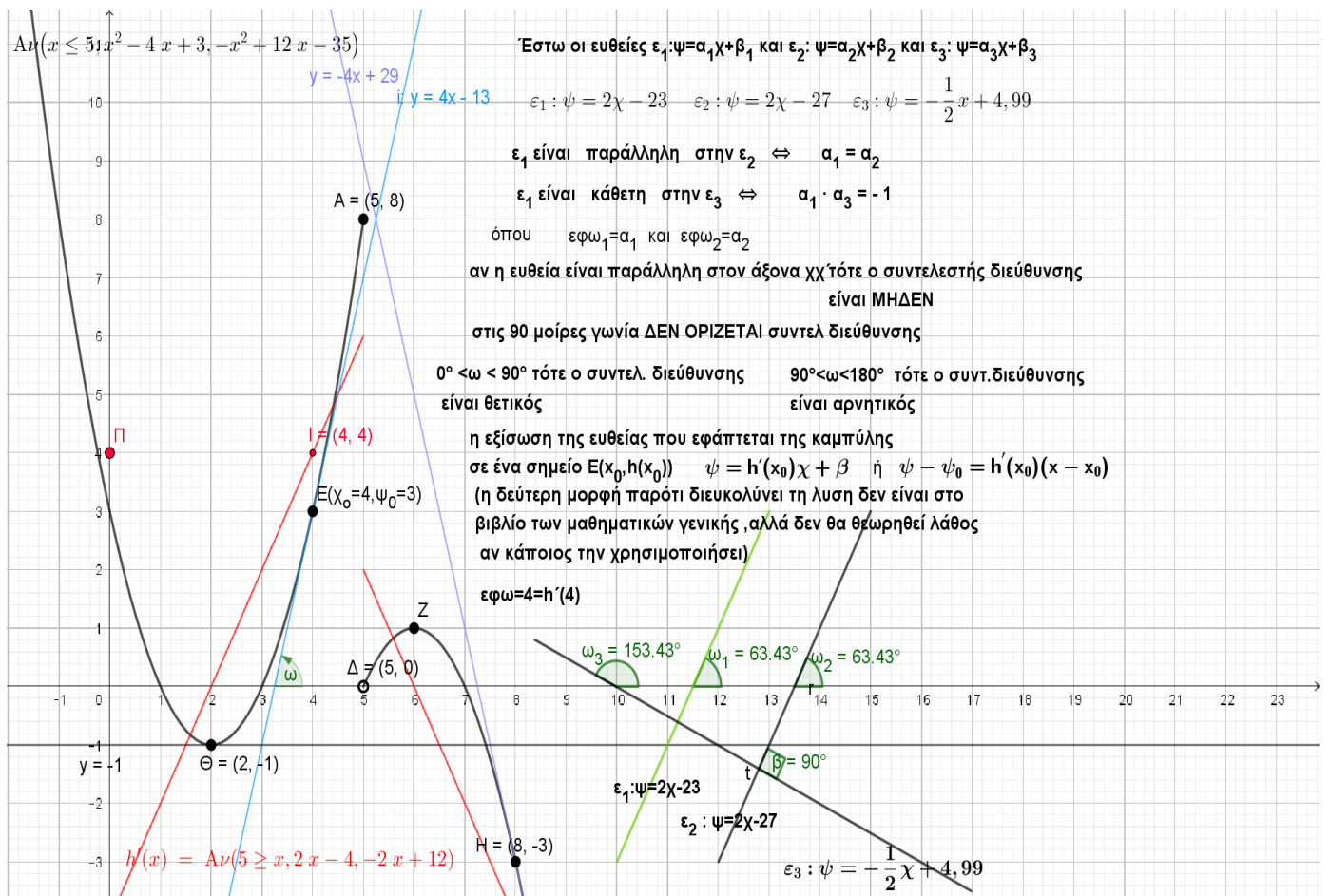


# ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

## Εφαπτόμενες γραφήματος συνάρτησης



Στα παραπάνω έχουμε το γράφημα της συνάρτησης  $h(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \rightarrow & \text{αν } x \leq 5 \\ -x^2 + 12x - 35 & \text{αν } x > 5 \end{cases}$  και με μπλέ χρώμα

τις εφαπτόμενες στα σημεία  $E(4,3)$  με εξίσωση  $\psi = 4x - 13$  και στο  $H(8,-3)$  με εξίσωση  $\psi = -4x + 29$  ενώ με κόκκινο χρώμα είναι το γράφημα της παραγώγου με εξίσωση  $\psi = 2x - 4$  στο διάστημα  $(-\infty, 5]$  και  $\psi = -2x + 12$  στο διάστημα  $(5, +\infty)$

Από το γράφημα επιβεβαιώνουμε ότι στο  $x_0 = 4$  η τιμή της παραγώγου σε αυτό είναι:  $h'(4) = 2 \cdot 4 - 4 = 4$  και στο  $x_0 = 8$  η τιμή της παραγώγου σε αυτό είναι:  $h'(8) = -2 \cdot 8 + 12 = -4$  Επίσης στο σημείο  $\Theta(2, -1)$  η εφαπτόμενη έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με μηδέν αφού είναι παράλληλη στον άξονα  $x$  δεδομένου ότι στο σημείο  $\Theta$  η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι  $\psi = 0x - 1$  ή  $\psi = -1$

Δεν θα πρέπει να ξεχνάμε ότι: το σημείο  $E(4,3)$  είναι κοινό σημείο του γραφήματος της συνάρτησης και της εφαπτόμενης και συνεπώς επαληθεύει τις εξισώσεις και των δύο.  $4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 3 \Leftrightarrow 16 - 16 + 3 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$  αληθής και  $4 \cdot 4 - 13 = 3 \Leftrightarrow 16 - 13 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$  αληθής

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η τιμή της εφω είναι η τιμή του συντελεστή διεύθυνσης της εξίσωσης της ευθείας που εφάπτεται στο γράφημα της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(x_0, \psi_0)$  που δίνεται και ότι  $\alpha = \varepsilon\varphi\omega = f'(x_0)$  και συνεπώς πρέπει να θυμόμαστε (δεν δίνονται στις εξετάσεις) τι τιμή έχουν οι εφαπτόμενες των παρακάτω γωνιών.

| 1° τεταρτημόριο                                                                                    | 2° τεταρτημόριο                                                                                                            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\epsilon\varphi 0^0 = 0$                                                                          | $\epsilon\varphi 120^0 = -\sqrt{3}$ ή $\epsilon\varphi \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$                                         |
| $\epsilon\varphi 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $\epsilon\varphi \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\epsilon\varphi 135^0 = -1$ ή $\epsilon\varphi \frac{3\pi}{4} = -1$                                                       |
| $\epsilon\varphi 45^0 = 1$ ή $\epsilon\varphi \frac{\pi}{4} = 1$                                   | $\epsilon\varphi 150^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $\epsilon\varphi \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$                     |
| $\epsilon\varphi 60^0 = \sqrt{3}$ ή $\epsilon\varphi \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$                     | $\epsilon\varphi 180^0 = 0$                                                                                                |
| $\epsilon\varphi 90^0$ ή $\epsilon\varphi \frac{\pi}{2}$ ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ                              | $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu^0}{180^0}$ ( $\alpha$ =ακτίνια , $\mu$ =μοίρες) Μετατροπή μοιρών σε ακτίνια και αντίστροφα |

## ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση μιας ευθείας  $\epsilon$  είναι  $\psi = \alpha\chi + \beta$

Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\chi_0$  τότε το γράφημά της  $C_f$  ,δέχεται εφαπτόμενη στο σημείο  $M(\chi_0, f(\chi_0))$  ,τότε η ευθεία που εφάπτεται στο  $M(\chi_0, f(\chi_0))$  έχει εξίσωση :  $\epsilon: \psi = f'(\chi_0)\chi + \beta$  **διότι** γνωρίζουμε επιπλέον ότι, αν  $\omega$  είναι η γωνία που **σχηματίζει η  $\epsilon$  με τον άξονα  $\chi\chi'$** , ο **συντελεστής του  $\chi$  ,που λέγεται συντελεστής διεύθυνσης ή κλίση** της ευθείας ,είναι:  $\alpha = \epsilon\varphi\omega = f'(\chi_0)$

Παρά το ότι δεν το έχετε διδαχθεί, αφού η ευθεία  $\epsilon$  διέρχεται από το σημείο  $M(\chi_0, f(\chi_0))$  μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και την μορφή:  $\psi - f(\chi_0) = f'(\chi_0)(\chi - \chi_0)$

Αν η συνάρτηση **δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $\chi_0$**  τότε **δεν ορίζεται** εφαπτόμενη .(οι εφαπτόμενες με εξίσωση  $\chi = \chi_0$  είναι εκτός ύλης.)

Παρατηρήσεις

- Η κλίση της ευθείας  $\epsilon$ :  $\alpha = \epsilon\varphi\omega = f'(\chi_0)$  λέγεται και **κλίση της γραφικής παράστασης ( $C_f$ ) της  $f$**
- **Αν  $\omega$  είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία  $\epsilon$  με τον άξονα  $\chi\chi'$  τότε:**
  - i)  $\alpha = \epsilon\varphi\omega = f'(\chi_0) > 0 \Leftrightarrow \omega$  οξεία
  - ii)  $\alpha = \epsilon\varphi\omega = f'(\chi_0) < 0 \Leftrightarrow \omega$  αμβλεία
  - iii)  $\alpha = \epsilon\varphi\omega = f'(\chi_0) = 0 \Leftrightarrow \omega = 0 \Leftrightarrow \epsilon // \chi\chi'$  ( $\epsilon$  είναι παράλληλη στον  $\chi\chi'$ )
- Επειδή η εφαπτόμενη δεν ορίζεται όπως στην Γεωμετρία , η εφαπτόμενη ευθεία και η  $C_f$  μπορεί να έχουν ένα κοινό σημείο ,πολλά κοινά σημεία ή άπειρα κοινά σημεία.
- Για τις ασκήσεις με βάση την δοθείσα έκφραση θα βλέπουμε ποιο από τα τρία στοιχεία της ισότητας  $\alpha = \epsilon\varphi\omega = f'(\chi_0)$  δίνεται κάθε φορά .
- Αν η έκφραση είναι  $\langle\langle$  η κλίση της ευθείας στο σημείο επαφής είναι 1 $\rangle\rangle$  τότε γνωρίζουμε ότι:  $f'(\chi_0)=1$  και  $\epsilon\varphi\omega = 1$  άρα  $\omega = 45^0$
- Αν η έκφραση είναι  $\langle\langle$  Η εφαπτόμενη ευθεία σχηματίζει με τον άξονα  $\chi\chi'$  γωνία  $\omega = 60^0 \rangle\rangle$  τότε γνωρίζουμε ότι:  $\alpha = \epsilon\varphi\omega = \epsilon\varphi 60^0 = \sqrt{3} = f'(\chi_0)$
- Αν η έκφραση είναι  $\langle\langle$  Η εφαπτόμενη ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα  $\chi\chi'$  $\rangle\rangle$  τότε γνωρίζουμε ότι:  $\alpha = \epsilon\varphi\omega = \epsilon\varphi 0^0 = 0 = f'(\chi_0)$
- Αν η έκφραση είναι  $\langle\langle$  Η εφαπτόμενη ευθεία είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση

$\psi = -\chi + 4 \gg$  ή  $\ll$  παράλληλη στη διχοτόμο της  $2^{\text{ης}}, 4^{\text{ης}}$  γωνίας των αξόνων (αυτή έχει εξίσωση  $\psi = -\chi \gg$  τότε γνωρίζουμε ότι: **οι παράλληλες ευθείες έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης** άρα  $\alpha = \epsilon\phi\omega = -1 = f'(x_0)$  **οπότε  $\omega = 135^\circ$**

- Αν η έκφραση είναι  $\ll$  Η εφαπτόμενη ευθεία είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση  $\psi = -2\chi + 4 \gg$  τότε γνωρίζουμε ότι: **το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των κάθετων ευθειών ισούται με μείον ένα**. Άρα  $f'(x_0) \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = f'(x_0)$
- Αν η έκφραση είναι  $\ll$  Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης στο σημείο επαφής είναι ίσος με ένα  $\gg$  σημαίνει  $f'(x_0) = 1$  **άρα  $\epsilon\phi\omega = 1$  άρα  $\omega = 45^\circ$**  Το ίδιο αποτέλεσμα δίνει η έκφραση  $\ll$  η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στη διχοτόμο της  $1^{\text{ης}}, 3^{\text{ης}}$  γωνίας των αξόνων  $\gg$  ή η έκφραση  $\ll$  η εφαπτόμενη σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα γωνία  $45^\circ \gg$

#### ➤ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΑ

- **1. Όταν γνωρίζουμε το σημείο επαφής**

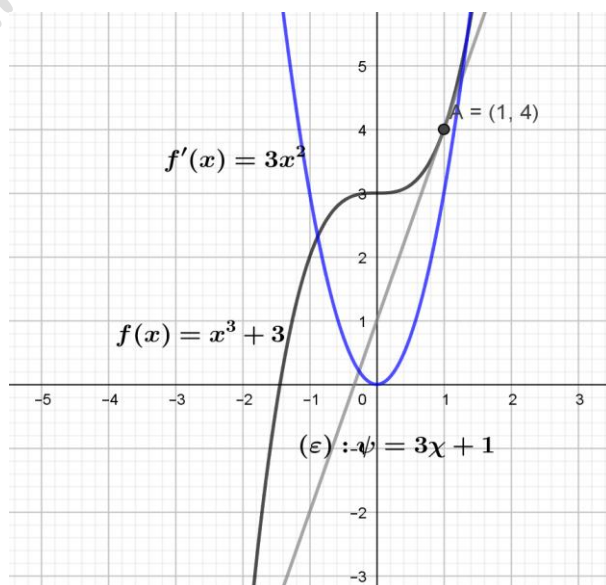
**Όταν δίνεται το σημείο επαφής  $M(x_0, f(x_0))$**  και μας ζητούν να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται σε αυτό, υπολογίζουμε το  $f'(x_0)$ , βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο  $f'(x)$  στη συνέχεια την κλίση  $f'(x_0)$ . Παίρνουμε την εξίσωση  $\psi = f'(x_0)\chi + \beta$  και επειδή το σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  είναι κοινό σημείο της εφαπτόμενης ευθείας και της  $C_f$  επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας, που σημαίνει, **βάζω τις συντεταγμένες του M στη θέση των  $\chi$  και  $\psi$  και υπολογίζω τον μόνο άγνωστο, το  $\beta$** . (εφαρμογή 2ii σελ 25-26, άσκηση 5 σελ. 27 ασκ. 19 σελ 37 του βιβλίου Μαθηματικά και στοιχεία στατιστικής)

**Παράδειγμα 1:** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = x^3 + 3$ . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της  $f$  (της  $C_f$ ) στο σημείο  $A(1, f(1))$ .

ΛΥΣΗ

Το σημείο επαφής είναι το  $A(1, 1^3+3) = A(1, 4)$ . Η πρώτη παράγωγος είναι  $f'(x) = (x^3 + 3)' = (x^3)' + 3' = 3x^2$  άρα η κλίση της ευθείας που εφάπτεται στο σημείο  $A(1, 4)$  είναι ο παράγωγος αριθμός στο 1 δηλαδή το  $f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$ . Έστω  $(\epsilon)$  η ευθεία που εφάπτεται στο  $A(1, 4)$ . Αυτή θα έχει εξίσωση  $\psi = \alpha\chi + \beta$  και με  $\alpha = f'(1) = 3$  άρα  $\psi = f'(1)\chi + \beta \Leftrightarrow \psi = 3\chi + \beta$  Επειδή το σημείο  $A(1, 4)$  είναι κοινό σημείο της  $C_f$  και της εφαπτόμενης, επαληθεύει την  $\psi = 3\chi + \beta$  άρα  $4 = 3 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$  και η εξίσωση είναι

$$\psi = 3\chi + 1$$



Αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο  $\psi - \psi_0 = f'(1)(\chi - \chi_0)$  με  $(\chi_0, \psi_0) = (1, 4)$  παίρνουμε:  $\psi - 4 = 3(\chi - 1) \Leftrightarrow \psi - 4 = 3\chi - 3 \Leftrightarrow \psi = 3\chi + 4 - 3 \Leftrightarrow \psi = 3\chi + 1$

{σχόλιο: Ένα σημείο της συνάρτησης  $\psi = f(x) = x^3 + 3$  μπορεί να παρασταθεί με

$(\chi, \psi) = (\chi, f(\chi)) = (\chi, \chi^3 + 3)$  Η τρίτη έκφραση είναι απαραίτητη για να απαντήσετε στην ερώτηση 2 στη σελίδα 50 του βιβλίου από τις ερωτήσεις κατανόησης και γενικά όταν θέλουμε να εκφράσουμε τις συντεταγμένες με μια μεταβλητή.}

- **2) Όταν άμεσα ή έμμεσα γνωρίζουμε την κλίση της εφαπτόμενης στην  $C_f$  ευθείας  $\varepsilon$  σε ένα σημείο επαφής**

Ονομάζουμε  $M(x_0, f(x_0))$  το σημείο επαφής και το υπολογίζουμε χρησιμοποιώντας τα δεδομένα στοιχεία για την κλίση της ευθείας. Οι περιπτώσεις, αναφέρθηκαν και ποιο πάνω.

**A)** Η εφαπτόμενη στην  $C_f$  (γραφική παράσταση της  $f$ ) στο σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  έχει συντελεστή διεύθυνσης (ή κλίση)  $\alpha = f'(x_0)$ . Υπολογίζουμε από την εξίσωση που προκύπτει το  $x_0$ , άρα το σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  και στη συνέχεια την εξίσωση της ευθείας, όπως στο παράδειγμα 1. Αυτή η διαδικασία ισχύει σε όλες τις παρακάτω περιπτώσεις.

**B)** Η εφαπτόμενη στην  $C_f$  (γραφική παράσταση της  $f$ ) στο σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  με εξίσωση  $\psi = f'(x_0)x + \beta$  είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση π.χ.  $\psi = 3x + \beta$ . Τότε ισχύει  $f'(x_0) = 3$

**Γ)** Η εφαπτόμενη στην  $C_f$  (γραφική παράσταση της  $f$ ) στο σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  με εξίσωση  $\psi = f'(x_0)x + \beta$  είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση π.χ.  $\psi = 3x + \beta$ . Τότε ισχύει  $f'(x_0) \cdot 3 = -1$

(σημείωση : ο 3 έχει αντίστροφο το  $\frac{1}{3}$ . Ο  $-\frac{1}{3}$  είναι ο αντίθετος του αντίστροφου του 3 γιαυτό και ο 3 και ο  $-\frac{1}{3}$  λέμε ότι είναι **αντιθετοαντίστροφοι**  $3 \cdot (-\frac{1}{3}) = -1$ . έτσι για ενημέρωση αν το δείτε κάπου γραμμένο. )

**Δ)** Η εφαπτόμενη στην  $C_f$  (γραφική παράσταση της  $f$ ) στο σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  με εξίσωση  $\psi = f'(x_0)x + \beta$  είναι παράλληλη στον άξονα  $xx'$  που έχει εξίσωση  $\psi = 0$  ή τυπικά  $\psi = 0x + 0$ . Τότε ισχύει  $f'(x_0) = 0$

**Ε)** Η εφαπτόμενη στην  $C_f$  (γραφική παράσταση της  $f$ ) στο σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  με εξίσωση  $\psi = f'(x_0)x + \beta$  είναι παράλληλη στην διχοτόμο 1<sup>ης</sup>, 3<sup>ης</sup> γωνίας των αξόνων με εξίσωση  $\psi = x$  (ή σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα  $xx'$ ). Τότε ισχύει  $f'(x_0) = 1$

**ΣΤ)** Η εφαπτόμενη στην  $C_f$  (γραφική παράσταση της  $f$ ) στο σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  με εξίσωση  $\psi = f'(x_0)x + \beta$  είναι παράλληλη στην διχοτόμο 2<sup>ης</sup>, 4<sup>ης</sup> γωνίας των αξόνων με εξίσωση  $\psi = -x$  (ή σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα  $xx'$ ). Τότε ισχύει  $f'(x_0) = -1$

**Ζ)** Η εφαπτόμενη στην  $C_f$  (γραφική παράσταση της  $f$ ) στο σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  με εξίσωση  $\psi = f'(x_0)x + \beta$  σχηματίζει γωνία  $\omega$  με τον άξονα  $xx'$  ( $\omega \neq 90^\circ$ ) Βρίσκουμε την τιμή της  $\varepsilon\phi\omega$  και ισχύει  $\varepsilon\phi\omega = f'(x_0)$  (να θυμηθούμε λίγο τριγωνομετρία:  $\varepsilon\phi(\pi - \omega) = -\varepsilon\phi\omega$  δηλαδή  $\varepsilon\phi(150^\circ) = \varepsilon\phi(180^\circ - 30^\circ) = -\varepsilon\phi 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  δηλαδή οι παραπληρωματικές γωνίες, αυτές που έχουν άθροισμα 180° ή  $\pi$  ακτίνια, έχουν αντίθετες εφαπτόμενες. Αυτό μπορεί να βοηθήσει να θυμόμαστε ποιο εύκολα τον παραπάνω πίνακα. )

Αφού υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του σημείου  $M(x_0, f(x_0))$  συνεχίζουμε όπως το παράδειγμα 1

**Παράδειγμα 2** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = x^2 - 4x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στην  $C_f$  (γραφική παράσταση της  $f$ ) στο σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  και

i) Έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\alpha = 2$

ii) Είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση  $\psi=6x-5$

iii) Είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση  $\psi=\frac{1}{2}x+3$

iv) Είναι παράλληλη στον άξονα  $xx'$

ΛΥΣΗ

i) Έστω  $M(x_0, f(x_0))$  το σημείο της  $C_f$  στο οποίο εφάπτεται η ευθεία με εξίσωση  $\psi=ax+\beta$  με  $a=f'(x_0)$  άρα  $\psi=f'(x_0)x+\beta$ . Η  $f'(x) = (x^2 - 4x)' = (x^2)' - (4x)' = 2x - 4$  Επειδή  $f'(x_0)=2 \Leftrightarrow 2x_0 - 4 = 2 \Leftrightarrow 2x_0 = 4 + 2 \Leftrightarrow 2x_0 = 6 \Leftrightarrow x_0 = 3$  Οπότε  $f'(3)=2$  άρα η εξίσωση γίνεται  $\psi=2x+\beta$  και το σημείο είναι:  $M(3, f(3))=M(3, 3^2-4\cdot 3)=M(3, -3)$  Ως κοινό σημείο επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας άρα  $-3=2\cdot 3+\beta \Leftrightarrow -3-6=\beta \Leftrightarrow \beta=-9$  και η εξίσωση είναι  $\psi=2x-9$  { με χρήση του τύπου  $\psi - \psi_0 = f'(x_0)(x-x_0)$  }  
άρα με  $f'(3)=2$  και  $M(3, -3)$  παίρνουμε:  $\psi - (-3) = 2(x-3) \Leftrightarrow \psi + 3 = 2x - 6 \Leftrightarrow \psi = 2x - 6 - 3 \Leftrightarrow \psi = 2x - 9$  }

ii) Έστω  $M(x_0, f(x_0))$  το σημείο της  $C_f$  στο οποίο εφάπτεται η ευθεία με εξίσωση  $\psi=ax+\beta$  με  $a=f'(x_0)$  άρα  $\psi=f'(x_0)x+\beta$  και επειδή είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση  $\psi=6x-5$  άρα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης οπότε  $f'(x_0)=6 \Leftrightarrow 2x_0 - 4 = 6 \Leftrightarrow 2x_0 = 6 + 4 \Leftrightarrow 2x_0 = 10 \Leftrightarrow x_0 = 5$  οπότε  $f'(5)=6$  και το σημείο είναι  $M(5, f(5))=M(5, 5^2-4\cdot 5)=M(5, 5)$  και η εξίσωση γίνεται  $\psi=6x+\beta$  Ως κοινό σημείο το M επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας άρα  $5=6\cdot 5+\beta \Leftrightarrow 5-30=\beta \Leftrightarrow \beta=-25$  και η εξίσωση είναι  $\psi=6x-25$

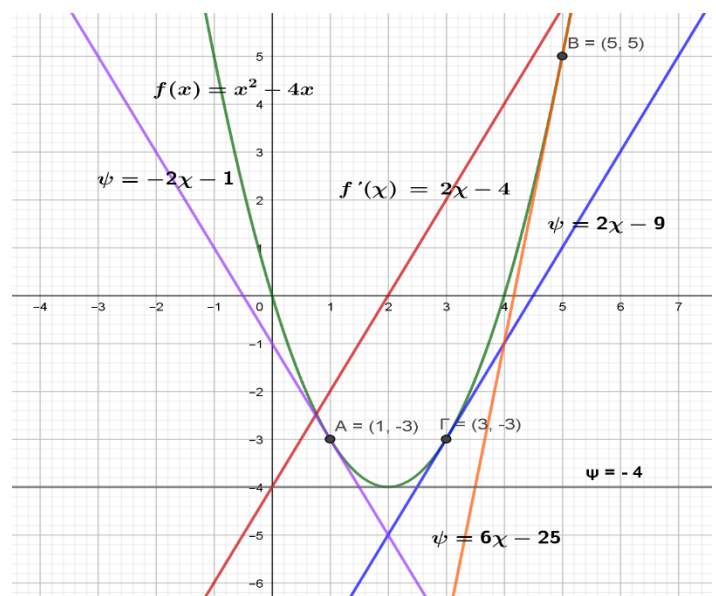
iii) Έστω  $M(x_0, f(x_0))$  το σημείο της  $C_f$  στο οποίο εφάπτεται η ευθεία με εξίσωση  $\psi=ax+\beta$  με  $a=f'(x_0)$  άρα  $\psi=f'(x_0)x+\beta$  και επειδή είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση  $\psi=\frac{1}{2}x+3$  ισχύει :

$f'(x_0) \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow (2x_0 - 4) \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow x_0 - 2 = -1 \Leftrightarrow x_0 = 2 - 1 = 1$  οπότε  $f'(1)=-2$  Η εξίσωση γίνεται  $\psi=-2x+\beta$  και το σημείο είναι  $M(1, f(1))=M(1, 1^2-4\cdot 1)=M(1, -3)$  Ως κοινό σημείο επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας άρα  $-3=-2\cdot 1+\beta \Leftrightarrow -3+2=\beta \Leftrightarrow \beta=-1$  και η εξίσωση είναι  $\psi=-2x-1$

iv) Έστω  $M(x_0, f(x_0))$  το σημείο της  $C_f$  στο οποίο εφάπτεται η ευθεία με εξίσωση  $\psi=ax+\beta$  με  $a=f'(x_0)$  άρα  $\psi=f'(x_0)x+\beta$  και

επειδή είναι παράλληλη στον άξονα  $xx'$  ο συντελεστής διεύθυνσης είναι ίσος με μηδέν άρα  $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow 2x_0 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x_0 =$

$4 \Leftrightarrow x_0 = 2$  και η εξίσωση γίνεται  $\psi=0x+\beta$  και το σημείο είναι  $M(2, f(2))=M(2, 2^2-4\cdot 2)=M(2, -4)$  οπότε η εξίσωση είναι  $-4 = 0\cdot 2+\beta$  άρα  $\beta = -4$  και  $\psi = -4$



# ΑΣΚΗΣΕΙΣ (λυμένες ,μισολυμένες)

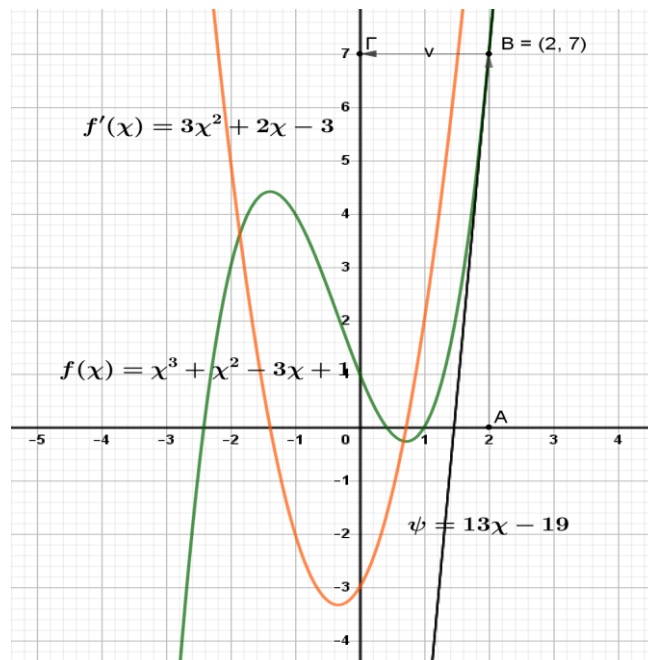
1.

Έστω  $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$ . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της  $C_f$  στο σημείο της  $A(2, f(2))$ . (Απάντηση:  $\psi = 13x - 19$ )

ΛΥΣΗ

Το σημείο επαφής είναι το  $A(2, 2^3 + 2^2 -$

$3 \cdot 2 + 1) = A(2, 7)$ . Η πρώτη παράγωγος είναι  $f'(x) = (x^3 + x^2 - 3x + 1)' = (x^3)' + (x^2)' - (3x)' + 1' = 3x^2 + 2x - 3$  άρα η κλίση της ευθείας που εφάπτεται στο σημείο  $A(2, 7)$  είναι ο παράγωγος αριθμός στο 2 δηλαδή το  $f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = 13$ . Έστω  $(\epsilon)$  η ευθεία που εφάπτεται στο  $A(2, 7)$ . Αυτή θα έχει εξίσωση  $\psi = \alpha x + \beta$  και με  $\alpha = f'(2) = 13$  άρα  $\psi = f'(2)x + \beta \Leftrightarrow \psi = 13x + \beta$ . Επειδή το σημείο  $A(2, 7)$  είναι κοινό σημείο της  $C_f$  και της εφαπτόμενης, επαληθεύει την  $\psi = 13x + \beta$  άρα  $7 = 13 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -26 + 7 = -19$  και η εξίσωση είναι  $\psi = 13x - 19$



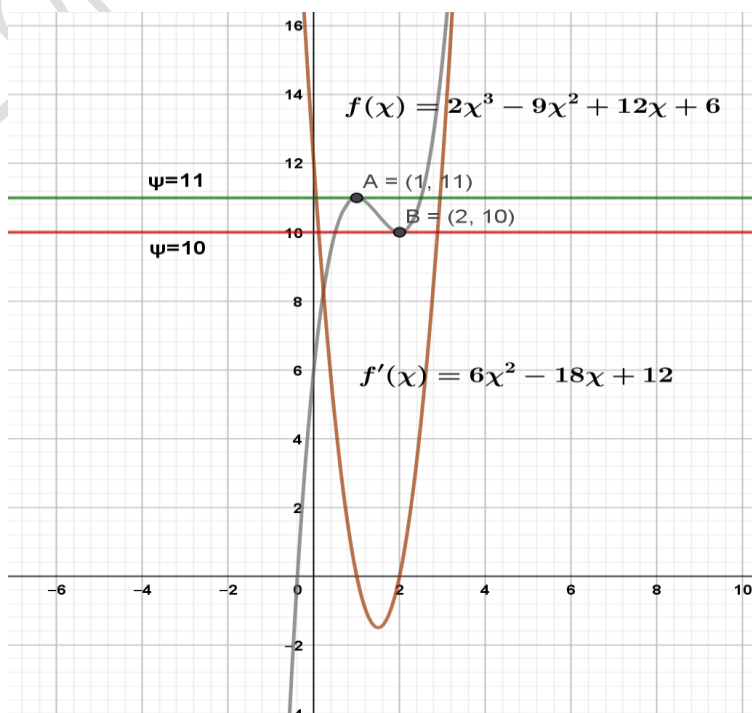
2.

Έστω  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6$ . Να βρείτε σε ποια σημεία της  $C_f$ , οι εφαπτόμενες της είναι παράλληλες στον άξονα  $x$ . (Απάντηση:  $A(1, 11)$  και  $B(2, 10)$ )

ΛΥΣΗ

Έστω  $M(x_0, f(x_0))$  το σημείο της  $C_f$  στο οποίο εφάπτεται η ευθεία με εξίσωση  $\psi = \alpha x + \beta$  με  $\alpha = f'(x_0)$  άρα  $\psi = f'(x_0)x + \beta$  και επειδή είναι η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα  $x$  η κλίση είναι μηδέν άρα ισχύει  $\alpha = f'(x_0) = 0$

Έχουμε:  $f'(x) = (2x^3 - 9x^2 + 12x + 6)' = (2x^3)' - (9x^2)' + (12x)' + 6' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 0$  οι ρίζες είναι  $x=1$  και  $x=2$ . Για  $x=1$  το  $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + 6 = 11$  οπότε το σημείο είναι  $A(1, 11)$ . Για  $x=2$  το  $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + 6 = 10$  οπότε το σημείο είναι  $B(2, 10)$



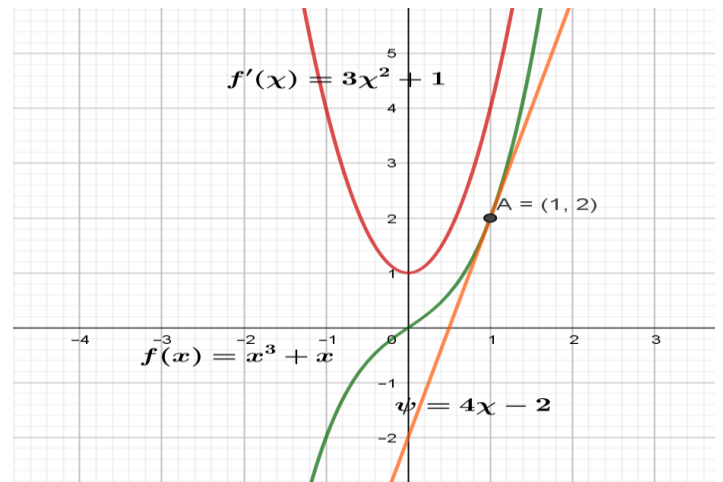


3.

Έστω  $f(x) = x(x^2 + 1)$ . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της  $C_f$ , στο σημείο της που έχει τετμημένη ίση με 1. Απάντηση:  $\psi = 4x - 2$

{υπόδειξη:  $f(x) = x^3 + x$ ,  $f'(x) = (x^3 + x)' = 3x^2 + 1$ ,  $f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 1 = 3 + 1 = 4$

$A(1, f(1)) = A(1, 1^3 + 1) = A(1, 2)$ ,  $\psi = f'(1)x + \beta$



4.

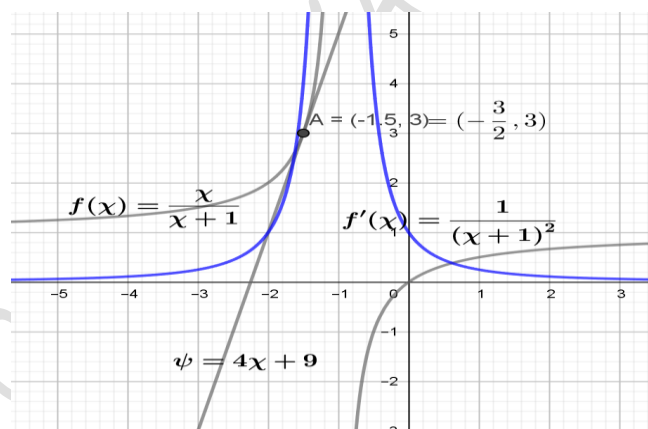
Έστω  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της  $C_f$ , στο σημείο της που έχει τεταγμένη ίση με 3. Απάντηση:  $\psi = 4x + 9$

{Υπόδειξη: Αν  $A(x_0, f(x_0))$  το σημείο, δίνεται ότι

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow \frac{x_0}{x_0 + 1} = 3 \Leftrightarrow x_0 = 3(x_0 + 1) \Leftrightarrow$$

$$x_0 = -\frac{3}{2} \text{ και το σημείο είναι } A(-\frac{3}{2}, \frac{3}{-\frac{3}{2}+1})$$

$A(-\frac{3}{2}, 3)$  υπολογίζω παράγωγο κ.λ.π.}



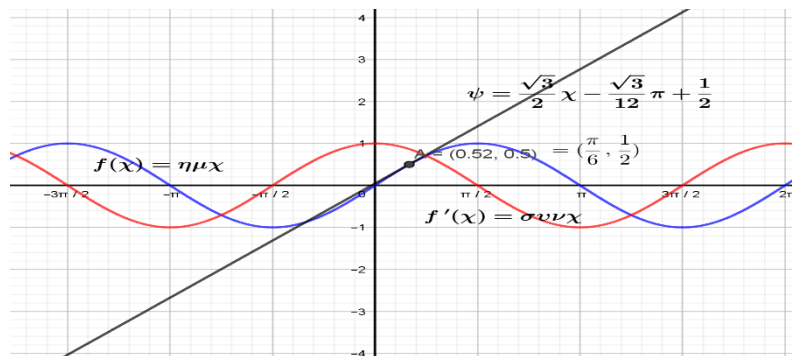
5.

Έστω  $f(x) = \eta\mu x$ . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της  $C_f$ , στο σημείο της που έχει τετμημένη ίση με  $\frac{\pi}{6}$ .

Απάντηση:  $\psi = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{12}\pi + \frac{1}{2}$  και

$$\eta\mu 30^\circ = \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

{υπόδειξη:



Το σημείο είναι  $A(\frac{\pi}{6}, f(\frac{\pi}{6})) = A(\frac{\pi}{6}, \eta\mu \frac{\pi}{6}) = A(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ ,  $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ ,  $f'(\frac{\pi}{6}) = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\psi = f'(\frac{\pi}{6})x + \beta$   
ή  $\psi = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \beta$ , το σημείο  $A(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$  είναι κοινό άρα  $\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$  οπότε  $\psi = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$

6.

Έστω  $f(x) = \sqrt{x+1} + 1$ . Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει με τον άξονα  $\chi\chi'$  η εφαπτόμενη της  $c_f$  στο σημείο της, που έχει τετμημένη ίση με  $-\frac{3}{4}$ . (Απάντηση :  $45^\circ$  ή  $\frac{\pi}{4}$  ακτίνια )

ΛΥΣΗ

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = \sqrt{-\frac{3}{4}+1} + 1 = \sqrt{\frac{1}{4}} + 1 = \frac{3}{2} \quad \text{Το σημείο είναι}$$

$$A\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right) \quad \text{Η παράγωγος είναι: } f'(x) = (\sqrt{x+1} + 1)' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}(x+1)' + 0 = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

Γνωρίζουμε ότι η κλίση της ευθείας που εφάπτεται στην  $c_f$

$$\text{στο σημείο } A\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right) \text{ είναι: } \alpha = \epsilon\phi\omega = f'\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{-\frac{3}{4}+1}} =$$

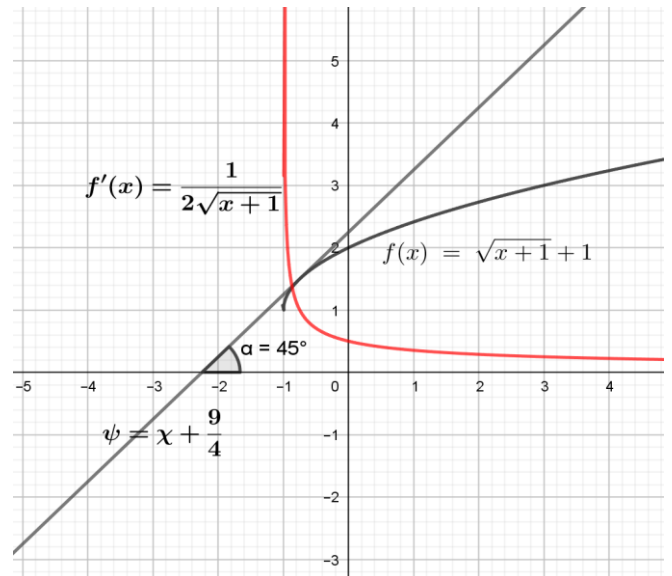
$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{άρα } \epsilon\phi\omega = 1 \text{ οπότε } \omega = 45^\circ$$

{Για να είναι από μαθηματική σκοπιά σωστό επειδή η

$\epsilon\phi\omega = 1$  είναι μια τριγωνομετρική εξίσωση, ακολουθώντας

τα τυπικά βήματα επίλυσής της έχουμε:  $\begin{pmatrix} \epsilon\phi\omega = 1 \\ \epsilon\phi 45^\circ = 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \epsilon\phi\omega = \epsilon\phi 45^\circ \Leftrightarrow \omega = 180^\circ \kappa + 45^\circ$  όπου  $\kappa$  ακέραιος.

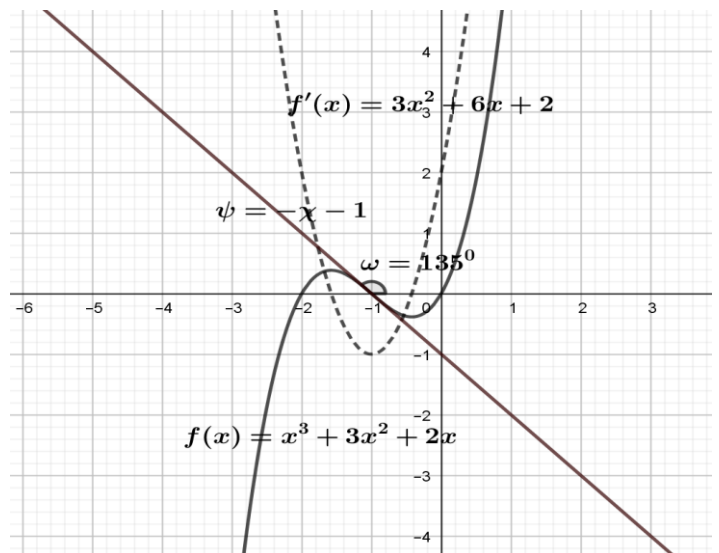
Επειδή η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη με τον άξονα  $\chi\chi'$  είναι μικρότερη από  $180^\circ$  άρα  $\kappa=0$  και συνεπώς  $\omega = 45^\circ$  }



7.

Έστω  $f(x) = x(x+1)(x+2)$ . Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει με τον  $\chi\chi'$  η εφαπτόμενη της  $c_f$  στο σημείο της που έχει τετμημένη ίση με  $-1$  (Απάντηση:  $\omega = \frac{3\pi}{4}$ , μετατρέψτε σε μοίρες με τον τύπο:  $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu^0}{180^0}$ )

{  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$ ,  $f'(x) = 3x^2 + 6x + 2$ , το σημείο επαφής είναι:  $A(-1, (-1)^3 + 3(-1)^2 + 2(-1)) = A(-1, 0)$ ,  $f'(-1) = -1 = \epsilon\phi\omega = \alpha$ , άρα  $\omega = 135^\circ$  }





Οι παρακάτω ασκήσεις δεν είναι, θεωρώ, για τις δικές μας εξετάσεις αλλά για να δούμε και έναν άλλο τρόπο σκέψης.

8.

Έστω  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $c_f$  που διέρχεται από το σημείο A(4,4)

(Απάντηση:  $\psi = \frac{3}{4}x + 1$ )

ΛΥΣΗ

Το σημείο A(4,4) ανήκει στην ευθεία που εφάπτεται της  $c_f$  αλλά δεν είναι το σημείο επαφής. Άρα επαληθεύει μόνο την εξίσωση της ευθείας. Έστω  $\psi = \alpha x + \beta$  η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στην  $c_f$  στο σημείο  $M(x_0, \psi_0) =$

$$M(x_0, f(x_0)) = M(x_0, x_0 + \frac{1}{x_0}) \text{ . Γνωρίζουμε τότε ότι}$$

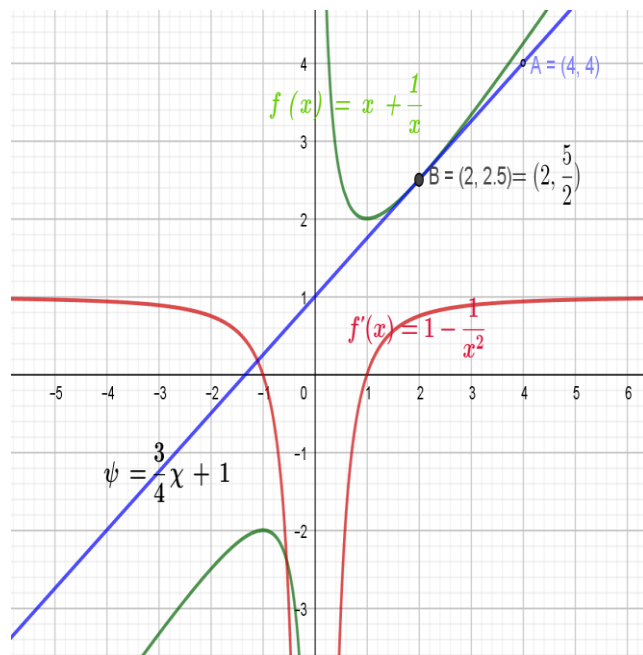
$$\alpha = f'(x_0) \text{ και η εξίσωση γίνεται: } \psi = f'(x_0)x + \beta \quad (1)$$

(δεν ξεχνάμε ότι το  $x_0$  και  $\psi_0$  είναι αριθμοί και όχι μεταβλητές) . Επειδή το σημείο  $M(x_0, \psi_0)$  είναι σημείο της ευθείας άρα επαληθεύει την εξίσωσή της . ( Βάζω λοιπόν τις τιμές αυτές στην εξίσωση της ευθείας και υπολογίζω το  $\beta$  οπότε και διαμορφώνω την εξίσωση (1) ώστε να περιλαμβάνει το  $x_0$  και την παράγωγο στο  $x_0$  . Η σκέψη μας είναι να καταφέρουμε να έχουμε ως μόνο άγνωστο το  $x_0$  , γιαυτό και το  $\psi_0$  το εκφράζουμε ως  $\psi_0 = x_0 + \frac{1}{x_0}$  ) . Οπότε:  $\psi_0 = f'(x_0)x_0 + \beta \Leftrightarrow \beta = \psi_0 - f'(x_0)x_0$  και η

$$\text{εξίσωση (1) γίνεται : } \psi = f'(x_0)x + \psi_0 - f'(x_0)x_0 \Leftrightarrow \psi = f'(x_0)x + x_0 + \frac{1}{x_0} - f'(x_0)x_0 \quad (2) \text{ Επειδή } f'(x_0) = 1 - \frac{1}{x_0^2}$$

η (2) γίνεται:  $\psi = (1 - \frac{1}{x_0^2})x + x_0 + \frac{1}{x_0} - (1 - \frac{1}{x_0^2})x_0$  Επειδή το σημείο A(4,4) είναι σημείο της ευθείας (2) επαληθεύει την εξίσωσή της άρα ισχύει:  $4 = (1 - \frac{1}{x_0^2})4 + x_0 + \frac{1}{x_0} - (1 - \frac{1}{x_0^2})x_0$  Στην εξίσωση αυτή μόνος άγνωστος το  $x_0$  , την λύνουμε και το υπολογίζουμε:  $4 = 4 - \frac{1}{x_0^2}4 + x_0 + \frac{1}{x_0} - x_0 + \frac{1}{x_0^2}x_0 \Leftrightarrow$

$$0 = -\frac{1}{x_0^2}4 + \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2}x_0 \Leftrightarrow \frac{-4+2x_0}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow -4 + 2x_0 = 0 \Leftrightarrow 2x_0 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 2 \text{ και το σημείο } M(2, 2 + \frac{1}{2}) = M(2, \frac{5}{2}) \text{ Η πρώτη παράγωγος είναι } f'(2) = 1 - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ και το } \beta = \psi_0 - f'(x_0)x_0 \text{ στο } x=2 \text{ είναι } \beta = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ συνεπώς η εξίσωση (1) γίνεται: } \psi = \frac{3}{4}x + 1 \text{ \{ παρατήρηση: θα ήταν ποιο εύκολη η δουλειά μας αν χρησιμοποιούσαμε για την εξίσωση της ευθείας τον τύπο } } \\ \psi - \psi_0 = f'(x_0)(x - x_0) \}$$



9. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 4x + 4$  Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon: \psi = -x + 6$  εφάπτεται της γραφικής παράστασης της  $f$

ΛΥΣΗ

Έστω  $M(x_0, f(x_0))$  ένα τυχαίο σημείο της  $C_f$ .

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \quad \text{Έστω η}$$

εφαπτόμενη της  $C_f$  σε αυτό θα έχει εξίσωση :

( $\varepsilon'$ ) :  $\psi = f'(x_0)x + \beta$  όπου  $\beta = \psi_0 - f'(x_0)x_0$  (δες την προηγούμενη άσκηση) άρα

( $\varepsilon'$ ) :  $\psi = f'(x_0)x + \psi_0 - f'(x_0)x_0$  Αν η ευθεία που μας δόθηκε η  $\varepsilon: \psi = -x + 6$  είναι εφαπτόμενη πρέπει να

ταυτίζεται με την ( $\varepsilon'$ ) :  $\psi = f'(x_0)x + \psi_0 - f'(x_0)x_0$  με

$$f'(x_0) = 3x_0^2 - 4$$

**Συνεπώς** ( πρέπει να έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης και ίδιο β οπότε ) πρέπει το  $x_0$  να ικανοποιεί τις παρακάτω ισότητες :

$$\begin{aligned} \begin{cases} f'(x_0) = -1 \\ \psi_0 - f'(x_0)x_0 = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = -1 \\ f(x_0) - f'(x_0)x_0 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = -1 \\ f(x_0) - (-1)x_0 = 6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = -1 \\ f(x_0) + x_0 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = -1 \\ f(x_0) = -x_0 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0^2 - 4 = -1 \\ f(x_0) = -x_0 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0^2 = 4 - 1 \\ f(x_0) = -x_0 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} 3x_0^2 = 3 \\ f(x_0) = -x_0 + 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = 1 \\ f(x_0) = -x_0 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \text{ ή } x_0 = -1 \\ f(x_0) = -x_0 + 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Οπότε έχουμε : για  $x_0 = 1$  τότε  $f(1) = -1 + 6 \Leftrightarrow f(1) = 5$  και το σημείο είναι το  $(1,5)$  Για να είναι κοινό σημείο πρέπει να επαληθεύει τις εξισώσεις και των δύο : για την ευθεία :  $5 = -1 \cdot 1 + 6$  Αληθής άρα είναι σημείο της ευθείας. Για την συνάρτηση:  $5 = 1^3 - 4 \cdot 1 + 4 \Leftrightarrow 5 = 1$  ψευδής άρα δεν είναι κοινό σημείο και απορρίπτεται. Για  $x_0 = -1$  τότε  $f(-1) = -(-1) + 6 \Leftrightarrow f(-1) = 7$  και το σημείο είναι το  $(-1,7)$  Για να είναι κοινό σημείο πρέπει να επαληθεύει τις εξισώσεις και των δύο : για την ευθεία :  $7 = -1 \cdot (-1) + 6 \Leftrightarrow 7 = 7$  Αληθής άρα είναι σημείο της ευθείας. Για την συνάρτηση:  $7 = (-1)^3 - 4 \cdot (-1) + 4 \Leftrightarrow 7 = -1 + 4 + 4 \Leftrightarrow 7 = 7$  αληθής. Άρα είναι κοινό σημείο και το  $(-1,7)$  είναι το σημείο επαφής.

