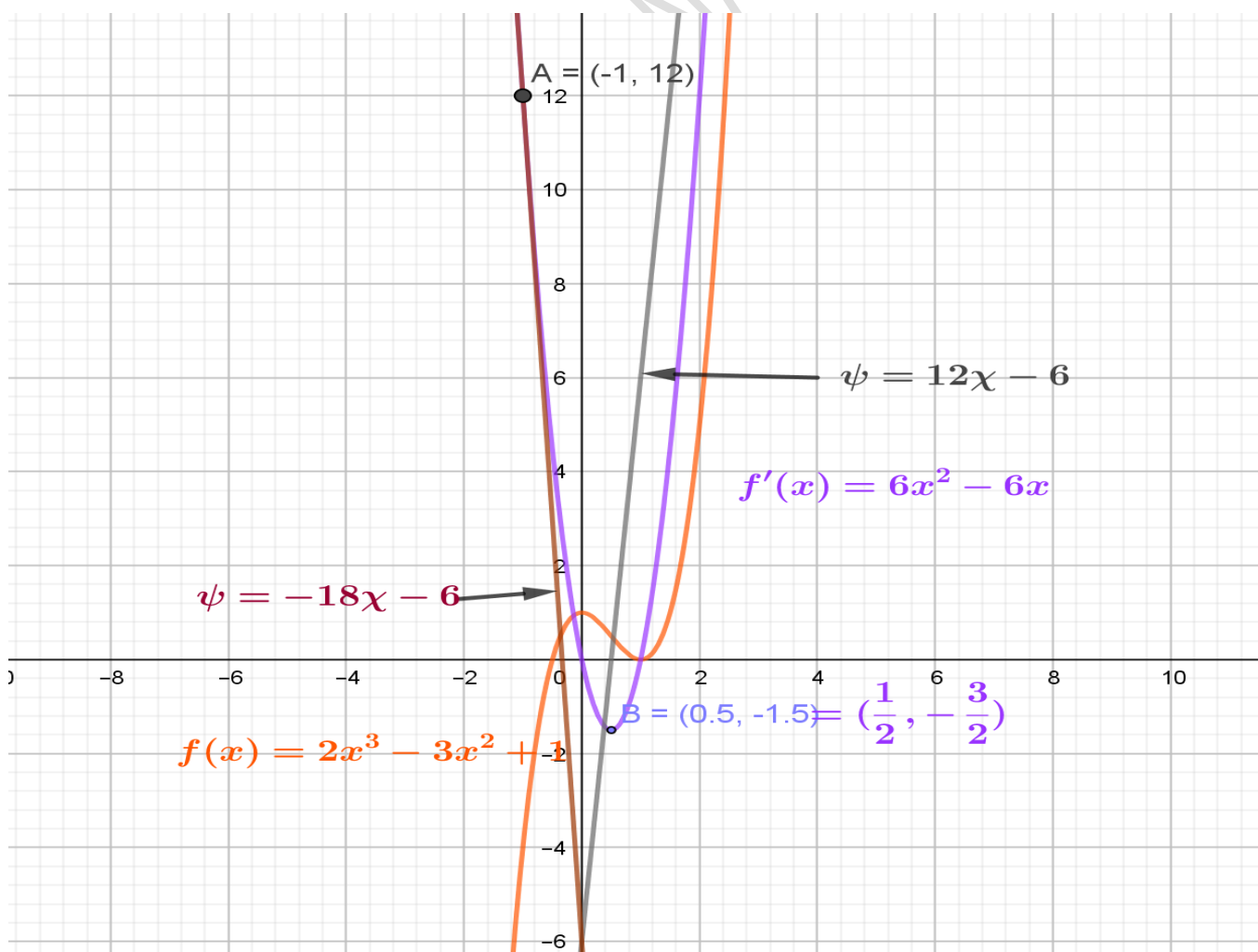
$$f''(x) = 12x - 6 > 0 \Leftrightarrow 12x > 6 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}, \quad f''(x) = 12x - 6 < 0 \Leftrightarrow 12x < 6 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
	τ. ε.		

Η $f'(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = \frac{1}{2}$

Ο ρυθμός μεταβολής γίνεται ελάχιστος όταν $x = \frac{1}{2}$

Γ3. Έστω $\psi = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης της $f'(x) = 6x^2 - 6x$ στο σημείο $(-1, f'(-1)) = (-1, 12)$ διότι: $f'(-1) = 6(-1)^2 - 6(-1) = 6 + 6 = 12$, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = f''(-1) = 12(-1) - 6 = -12 - 6 = -18$ και έχει εξίσωση $\psi = -18x + \beta$. Το σημείο $(-1, 12)$ είναι κοινό σημείο άρα επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας $12 = -18 \cdot (-1) + \beta \Leftrightarrow 12 = 18 + \beta \Leftrightarrow \beta = 12 - 18 = -6$ και η εξίσωση γίνεται: $\psi = -18x - 6$



ΘΕΜΑ ΔΔίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 2018, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

Μονάδες 6

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή του ακρότατου.

Μονάδες 9

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4)f'(x) - 2x}{x^2}$$

Μονάδες 10**24) ΛΥΣΗ**

Δ1. $f'(x) = (\sqrt{x^2 + 4} + 2018)' = (\sqrt{x^2 + 4})' + (2018)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4}}(x^2 + 4)' + 0 = \frac{2x + 0}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

Δ2. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$ $	$\nearrow$
		ολ. ε.	

Η συνάρτηση f είναι $\searrow$ στο $(-\infty, 0]$

Η συνάρτηση f είναι $\nearrow$ στο $[0, +\infty)$

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ το

$$f(0) = \sqrt{0^2 + 4} + 2018 = 2 + 2018 = 2020$$

Δ3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4)f'(x) - 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4) \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} - 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4) \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{2x\sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2 + 4}}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4)x - 2x\sqrt{x^2 + 4}}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4)x - 2x\sqrt{x^2 + 4}}{x^2(\sqrt{x^2 + 4})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[(x^2 + 4) - 2\sqrt{x^2 + 4}]}{x^2(\sqrt{x^2 + 4})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4) - 2\sqrt{x^2 + 4}}{x(\sqrt{x^2 + 4})} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4) - 2\sqrt{x^2 + 4}}{x(\sqrt{x^2 + 4})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4) - 2\sqrt{x^2 + 4}}{x(\sqrt{x^2 + 4})} \cdot \frac{(x^2 + 4) + 2\sqrt{x^2 + 4}}{(x^2 + 4) + 2\sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4)^2 - (2\sqrt{x^2 + 4})^2}{x(\sqrt{x^2 + 4})[(x^2 + 4) + 2\sqrt{x^2 + 4}]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4)^2 - 4(x^2 + 4)}{x(\sqrt{x^2 + 4})[(x^2 + 4) + 2\sqrt{x^2 + 4}]} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4)^2 - 4(x^2 + 4)}{x(\sqrt{x^2 + 4})[(x^2 + 4) + 2\sqrt{x^2 + 4}]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4)(x^2 + 4 - 4)}{x(\sqrt{x^2 + 4})[(x^2 + 4) + 2\sqrt{x^2 + 4}]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4)x^2}{x(\sqrt{x^2 + 4})[(x^2 + 4) + 2\sqrt{x^2 + 4}]} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4)x}{(\sqrt{x^2 + 4})[(x^2 + 4) + 2\sqrt{x^2 + 4}]} = \frac{(0^2 + 4)0}{(\sqrt{0^2 + 4})[(0^2 + 4) + 2\sqrt{0^2 + 4}]} = \frac{4 \cdot 0}{(\sqrt{4})[4 + 2\sqrt{4}]} = \frac{4 \cdot 0}{2[4 + 2\sqrt{4}]} = \frac{4 \cdot 0}{16} = \frac{0}{4} = 0 =$$

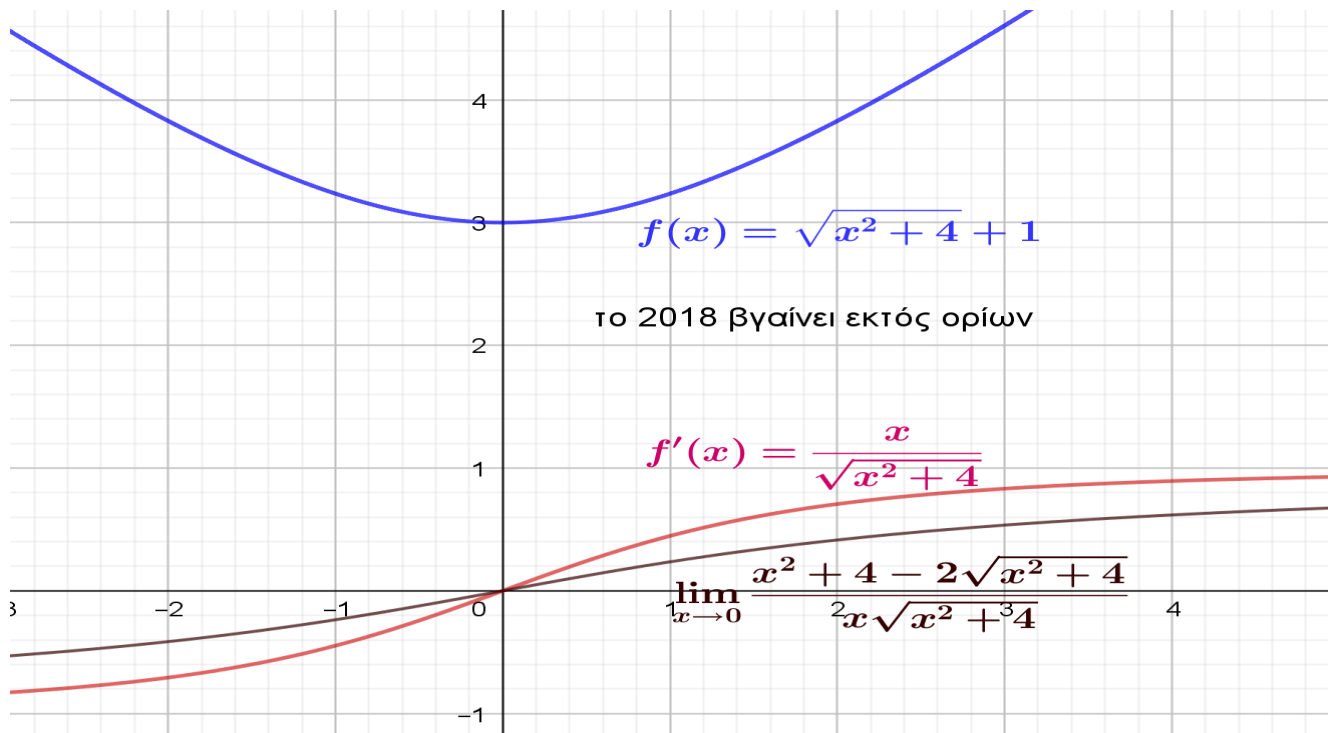
{Παρατήρηση: Αν θυμηθούμε από την Α λυκείου ότι για $x \geq 0$ ισχύει $x = (\sqrt{x})^2$ Επειδή $x^2 + 4 > 0$ ισχύει: $x^2 + 4 = (\sqrt{x^2 + 4})^2$ και κάνοντας αυτήν την αντικατάσταση στον αριθμητή γίνεται

ποιο απλός ο υπολογισμός του ορίου. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4) \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} - 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x(\sqrt{x^2 + 4})^2}{\sqrt{x^2 + 4}} - 2x}{x^2} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x^2+4}-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x^2+4}-2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)}{x(\sqrt{x^2+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+4})^2-2^2}{x(\sqrt{x^2+4}+2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+4-4}{x(\sqrt{x^2+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2} = \frac{0}{\sqrt{0^2+4}+2} = \frac{0}{4} = 0$$

αυτή τη λύση πρότεινε η επιτροπή εξετάσεων}



25) ΕΠΑΛ 2019

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 10}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}.$

Μονάδες 3

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον. 5) και να δείξετε ότι $f(x) \geq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (μον. 6).

Μονάδες 11

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(5, f(5)).$

Μονάδες 6

Γ4. Αν Α, Β είναι τα σημεία τομής της εφαπτομένης ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α (μον. 3) και Β (μον. 2).

Μονάδες 5

25)

ΛΥΣΗ

$$\Gamma 1. \quad f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 2x + 10} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} (x^2 - 2x + 10)' = \frac{(x^2)' - (2x)' + 10'}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{2x - 2 + 0}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} =$$

$$\frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}$$

Γ2. { Υπολογίζουμε τις ρίζες της πρώτης παραγώγου , λύνουμε τις ανισώσεις $f'(x)>0$ και $f'(x)<0$ και εφαρμόζουμε, με συμβολικό τρόπο σε έναν πίνακα, τα θεωρήματα της σελίδας 40 του βιβλίου <<μαθηματικά και στοιχεία στατιστικής>>(δες και άσκηση 7)}

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad , \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \quad , \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
	τ. ε.		

Η συνάρτηση f είναι $\searrow$ στο $(-\infty, 1]$

Η συνάρτηση f είναι $\nearrow$ στο $[1, +\infty)$

Παρουσιάζει τοπικό(ολικό) ελάχιστο στο $x=1$ το $f(1) = \sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 + 10} = \sqrt{1 - 2 + 10} = \sqrt{9} = 3$

Στο $f(1) = 3$ η συνάρτηση είναι συνεχής και

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$ άρα ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R} : f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 3$

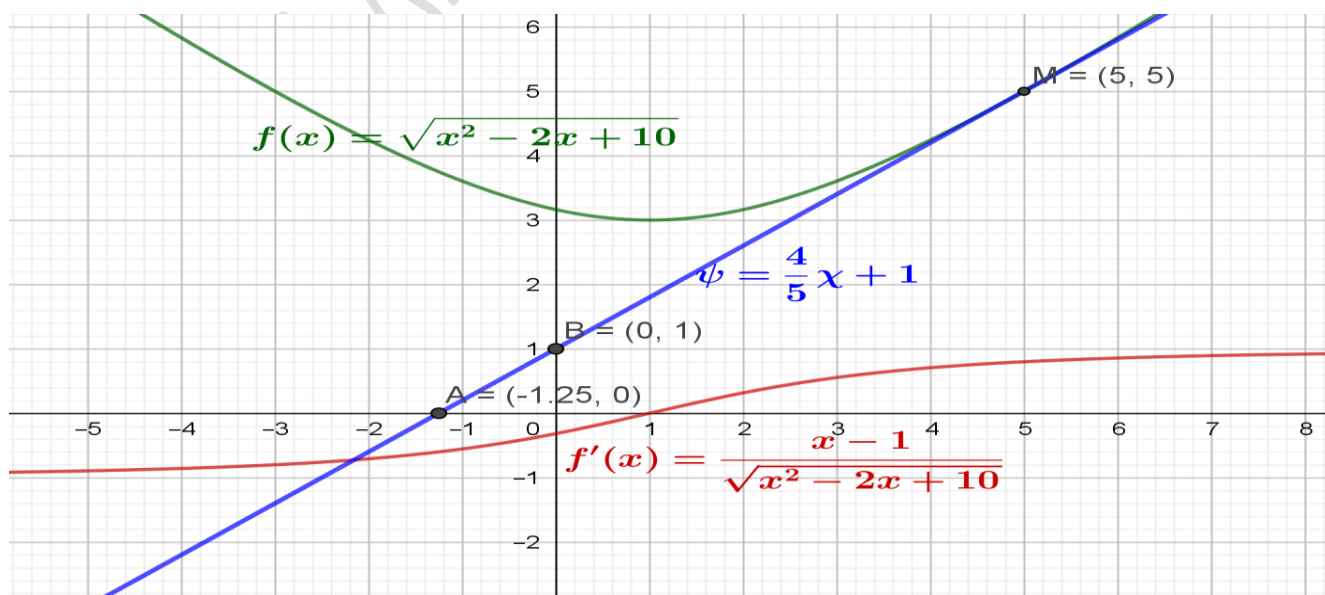
Γ3. Έστω $\psi = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $M(5, f(5)) = (5, 5)$ (διότι: $f(5) = \sqrt{5^2 - 2 \cdot 5 + 10} = \sqrt{25 - 10 + 10} = \sqrt{25} = 5$) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = f'(5) = \frac{5-1}{\sqrt{5^2-2 \cdot 5+10}} = \frac{4}{\sqrt{25-10+10}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$ και εξίσωση $\psi = f'(5)x + \beta$ ή $\psi = \frac{4}{5}x + \beta$ το σημείο $M(5,5)$ είναι κοινό σημείο της γραφικής παράστασης και της ευθείας , συνεπώς επαληθεύει την εξίσωσή της άρα ισχύει: $5 = \frac{4}{5} \cdot 5 + \beta \Leftrightarrow 5 = 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = 5 - 4 = 1$ και η τελική μορφή της εξίσωσης είναι: $\psi = \frac{4}{5}x + 1$

{ 2^{ος} τρόπος: Η ευθεία διέρχεται από το σημείο $M(5,5)$ και εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης σε αυτό, άρα η εξίσωσή της είναι : $\psi - 5 = \frac{4}{5}(x - 5) \Leftrightarrow \psi - 5 = \frac{4}{5}x - \frac{4}{5} \cdot 5 \Leftrightarrow \psi - 5 = \frac{4}{5}x - 4 \Leftrightarrow$

$$\psi = \frac{4}{5}x - 4 + 5 \Leftrightarrow \psi = \frac{4}{5}x + 1 \}$$

Γ4. Η εξίσωση τέμνει τον άξονα $x'x$ όταν η τεταγμένη $\psi=0$ συνεπώς θέτουμε στην εξίσωσή της $\psi=0$ και έχουμε: $0 = \frac{4}{5}x + 1 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x = -1 \Leftrightarrow 4x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4} = -1,25$ Το σημείο είναι το $A(-\frac{5}{4}, 0)$

Η εξίσωση τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$ όταν η τετμημένη $x=0$ συνεπώς για θέτουμε στην εξίσωσή της $x=0$ και έχουμε: $\psi = \frac{4}{5} \cdot 0 + 1 \Leftrightarrow \psi = 0 + 1 = 1$ Το σημείο είναι το $B(0, 1)$



26) ΕΠΑΛ 2019

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + \lambda x, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R} \text{ σταθερά.}$$

- Δ1.** Για $\lambda = 3$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον. 4) και να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{3}{8}\right)$ και $f\left(\frac{5}{6}\right)$ (μον. 3).

Μονάδες 7

- Δ2.** Για $\lambda = 3$ να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1) \cdot (x^2-x)}.$$

Μονάδες 7

- Δ3.** Για $\lambda = 3$ να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Μονάδες 6

- Δ4.** Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ για την οποία η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Μονάδες 5

26) ΛΥΣΗ

- Δ1.** Για $\lambda = 3$ η συνάρτηση γίνεται: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

{ Υπολογίζουμε τις ρίζες της πρώτης παραγώγου, λύνουμε τις ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$ και εφαρμόζουμε, με συμβολικό τρόπο σε έναν πίνακα μεταβολών, τα θεωρήματα της σελίδας 40 του βιβλίου <<μαθηματικά και στοιχεία στατιστικής>> (δες και άσκηση 7) }

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 3x)' = (x^3)' - (3x^2)' + (3x)' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ διπλή ρίζα} \quad f'(x) = 3(x-1)^2 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } x \neq 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Η συνάρτηση f είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$

$\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$, $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$ άρα $\frac{3}{8} < \frac{5}{6} < 1$ και επειδή η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ισχύει: $f\left(\frac{3}{8}\right) < f\left(\frac{5}{6}\right)$

$$\begin{aligned} \text{Δ2. Για } \lambda=3 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-6x+3}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)(\sqrt{x}+1)} = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{[(\sqrt{x})^2-1^2]x(x-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{(x-1)x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{(x-1)^2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(\sqrt{x}+1)}{x} = \frac{3(\sqrt{1}+1)}{1} = 6 \end{aligned}$$

- Δ3.** Η συνάρτηση που εκφράζει και μας δίνει τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που εφάπτεται της γραφικής παράστασης σε ένα σημείο $(x, f(x))$, είναι η $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

{ σχόλιο: Η **πρώτη παράγωγος** της συνάρτησης f στο x_0 εκφράζει το **ρυθμό μεταβολής** του $\psi = f(x)$ ως προς x , όταν $x=x_0$. Έτσι ο ρυθμός μεταβολής γίνεται ελάχιστος όταν η πρώτη παράγωγος έχει ολικό ελάχιστο. Γιαυτό μελετάμε την μονοτονία της πρώτης παραγώγου. Υπολογίζουμε τις **ρίζες της δεύτερης παραγώγου**, λύνουμε τις ανισώσεις $f''(x) > 0$ και $f''(x) < 0$ και εφαρμόζουμε, με συμβολικό τρόπο σε έναν πίνακα, τα θεωρήματα της σελίδας 40 του βιβλίου <<μαθηματικά και στοιχεία στατιστικής>> (δες και άσκηση 7) }

$$f''(x) = (3x^2 - 6x + 3)' = (3x^2)' - (6x)' + 3' = 6x - 6 + 0 = 6x - 6, \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x-6=0 \Leftrightarrow 6x=6 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{6}{6} = 1, \quad f''(x) = 6x - 6 > 0 \Leftrightarrow 6x > 6 \Leftrightarrow x > 1, \quad f''(x) = 6x - 6 < 0 \Leftrightarrow 6x < 6 \Leftrightarrow x < 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
	τ. ε.		

Η συνάρτηση f' είναι $\searrow$ στο $(-\infty, 1]$

Η συνάρτηση f' είναι $\nearrow$ στο $[1, +\infty)$

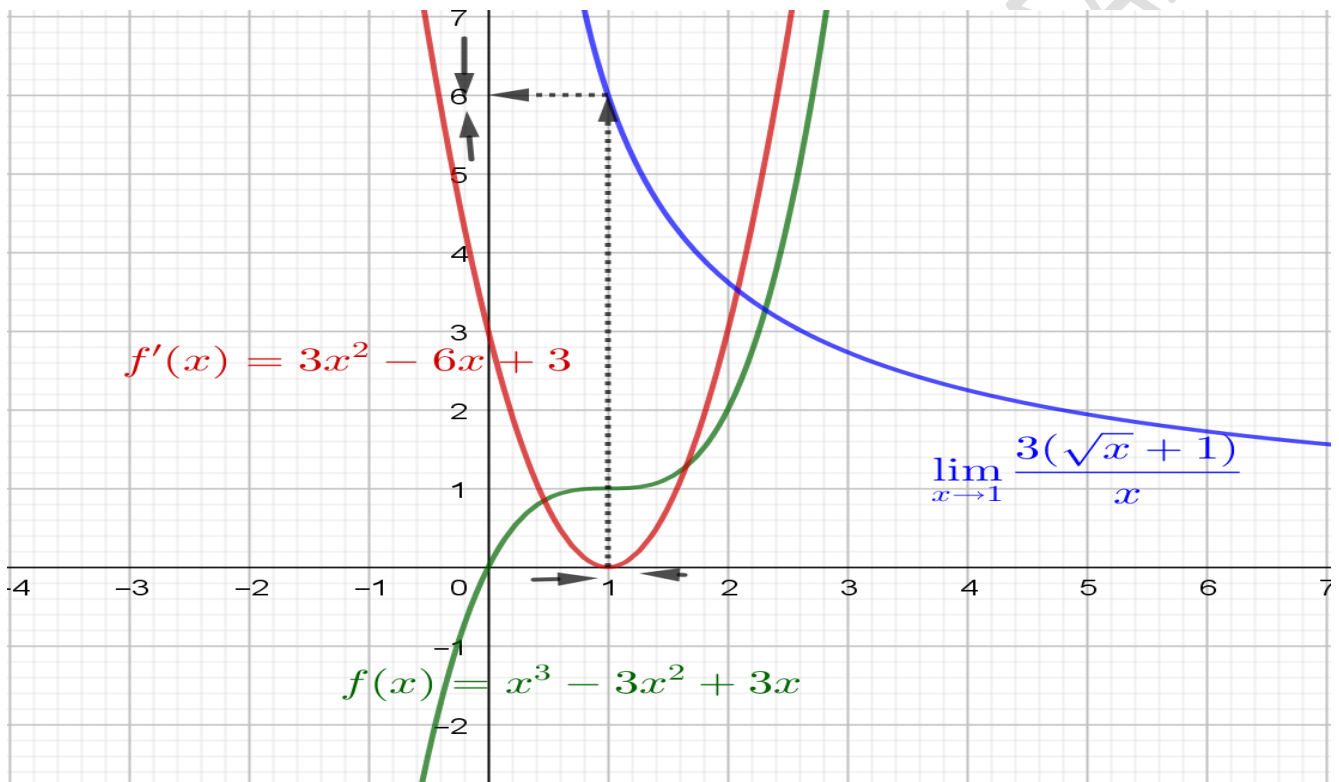
Η συνάρτηση f' έχει ελάχιστη τιμή στο $x=1$

Δηλαδή ο συντελεστής διεύθυνσης γίνεται

ελάχιστος στο σημείο $(1, f(1)) = (1, 1)$ διότι $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 1 - 3 + 3 = 1$

Δ4. Η συνάρτηση είναι η $f'(x) = 3x^2 - 6x + \lambda$ και είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο. Συνεπώς για να αλλάζει πρόσημο πρέπει η διακρίνουσα $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \lambda \leq 0 \Leftrightarrow 36 - 12 \cdot \lambda \leq 0 \Leftrightarrow -12 \cdot \lambda \leq -36 \Leftrightarrow$

$12 \cdot \lambda \geq 36 \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{36}{12} \Leftrightarrow \lambda \geq 3$ Άρα η μικρότερη τιμή του λ για την οποία η συνάρτηση δεν παρουσιάζει ακρότατο είναι $\lambda = 3$



27) ΕΠΑΛ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2019

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - ax + 2,$$

όπου $a \in \mathbb{R}$ σταθερά.

Γ1. Να βρείτε την τιμή του a ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

Μονάδες 6

Γ2. Για $a = -1$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

Γ3. Για $a = -1$ να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Γ4. Για $a = -1$ να δείξετε ότι:

$$f(2019) + f(2020) > 2 \cdot f(1)$$

Μονάδες 5

27) ΛΥΣΗ

$$\Gamma 1. f'(x) = (x^3 - 2x^2 - ax + 2)' = (x^3)' - (2x^2)' - (ax)' + 2' = 3x^2 - 4x - a + 0 = 3x^2 - 4x - a$$

Έστω $\psi = ax + \beta$ η ευθεία που εφαπτεται της γραφικής παράστασης στο σημείο $A(0, f(0)) = A(0, 2)$ (διότι: $f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 2$) και έχει συντελεστή διεύθυνσης $a = f'(0) = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1$

$$\text{άρα } f'(0) = 1 \Leftrightarrow 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - a = 1 \Leftrightarrow -a = 1 \Leftrightarrow a = -1$$

$\Gamma 2.$ Με βάση το προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση έχει τύπο $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$ και 1^η παράγωγος

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \begin{cases} \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 \\ x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = 1, x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$ $	$\searrow$	$ $	$\nearrow$
	$\tau. \mu.$		$\tau. \varepsilon.$		

Η f είναι ↗ στο $(-\infty, \frac{1}{3}]$

Η f είναι ↘ στο $[\frac{1}{3}, 1]$

Η f είναι ↗ στο $[1, +\infty)$

$$\Gamma 3. \text{ Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο } x = \frac{1}{3} \quad \text{το } f\left(\frac{1}{3}\right) = 1\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 2 = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + 2 =$$

$$\frac{1}{27} - \frac{2 \cdot 3}{9 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 9}{3 \cdot 9} + \frac{2 \cdot 27}{27} = \frac{1}{27} - \frac{6}{27} + \frac{9}{27} + \frac{54}{27} = \frac{1-6+9+54}{27} = \frac{58}{27} \quad \text{Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο } x=1 \text{ το}$$

$$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 + 2 = 1 - 2 + 1 + 2 = 2$$

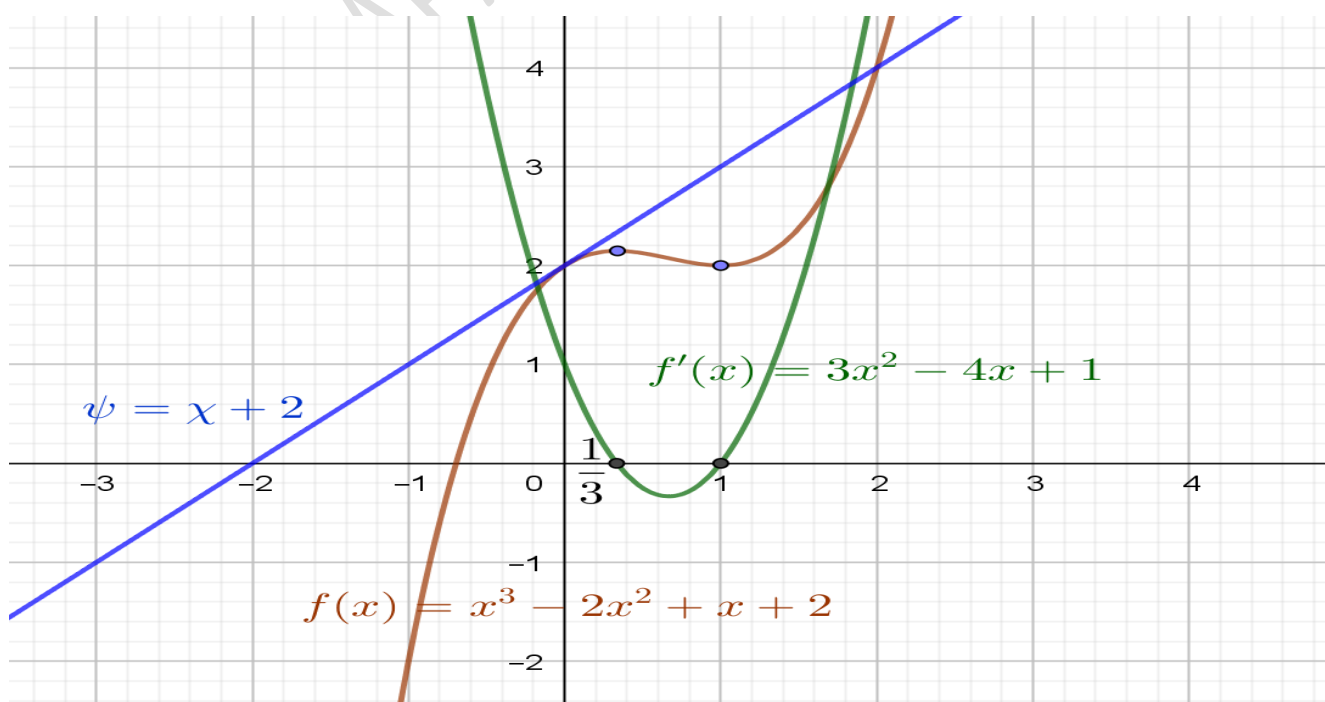
f είναι γν.αύξουσα στο $[1, +\infty)$

$$\Gamma 4. \text{ Το } 2019 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(2019) > f(1) \quad (1)$$

f είναι γν.αύξουσα στο $[1, +\infty)$

$$\text{Το } 2020 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(2020) > f(1) \quad (2) \quad \text{Προσθέτω κατά μέλη τις} \\ \text{ομόστροφες ανισότητες (1) και (2) και έχουμε } f(2019) + f(2020) > f(1) + f(1) \Leftrightarrow f(2019) + f(2020) > 2f(1) = 4$$

(παράτηρηση: Θα μπορούσε να ζητά να αποδείξουμε $f(2019) + f(2020) > 4$.)



28) ΕΠΑΛ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2019

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = (\lambda - 3)x^2 - \lambda x + \lambda^2 - 6\lambda,$$

όπου για τη σταθερά λ ισχύει $0 < \lambda < 3$.

Δ1. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$ είναι $y = -\lambda x + \lambda^2 - 6\lambda$

Μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ τρίγωνο εμβαδού $E(\lambda) = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot (\lambda - 6)^2$

Μονάδες 7

Δ3. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε το εμβαδόν του παραπάνω τριγώνου να γίνει μέγιστο.

28)

Μονάδες 6

Δ4. Για $\lambda = 2$ δίνονται τα σημεία $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), A_4(x_4, y_4), A_5(x_5, y_5)$ της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$. Αν οι τετμημένες x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των σημείων A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 αντίστοιχα, έχουν τυπική απόκλιση $s_x = 2$, να βρείτε την τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων αυτών.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

$$\Delta 1. f'(x) = ((\lambda - 3)x^2 - \lambda x + \lambda^2 - 6\lambda)' = (\lambda - 3)(x^2)' - \lambda(x)' + (\lambda^2 - 6\lambda)' = 2(\lambda - 3)x - \lambda + 0 = 2(\lambda - 3)x - \lambda$$

$$\text{Το σημείο } A(0, f(0)) = A(0, \lambda^2 - 6\lambda) \text{ διότι } f(0) = (\lambda - 3)0^2 - \lambda \cdot 0 + \lambda^2 - 6\lambda = \lambda^2 - 6\lambda$$

Έστω $\psi = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται της γραφικής παράστασης στο σημείο $A(0, \lambda^2 - 6\lambda)$. Τότε ισχύει: $\alpha = f'(0) = 2(\lambda - 3) \cdot 0 - \lambda = -\lambda$ και η εξίσωση γίνεται: $\psi = -\lambda x + \beta$. Το σημείο $A(0, \lambda^2 - 6\lambda)$ ανήκει στην ευθεία άρα επαληθεύει την εξίσωσή της δηλαδή ισχύει:

$$\lambda^2 - 6\lambda = -\lambda \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = \lambda^2 - 6\lambda \text{ και η εξίσωση γίνεται: } \psi = -\lambda x + \lambda^2 - 6\lambda$$

$$\Delta 2. \text{ Η ευθεία με εξίσωση } \psi = -\lambda x + \lambda^2 - 6\lambda \text{ συναντά τον άξονα } x'x \text{ αν } \psi = 0 \text{ άρα } 0 = -\lambda x + \lambda^2 - 6\lambda \Leftrightarrow$$

$$-\lambda x = -\lambda^2 + 6\lambda \Leftrightarrow \lambda x = \lambda^2 - 6\lambda \Leftrightarrow x = \frac{\lambda^2 - 6\lambda}{\lambda} = \lambda - 6 \text{ και το σημείο είναι } B(\lambda - 6, 0)$$

$$\text{Η ευθεία με εξίσωση } \psi = -\lambda x + \lambda^2 - 6\lambda \text{ συναντά τον άξονα } y'y \text{ αν } x = 0 \text{ άρα } \psi = -\lambda \cdot 0 + \lambda^2 - 6\lambda \Leftrightarrow$$

$$\psi = \lambda^2 - 6\lambda \text{ και το σημείο είναι } \Gamma(0, \lambda^2 - 6\lambda)$$

$$\begin{aligned} \text{Συνεπώς } E(\lambda) &= (OB\Gamma) = \frac{1}{2} (OB)(O\Gamma) = \frac{1}{2} |\lambda - 6| |\lambda^2 - 6\lambda| = \frac{1}{2} |\lambda - 6| |\lambda - 6| |\lambda| = \frac{1}{2} |\lambda - 6|^2 |\lambda| \\ &= \frac{1}{2} (\lambda - 6)^2 \lambda \text{ διότι } \lambda \text{ θετικό (αφού δόθηκε } 0 < \lambda < 3) \end{aligned}$$

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $E(\lambda) = \frac{1}{2} \lambda (\lambda - 6)^2$ που είναι παραγωγίσιμη στο **(0,3)** και έχει

$$E'(\lambda) = \left[\frac{1}{2} \lambda (\lambda - 6)^2 \right]' = \frac{1}{2} [\lambda' (\lambda - 6)^2 + \lambda ((\lambda - 6)^2)'] =$$

$$\frac{1}{2} [1 (\lambda - 6)^2 + \lambda 2(\lambda - 6)(\lambda - 6)'] = \frac{1}{2} [1 (\lambda - 6)^2 + \lambda 2(\lambda - 6)(1 - 0)] =$$

$$\frac{1}{2} [\lambda^2 - 12\lambda + 36 + 2\lambda^2 - 12\lambda] = \frac{1}{2} [3\lambda^2 - 24\lambda + 36] = \frac{3}{2} \lambda^2 - 12\lambda + 18$$

Λύνουμε την εξίσωση : $E'(\lambda) = \frac{3}{2}\lambda^2 - 12\lambda + 18 = 0$

$$\begin{cases} \Delta = (-12)^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 18 = 144 - 108 = 36 \\ \lambda_1 = \frac{-(-12) + \sqrt{36}}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{12 + 6}{3} = 6, \text{ απορρίπτεται } (0 < \lambda < 3) \end{cases} \quad \lambda_2 = \frac{12 - 6}{3} = 2$$

{σχόλιο: άλλος τρόπος: $E'(\lambda) = \frac{1}{2} [\lambda' (\lambda - 6)^2 + \lambda ((\lambda - 6)^2)'] = \frac{1}{2} [1 (\lambda - 6)^2 + \lambda 2(\lambda - 6)(\lambda - 6)'] = \frac{1}{2} [1 (\lambda - 6)^2 + \lambda 2(\lambda - 6)(1 - 0)] = \frac{1}{2} [(\lambda - 6)^2 + 2\lambda(\lambda - 6)] =$

$$\frac{1}{2} (\lambda - 6)(\lambda - 6 + 2\lambda) = \frac{1}{2} (\lambda - 6)(3\lambda - 6) = \frac{1}{2} 3(\lambda - 6)(\lambda - 2) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 6 \\ \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \end{array} \right\}$$

λ	0	2	3
$E'(x)$	+	0	-
$E(x)$	$\nearrow$		$\searrow$
	τ. μ.		

Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $\lambda = 2$

{σχόλιο: Μπορούμε να παρουσιάσουμε τον πίνακα μεταβολών όπως παρακάτω όπου το πρόσημο της $E'(\lambda)$ προκύπτει σε κάθε διάστημα από τον πολλαπλασιασμό των προσημων των παραστάσεων σε κάθε διάστημα, διαγράφοντας τα διαστήματα που δεν ανήκουν στο Π.Ο. Δεν προτείνεται, αφού το κεφάλαιο ανισώσεις γινόμενο -πηλίκο είναι εκτός ύλης στην Α λυκείου.}

λ	$-\infty$	0	2	3	6	$+\infty$
$\lambda - 6$	-	-	-	-	+	
$\lambda - 2$	-	-	+	+	+	
$E'(\lambda)$		+	-			
$E(\lambda)$		$\nearrow$	$\searrow$			
		τ. μ.				

Δ4. Για $\lambda = 2$ η εξίσωση $\psi = -\lambda x + \lambda^2 - 6\lambda$ γίνεται: $\psi = -2x + 4 - 12 \Leftrightarrow \psi = -2x - 8$

Και σύμφωνα με την εφαρμογή του σχολικού βιβλίου ισχύει: $s_\psi = |-2|s_\chi = 2 \cdot 2 = 4$

29) ΕΠΑΛ 2020

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 - \lambda x^2 + 2$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά.

Γ1. Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $A(-1, -2)$ (μον.4)

Γ2. Για $\lambda = 3$ να βρείτε τις συναρτήσεις $f'(x)$ και $f''(x)$ (μον.6)

Γ3. Για $\lambda=3$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της. (μον.8)

Γ4. Για $\lambda=3$ να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)+3}{f''(x)}$ (μον.7)

29) ΛΥΣΗ

Γ1. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(-1,-2)$ άρα επαληθεύει την εξίσωσή της δηλαδή ισχύει: $f(-1) = -2 \Leftrightarrow (-1)^3 - \lambda(-1)^2 + 2 = -2 \Leftrightarrow -1 - \lambda + 2 = -2 \Leftrightarrow -\lambda + 1 = -2$

$$-\lambda = -2 - 1 \Leftrightarrow -\lambda = -3 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

Γ2. Για $\lambda=3$ έχουμε: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ άρα $f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 2)' = (x^3)' - (3x^2)' + 2' = 3x^2 - 6x + 0 = 3x^2 - 6x$ και $f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 - 6x)' = (3x^2)' - (6x)' = 6x - 6$

Γ3. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$

$f'(x) > 0$ αν $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ αν $x \in (0, 2)$ ο πίνακας μεταβολών είναι

χ	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
	$\tau. \mu.$			$\tau. \varepsilon.$	

Η f είναι $\nearrow$ στο $(-\infty, 0]$

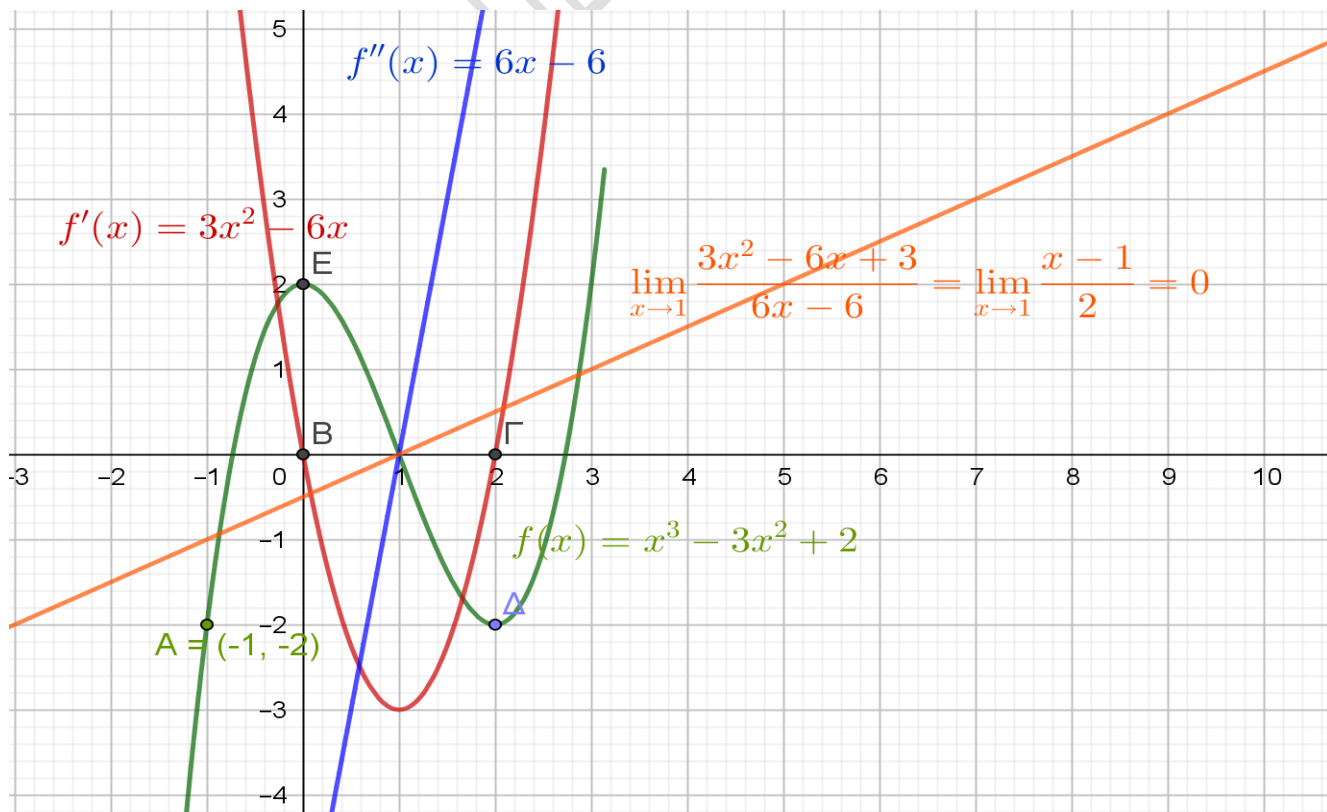
Η f είναι $\searrow$ στο $[0, 2]$

Η f είναι $\nearrow$ στο $[2, +\infty)$

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=0$ το $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 = 2$ και τοπικό ελάχιστο στο $x=2$ το

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = 8 - 12 + 2 = -2$$

Γ4. Για $\lambda=3$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)+3}{f''(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 6x + 3}{6x - 6} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2 - 2x + 1)}{6(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)^2}{6(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{6} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2} = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0$



30) ΕΠΑΛ 2020

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = (x^2 + 4x + 5)^{20}$

Δ1. Να δείξετε ότι: $f'(x) = 40(x^2 + 4x + 5)^{19}(x + 2)$ (μον.5)

Δ2. Να βρείτε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$ (μον.4)

Δ3. Να δείξετε ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, έχει εξίσωση $\psi=1$ (μον.8)

Δ4. Θεωρούμε σημείο $A(x,1)$ της ευθείας $\psi=1$ με $x>0$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των σημείων $A(x,1)$ και $O(0,0)$ ως προς x , όταν $x=1$ (μον.8)

30) ΛΥΣΗ

Δ1. $f'(x) = [(x^2 + 4x + 5)^{20}]' = 20 (x^2 + 4x + 5)^{19} (x^2 + 4x + 5)' = 20 (x^2 + 4x + 5)^{19} [(x^2)' + (4x)' + (5)'] = 20(x^2 + 4x + 5)^{19}(2x + 4) = 20 (x^2 + 4x + 5)^{19} 2(x + 2) = 40(x^2 + 4x + 5)^{19}(x + 2)$

Δ2. Από τον ορισμό της παραγώγου στο σημείο $x = -2$ έχουμε: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = f'(-2) =$

$$40 ((-2)^2 + 4(-2) + 5)^{19} [(-2) + 2] = 40 (4 - 8 + 5)^{19} \cdot 0 = 40 \cdot 1^{19} \cdot 0 = 0$$

Δ3. Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο όπου η ευθεία με εξίσωση $\psi = \alpha x + \beta$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης τότε ισχύει: $\alpha = f'(x_0)$ Επειδή η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στον $x'x$ ισχύει: $\alpha = f'(x_0) = 0$ Συνεπώς $40(x_0^2 + 4x_0 + 5)^{19}(x_0 + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (x_0^2 + 4x_0 + 5)^{19} = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + 4x_0 + 5 = 0, \Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0 \text{ αδύνατη} \\ x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -2 \end{cases}$$

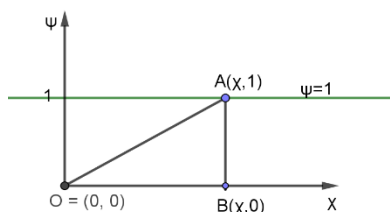
Άρα το σημείο είναι $A(-2, f(-2)) = A(-2, 1)$ διότι: $f(-2) = [(-2)^2 + 4(-2) + 5]^{20} = [4 - 8 + 5]^{20} = [9 - 8]^{20} = 1^{20} = 1$ και $f'(-2) = 0$

Και η εξίσωση της ευθείας γίνεται: $\psi = f'(-2)x + \beta = 0 \cdot x + \beta = \beta$ Επειδή το σημείο $A(-2,1)$ είναι κοινό σημείο της γραφικής παράστασης και της ευθείας, επαληθεύει τις εξισώσεις τους. Συνεπώς $1 = \beta$ και η εξίσωση είναι $\psi=1$

Δ4. 1ος τρόπος Η απόσταση των σημείων $A(x,1)$ και $O(0,0)$ δίνεται από την συνάρτηση

$$(OA) = d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (x^2 + 1 > 0, \text{ ως άθροισμα θετικών})$$

2ος τρόπος

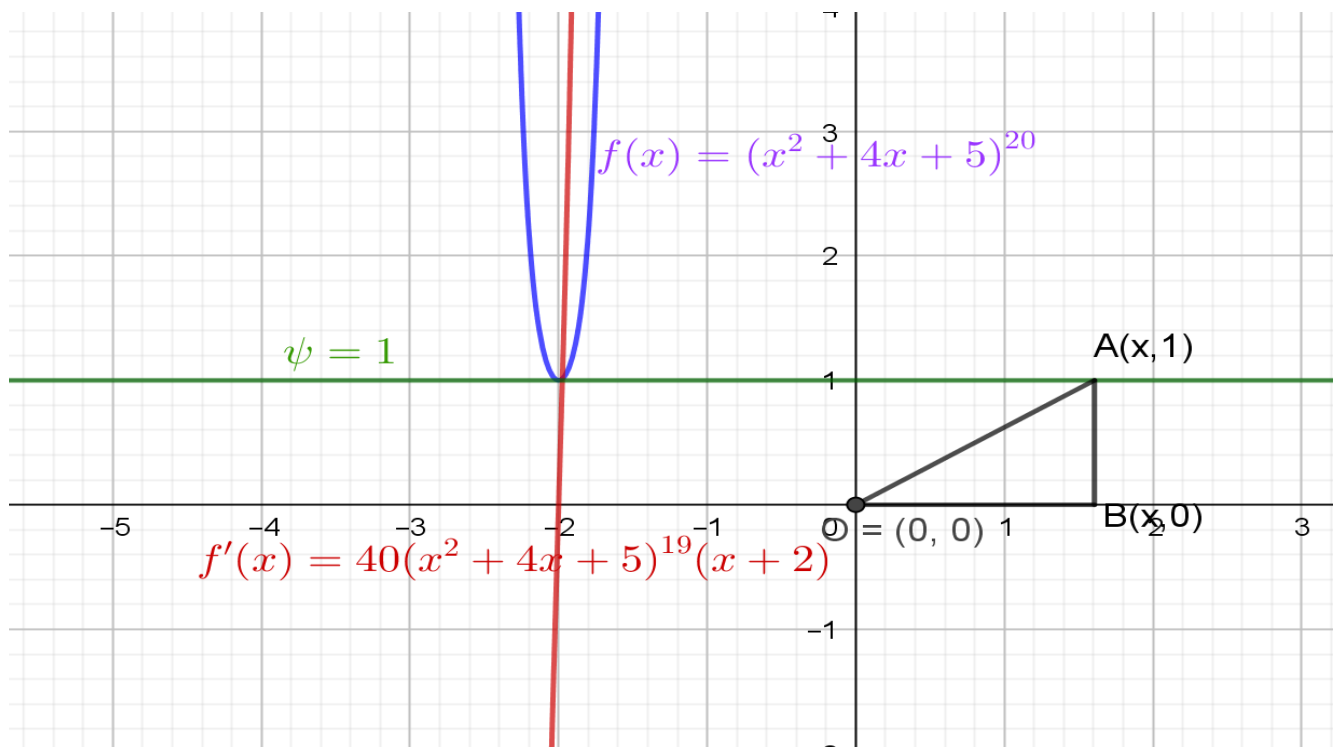


$(OB)=x$, $(AB)=1$ και από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB ισχύει: $(OA)^2 = (OB)^2 + (AB)^2$ ή $(OA)^2 = x^2 + 1^2 \Leftrightarrow$

$$(OA) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\text{Άρα } d'(x) = (\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} (x^2 + 1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης ως προς x όταν $x=1$ είναι: $d'(1) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



31) Επαναληπτικές ΕΠΑΛ 2020

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ με $x \neq -1$

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία για $x < -1$ (μον.7)

Γ2. Αν $x \in [-4, -2]$, να αποδείξετε ότι: $-3 \leq f(x) \leq -\frac{5}{3}$ (μον.6)

Γ3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0, f(0))$ (μον.6)

Γ4. Η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$ τέμνει τους άξονες x' και y' στα σημεία K και L αντίστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου OKL , όπου $O(0,0)$ είναι η αρχή των αξόνων. (μον.6)

31) ΛΥΣΗ

Γ1. Για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ έχουμε: $f'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{(1-x)'(1+x) - (1-x)(1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{(1-x)'(1+x) - (1-x)(1+x)'}{(1+x)^2}$
 $= \frac{(0-1)(1+x) - (1-x)(0+1)}{(1+x)^2} = \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2} < 0$ Για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

Γ2. {σχόλιο: γνωρίζοντας τη σχέση των αρχετύπων, των x και τη μονοτονία της συνάρτησης συμπεραίνω τη σχέση των τιμών, των $f(x)$. $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ όταν $f \searrow$ }

Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-4, -2]$ άρα ισχύει

$$-4 \leq x \leq -2 \Leftrightarrow f(-4) \geq f(x) \geq f(-2) \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \geq f(x) \geq -3 \Leftrightarrow -3 \leq f(x) \leq -\frac{5}{3}$$

$$\{\text{διότι } f(-4) = \frac{1-(-4)}{1+(-4)} = \frac{1+4}{1-4} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4} \text{ και } f(-2) = \frac{1-(-2)}{1+(-2)} = \frac{1+2}{1-2} = \frac{3}{-1} = -3\}$$

Γ3. Έστω $\psi = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται της γραφικής παράστασης στο σημείο $A(0, f(0)) = A(0, 1)$ (διότι $f(0) = \frac{1-0}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$) Τότε ισχύει ότι: $\alpha = f'(0) = \frac{-2}{(1+0)^2} = -2$ και η εξίσωση γίνεται: $\psi = -2x + \beta$ Επειδή το σημείο $A(0, 1)$ είναι κοινό σημείο της γραφικής παράστασης και της ευθείας, επαληθεύει

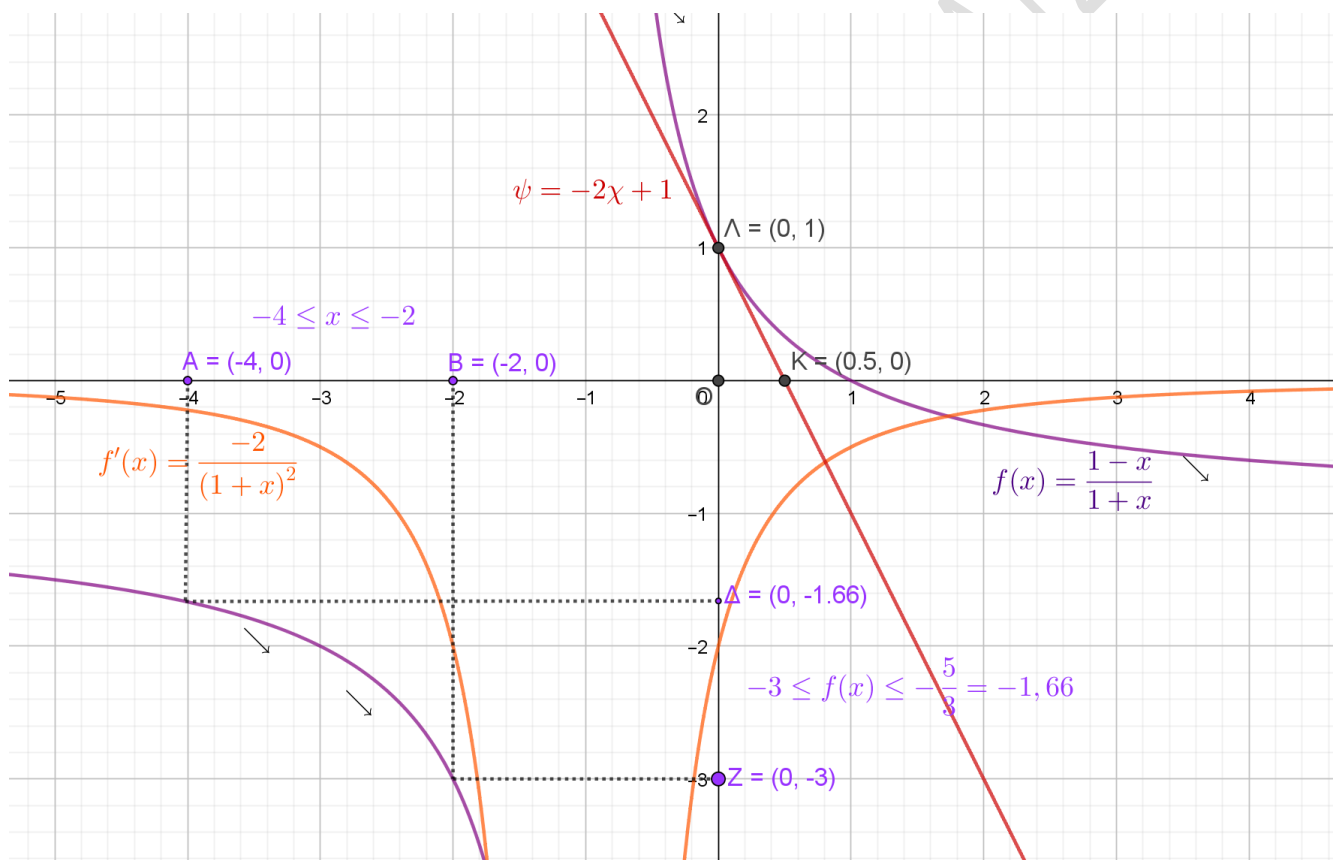
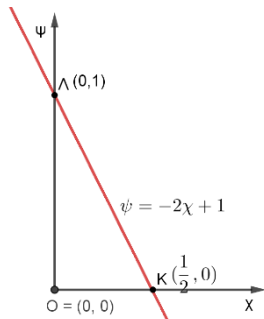
τους τύπους και των δύο, άρα $1 = -2 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$ οπότε η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται της γραφικής παράστασης στο σημείο $A(0, 1)$ είναι: $\psi = -2\chi + 1$

Γ4. Τα σημεία τομής της ευθείας $\psi = -2\chi + 1$ με τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ είναι :

Για $\chi'\chi$ θέτω στην εξίσωση της ευθείας $\psi = 0$ και υπολογίζω το χ . $0 = -2\chi + 1 \Leftrightarrow -2\chi = -1 \Leftrightarrow 2\chi = 1 \Leftrightarrow \chi = \frac{1}{2}$

Οπότε το σημείο είναι $K(\frac{1}{2}, 0)$ Για $\psi'\psi$ θέτω στην εξίσωση της ευθείας $\chi = 0$ και υπολογίζω το ψ . $\psi = -2 \cdot 0 + 1 \Leftrightarrow \psi = 1$ και το σημείο είναι το $\Lambda(0, 1)$

Το εμβαδόν του τριγώνου $(OK\Lambda) = \frac{1}{2}(OK)(OL) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$



32) Επανάληπτικές ΕΠΑΛ 2020

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - \alpha^2 - 8\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της. (μον.8)

Δ2. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f ως συνάρτηση του α . (μον.4)

Δ3. Να βρείτε για ποια τιμή του α το τοπικό ελάχιστο της f παίρνει τη μέγιστη τιμή του. (μον.8)

Δ4. Για $\alpha = -4$ να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 16}{f'(x)}$ (μον.5)

32) ΛΥΣΗ

Δ1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - \alpha^2 - 8\alpha$ Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο: $f'(x) = (x^3 - 6x^2 + 9x - \alpha^2 - 8\alpha)' = (x^3)' - (6x^2)' + (9x)' - (\alpha^2 + 8\alpha)' = 3x^2 - 12x + 9$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 \\ x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4+2}{2} = 3, x_2 = \frac{4-2}{2} = 1 \end{array} \right.$$

$f'(x) > 0$ αν $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ $f'(x) < 0$ αν $x \in (1, 3)$ και ο πίνακας μεταβολών είναι:

χ	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					
	$\tau.\mu.$		$\tau.\varepsilon.$		

Η f είναι ↗ στο $(-\infty, 1]$

Η f είναι ↘ στο $[1, 3]$

Η f είναι ↗ στο $[3, +\infty)$

Δ2. Για $x=1$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - \alpha^2 - 8\alpha = 4 - \alpha^2 - 8\alpha = -\alpha^2 - 8\alpha + 4$ στο σημείο $A(1, f(1)) = A(1, -\alpha^2 - 8\alpha + 4)$

Για $x=3$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - \alpha^2 - 8\alpha = 27 - 54 + 27 - \alpha^2 - 8\alpha = -\alpha^2 - 8\alpha$, στο σημείο $B(3, f(3)) = B(3, -\alpha^2 - 8\alpha)$

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\alpha) = -\alpha^2 - 8\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και θα υπολογίσουμε αν υπάρχουν τα ακρότατα. Η g είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική και για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ $g'(\alpha) = (-\alpha^2 - 8\alpha)' = -(\alpha^2)' - (8\alpha)' = -2\alpha - 8$

$$g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -2\alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow -2\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = \frac{8}{-2} = -4, \quad g'(\alpha) > 0 \text{ αν } \alpha < -4, \quad g'(\alpha) < 0 \text{ αν } \alpha > -4$$

α	$-\infty$	-4	$+\infty$
$g'(\alpha)$	+	0	-
$g(\alpha)$	↗		↘

Η g είναι ↗ στο $(-\infty, -4]$

Η g είναι ↘ στο $[-4, +\infty)$

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\alpha = -4$ το $g(-4) = -(-4)^2 - 8(-4) = -16 + 32 = 16$ Για $\alpha = -4$ το τοπικό ελάχιστο παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

Δ4. Για $\alpha = -4$ η συνάρτηση γίνεται: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - (-4)^2 - 8(-4) = x^3 - 6x^2 + 9x + 16$ και $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 16}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 16 - 16}{3x^2 - 12x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{3x^2 - 12x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{3x^2 - 12x + 9} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x^2 - 6x + 9)}{3(x^2 - 4x + 3)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)^2}{3(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{3(x-1)} = \frac{3(3-3)}{3(3-1)} = \frac{3 \cdot 0}{3 \cdot 2} = 0$$

33) ΕΠΑΛ 2021

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 - \alpha x + 2$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ σταθερά και $x \in \mathbb{R}$.

B1. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x' σε σημείο με τετμημένη ίση με 1, να βρείτε την τιμή του α .
Μονάδες 5

B2. Για $\alpha=3$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x^2-1}$

Μονάδες 5

B3. Για $\alpha=3$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

Μονάδες 7

B4. Για $\alpha=3$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο

$M(0, f(0))$

Μονάδες 8

33) ΛΥΣΗ

B1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f ως πολυωνυμικής είναι το $\mathbb{R}$. Επειδή η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη ίση με 1 και κάθε σημείο του άξονα $x'x$ έχει τεταγμένη ίση με το 0 δηλαδή το σημείο έχει συντεταγμένες (1,0) θα ισχύει $f(1) = 0$ ή $1^2 - \alpha \cdot 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow -\alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow -\alpha = -3 \Leftrightarrow \alpha = 3$

B2. Για $\alpha=3$ η συνάρτηση γίνεται $f(x) = x^2 - 3x + 2$ και η $g(x) = \frac{f(x)}{x^2-1} = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

Η $g(x)$ ορίζεται όταν ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός. Άρα πρέπει $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \\ \text{και} \\ x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \end{cases}$ Οπότε το πεδίο ορισμού είναι: $D_g = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ ή με άλλη έκφραση $D_g = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

$$B3. \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

{σχόλιο: Είναι απροσδιόριστη μορφή γι' αυτό παραγοντοποιούμε τα πολυώνυμα του αριθμητή και του παρονομαστή για άρση της απροσδιοριστίας. Για το τριώνυμο του αριθμητή η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0 \text{ έχουμε δύο ρίζες άνισες τις } x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \text{ ή}$$

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ ή } x_1 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ και το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής:}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 1(x-1)(x-2) \text{ ενώ ο παρονομαστής είναι ταυτότητα } x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x-1)(x+1) \}$$

B4. Το σημείο $M(0, f(0)) = M(0, 2)$ διότι $f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = (x^2 - 3x + 2)' = (x^2)' - (3x)' + 2' = 2x - 3$

Έστω $\varepsilon: \psi = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται της γραφικής παράστασης στο $M(0, 2)$. Για την ευθεία αυτή ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\alpha = f'(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$ και η εξίσωση γίνεται $\psi = -3x + \beta$. Επειδή το σημείο $M(0, 2)$ είναι κοινό σημείο της ευθείας και του γραφήματος επαληθεύει την εξίσωσή της άρα ισχύει $2 = -3 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow 2 = \beta$. Οπότε η εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στη γραφική παράσταση στο σημείο $M(0, 2)$ είναι $\varepsilon: \psi = -3x + 2$

34) ΕΠΑΛ 2021

Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος χ μέτρα (m), πλάτος ψ μέτρα (m) και περίμετρο 80 m.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του χ , δίνεται από τον τύπο

$$E(\chi) = -\chi^2 + 40\chi \text{ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης } E(\chi). \quad \text{Μονάδες 10}$$

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(\chi)$ ως προς τη μονοτονία της.

Μονάδες 6

Δ3. Για ποια τιμή του χ το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο και ποια είναι η μέγιστη

τιμή του ;

Μονάδες 4

Δ4. Δύο οικοπέδα A και B σχήματος ορθογωνίου με περίμετρο 80 m το καθένα έχουν μήκη

$\chi_A = 29,5\text{m}$ και $\chi_B = 34,2\text{ m}$, αντίστοιχα. Να απαντήσετε αιτιολογημένα ποιο από τα δύο οικοπέδα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Μονάδες 5

34) ΛΥΣΗ

Δ1. Αν χ και ψ είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου, η περίμετρος του είναι: $\Pi = 2\chi + 2\psi$ με $\chi > 0$ και $\psi > 0$ οπότε $2\chi + 2\psi = 80 \Leftrightarrow \chi + \psi = 40 \Leftrightarrow \psi = 40 - \chi$ άρα $40 - \chi > 0 \Leftrightarrow -\chi > -40 \Leftrightarrow \chi < 40$ οπότε $0 < \chi < 40$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι : $E = \chi \cdot \psi$ Και επειδή $\psi = 40 - \chi$ το εμβαδό γίνεται:

$$E(\chi) = \chi(40 - \chi) = 40\chi - \chi^2 = -\chi^2 + 40\chi \text{ με } 0 < \chi < 40$$

Δ2. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 40)$ με $E'(\chi) = (-\chi^2 + 40\chi)' = -2\chi + 40$

$$\text{➤ } E'(\chi) = 0 \Leftrightarrow -2\chi + 40 = 0 \Leftrightarrow -2\chi = -40 \Leftrightarrow \chi = 20$$

$$\text{➤ } E'(\chi) > 0 \Leftrightarrow -2\chi + 40 > 0 \Leftrightarrow -2\chi > -40 \Leftrightarrow \frac{-2\chi}{-2} < \frac{-40}{-2} \Leftrightarrow \chi < 20$$

$$\text{➤ } E'(\chi) < 0 \Leftrightarrow -2\chi + 40 < 0 \Leftrightarrow -2\chi < -40 \Leftrightarrow \frac{-2\chi}{-2} > \frac{-40}{-2} \Leftrightarrow \chi > 20$$

x	0	20	40
E'(x)	+	0	—
E(x)	↗		↘
	τ. μ.		

Η $E(\chi)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 20]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[20, 40)$

Δ3. Το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο για $\chi = 20\text{m}$ και η μέγιστη τιμή του είναι

$$E(20) = -20^2 + 40 \cdot 20 = -400 + 800 = 400\text{m}^2$$

Δ4. Το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του μήκους στο διάστημα $[20, 40)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

$E(\chi)$ είναι γν.φθίνουσα στο $[20, 40)$

Το $\chi_A = 29,5 < \chi_B = 34,2$



$E(\chi_A) > E(\chi_B)$ άρα το εμβαδόν του οικοπέδου A

είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του οικοπέδου B

35) Επαναληπτικές 2021

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 2x^2 - ax + 6$, με $a, x \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f'(4) = 12$

B1. Να βρείτε την $f'(\chi)$ (μον.3) και να υπολογίσετε την τιμή του a (μον.3) Μονάδες 6

B2. Για $a=4$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της (μον.5) και να βρείτε τα ακρότατά της (μον. 3) Μονάδες 8

B3. Για $a=4$ να δείξετε ότι $f(\chi) \geq 4$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$

Μονάδες 4

B4. Για $a=4$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο

$A(-1, f(-1))$

Μονάδες 7

35) ΛΥΣΗ

$$\text{B1. } f'(x) = (2x^2 - ax + 6)' = (2x^2)' - (ax)' + 6' = 4x - a \text{ και } f'(4) = 4 \cdot 4 - a = 16 - a$$

Επειδή δίνεται ότι $f'(4) = 12$ άρα $16 - \alpha = 12 \Leftrightarrow -\alpha = 12 - 16 \Leftrightarrow -\alpha = -4 \Leftrightarrow \alpha = 4$

B2. Για $\alpha=4$ έχουμε $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$ και $f'(x) = 4x - 4$ οπότε:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x - 4 > 0 \Leftrightarrow 4x > 4 \Leftrightarrow x > 1$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 4x - 4 < 0 \Leftrightarrow 4x < 4 \Leftrightarrow x < 1$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	 	$\nearrow$
	τ. ε.		

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=1$ που είναι το $f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 6 = 2 - 4 + 6 = 4$

B3. Στο $x=1$ το ελάχιστο της συνάρτησης είναι το $f(1)=4$ και είναι ολικό ελάχιστο. Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $f(x) \geq 4$

B4. Το σημείο $M(-1, f(-1))=M(-1, 12)$ διότι $f(-1) = 2(-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 6 = 2 + 4 + 6 = 12$

Έστω $\varepsilon: \psi = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται της γραφικής παράστασης στο $M(-1, 12)$. Για την ευθεία αυτή ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\alpha = f'(-1) = 4(-1) - 4 = -4 - 4 = -8$ και η εξίσωση γίνεται $\psi = -8x + \beta$. Επειδή το σημείο $M(-1, 12)$ είναι κοινό σημείο της ευθείας και του γραφήματος, επαληθεύει την εξίσωσή της, άρα ισχύει $12 = -8 \cdot (-1) + \beta \Leftrightarrow 12 = 8 + \beta \Leftrightarrow \beta = 12 - 8 = 4$. Οπότε η εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στη γραφική παράσταση στο σημείο $M(-1, 12)$ είναι $\varepsilon: \psi = -8x + 4$

36) Επαναληπτικές 2021

Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = x(3x - 2) - 8$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 8$

Μονάδες 5

Δ2. Ένα σώμα κινείται σε έναν άξονα και η θέση του x τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση $x(t) = f(t)$, όπου το x μετριέται σε μέτρα και το t σε δευτερόλεπτα.

Ζητούνται:

A. Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t=4$ δευτερόλεπτα. Μονάδες 5

B. Η χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα είναι ακίνητο. Μονάδες 8

Γ. Η επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t=10$ δευτερόλεπτα. Μονάδες 7

36) ΛΥΣΗ

Δ1. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ συνεπώς $f'(x) = x(3x - 2) - 8 = 3x^2 - 2x - 8$ με $x \geq 0$ ή $x \in [0, +\infty)$.

Δ2. α) Επειδή $x(t) = f(t)$ είναι η συνάρτηση θέσης του κινητού η ταχύτητά του είναι:

$$v(t) = x'(t) = f'(t) = 3t^2 - 2t - 8 \quad \text{με } t \geq 0$$

$$v(4) = 3 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 - 8 = 48 - 8 - 8 = 32 \quad \text{άρα η ταχύτητα τη χρονική στιγμή } t=4 \text{ s είναι } 32 \text{ m/s}$$

β) Γνωρίζουμε ότι το σώμα είναι ακίνητο όταν η ταχύτητά του είναι μηδέν.

Έστω τη χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ το σώμα είναι ακίνητο οπότε $v(t_0)=0 \Leftrightarrow x'(t_0)=0 \Leftrightarrow 3t_0^2 - 2t_0 - 8 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 4 + 96 = 100 \quad t_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 10}{6} \begin{cases} t_1 = \frac{2+10}{6} = \frac{12}{6} = 2 \\ t_2 = \frac{2-10}{6} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3} < 0 \text{ απορρίπτεται,} \\ \text{διότι } t_0 \geq 0 \end{cases}$$

Επομένως τη χρονική στιγμή $t_0=2$ sec το σώμα είναι ακίνητο.

γ) Η επιτάχυνση είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας άρα $a(t) = v'(t) = (3t^2 - 2t - 8)' = 6t - 2$ με $t \geq 0$

οπότε $a(10) = 6 \cdot 10 - 2 = 60 - 2 = 58$ Συνεπώς η επιτάχυνση τη χρονική στιγμή $t=10$ είναι 58 m/s^2