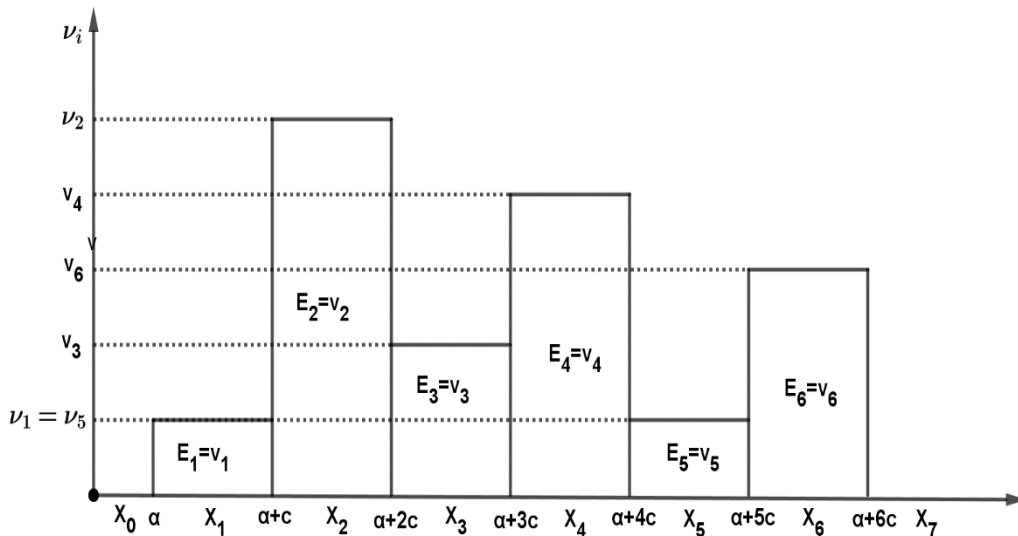


{ Τα παρακάτω γράφτηκαν για να πορευτούμε ,με τις μαθήτριες και τους μαθητές του 1<sup>ου</sup> ΕΠΑΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ την περίοδο της καραντίνας, γι αυτό και οι επαναλήψεις και λοιπές ατέλειες. Στη συνέχεια εμπλουτίστηκε με τις ασκήσεις που μπήκαν στις πανελλαδικές ΓΕΛ και ΕΠΑΛ μέχρι το 2021 .Ελεύθερο για χρήση από όποιον θεωρήσει ότι θα βοηθηθεί ,ευελπιστώντας σε κατανόηση για λάθη και παραλήψεις. Επισημάνσεις για λάθη, ασάφειες κ.λ.π. στο [katsarosarist@gmail.com](mailto:katsarosarist@gmail.com) Μελετήστε αναλυτικά τα ιστογράμματα -πολύγωνα . Υπάρχουν ασκήσεις του γενικού λυκείου που είναι δύσκολες και δεν χρειάζεται να σας απογοητεύουν. Από όσες δεν μπορείτε να λύσετε ,δείτε ποια σημεία της θεωρίας δεν σας ήταν γνωστά . Σε κάθε άσκηση να δείτε τι μας δίνει, τι μας ζητά ,σε ποια θεωρία στηρίζεται ,ποιοι τύποι ισχύουν ποιες τεχνικές εφαρμόζονται. Εύχομαι να καταφέρετε να έχετε κλειστό και μακριά από το χώρο που μελετάτε το κινητό.}

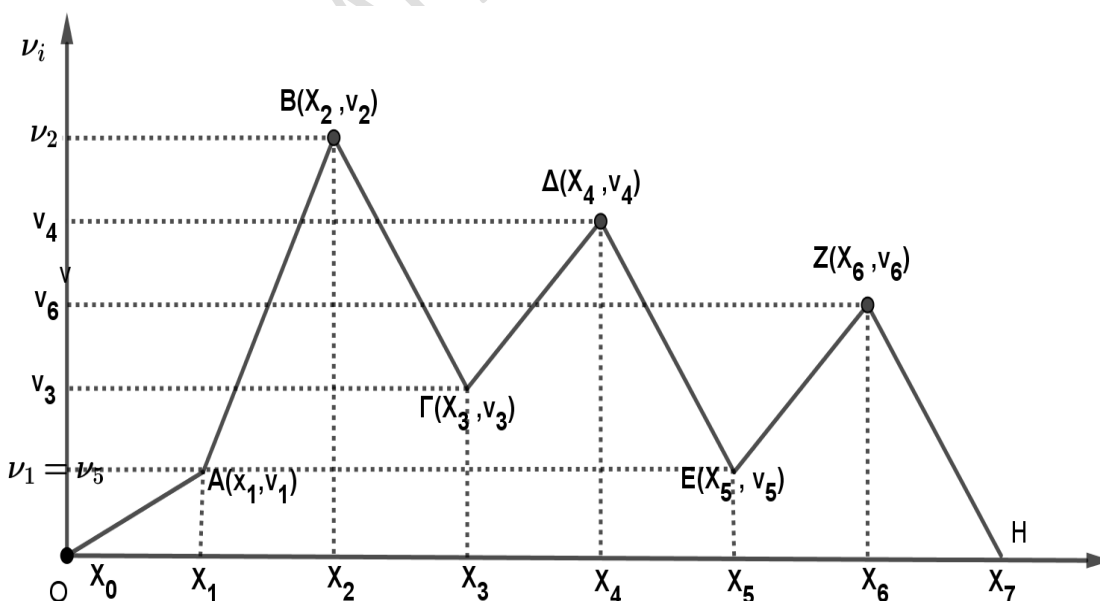
## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

### Ιστόγραμμα συχνοτήτων $\nu_i$



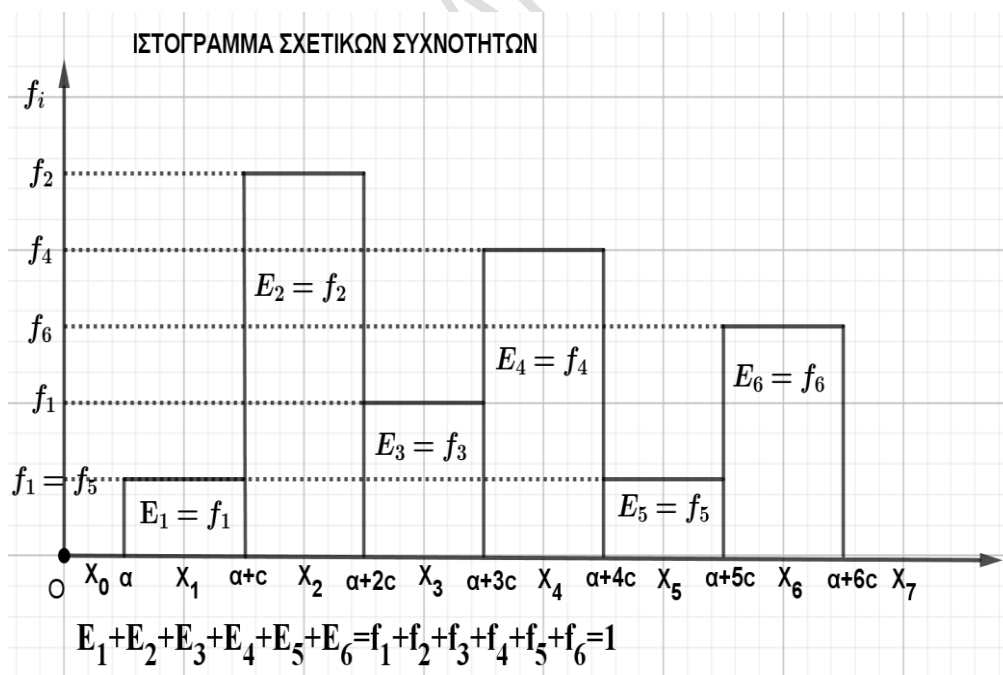
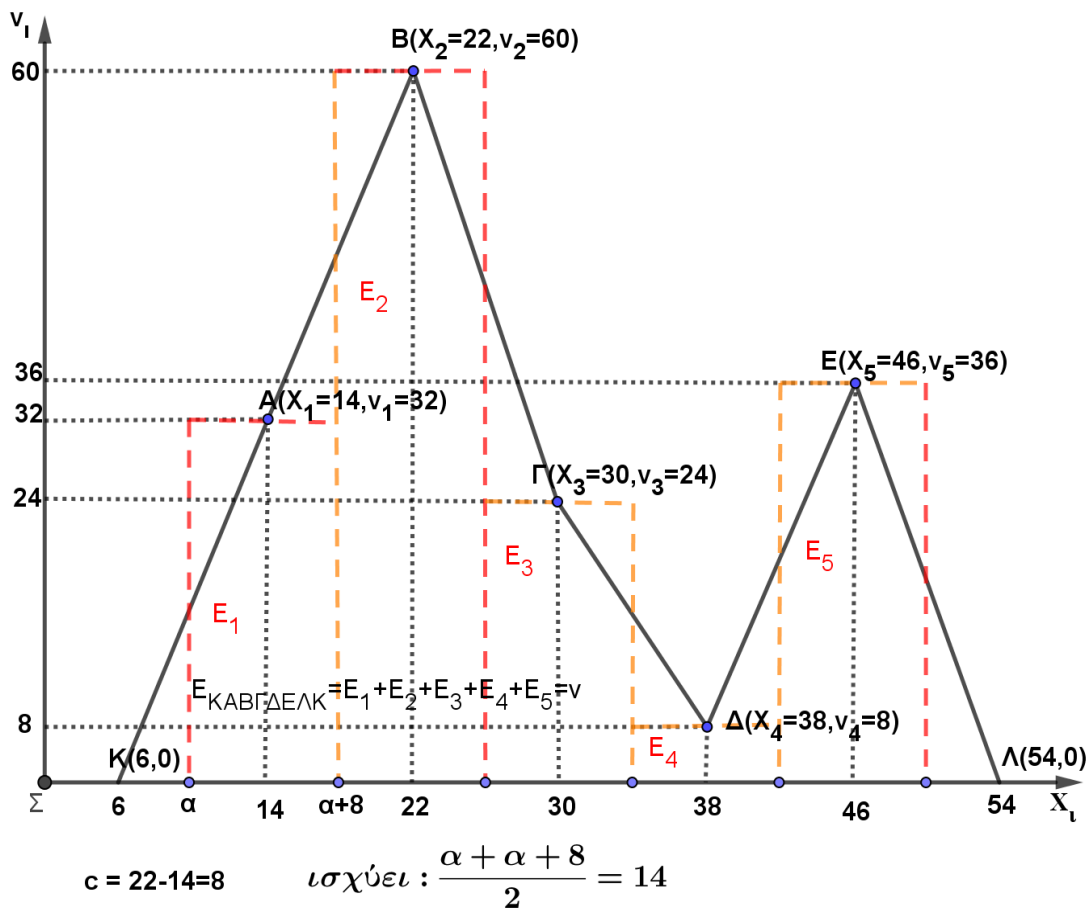
$$1) E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 + \nu_6 = n \quad 2) \text{κεντρική τιμή } X_1 = \frac{\alpha + (\alpha + c)}{2} \quad 3) X_2 - X_1 = c$$

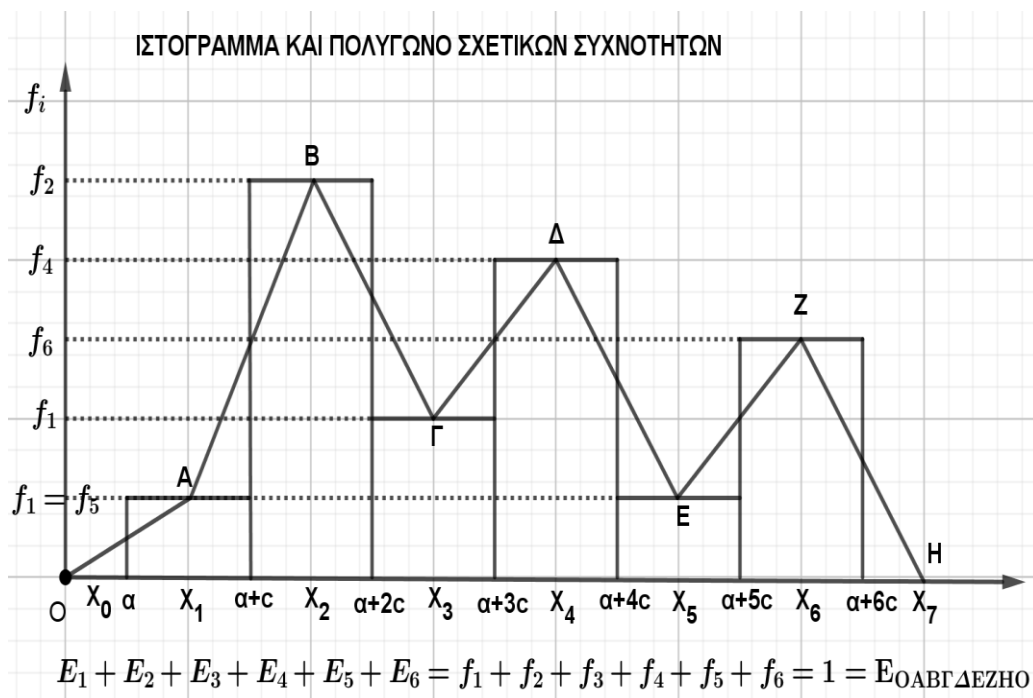
### Πολύγωνο συχνοτήτων $\nu_i$



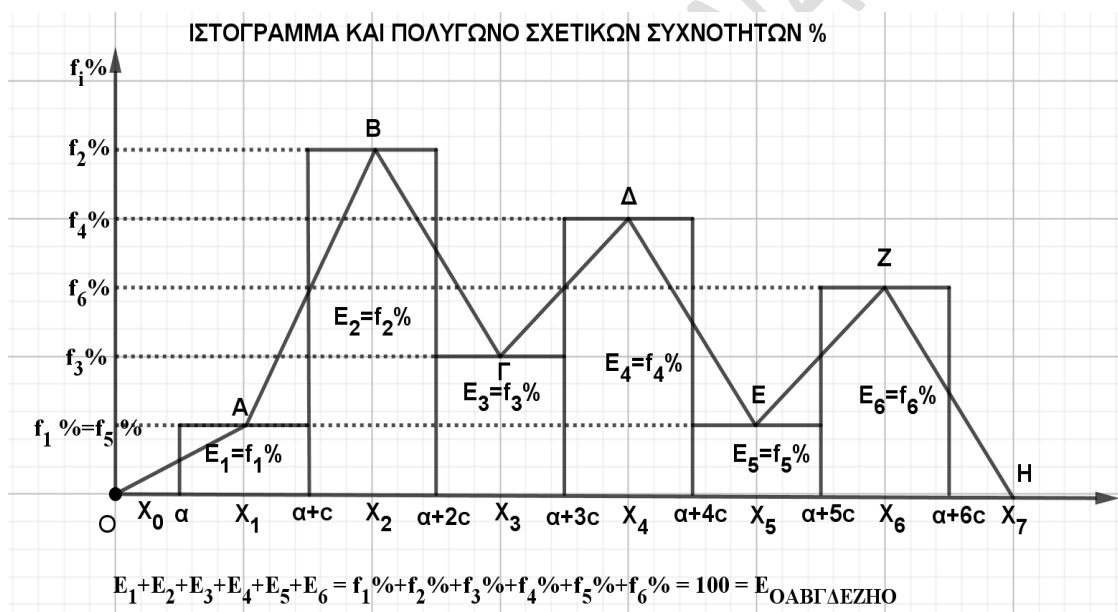
εμβαδό (ΟΑΒΓΔΕΖΗ) = μέγεθος δείγματος =  $n$

Στο παρακάτω πολύγωνο δίνονται αριθμητικές τιμές για να γίνουν ποιο κατανοητά τα στοιχεία που μας δίνονται, όταν μας δοθεί ένα πολύγωνο συχνοτήτων.



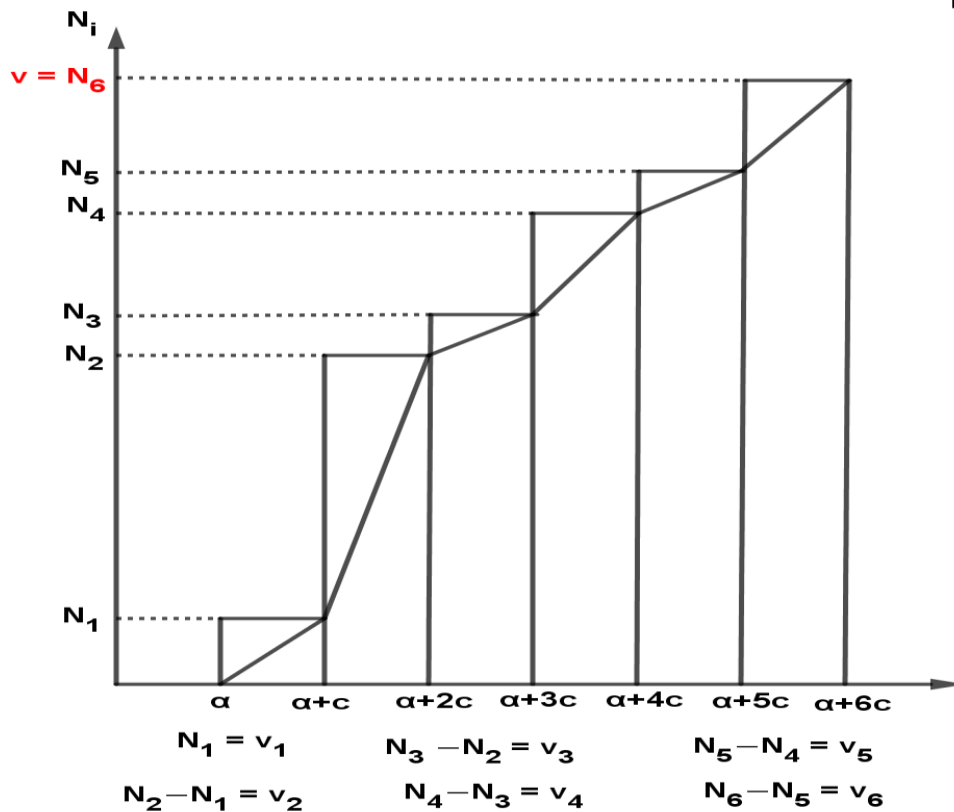


$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ , οι κεντρικές τιμές των κλάσεων του προβλήματος και  $X_0, X_7$  οι κεντρικές τιμές των κλάσεων μηδενικής συχνότητας που δημιουργούμε στην αρχή και το τέλος για να αρχίζει και να τελειώνει η πολυγωνική γραμμή στον οριζόντιο άξονα. Οι συντεταγμένες των κορυφών του πολυγώνου είναι:  $A(X_1, f_1)$ ,  $B(X_2, f_2)$ ,  $\Gamma(X_3, f_3)$ ,  $\Delta(X_4, f_4)$ ,  $E(X_5, f_5)$ ,  $Z(X_6, f_6)$



Οι συντεταγμένες των κορυφών του πολυγώνου είναι:  $A(X_1, f_1\%)$ ,  $B(X_2, f_2\%)$ ,  $\Gamma(X_3, f_3\%)$ ,  $\Delta(X_4, f_4\%)$ ,  $E(X_5, f_5\%)$ ,  $Z(X_6, f_6\%)$

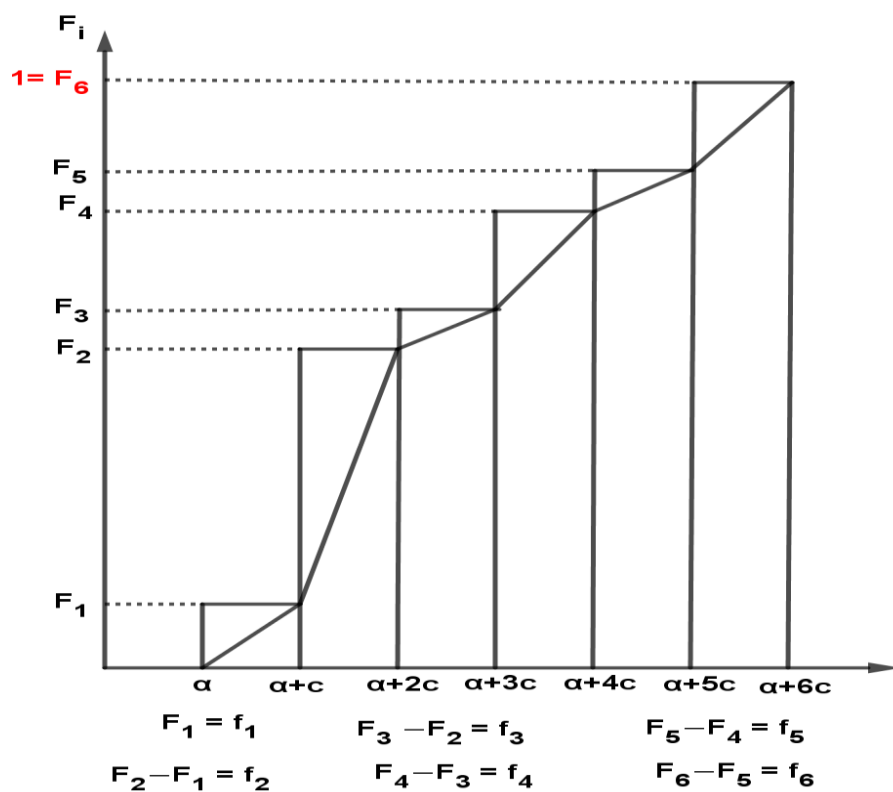
ΙΣΤΟΓΡΑΜΜΑ και ΠΟΛΥΓΩΝΟ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΩΝ ΣΥΧΝΗΤΗΤΩΝ  $N_i$



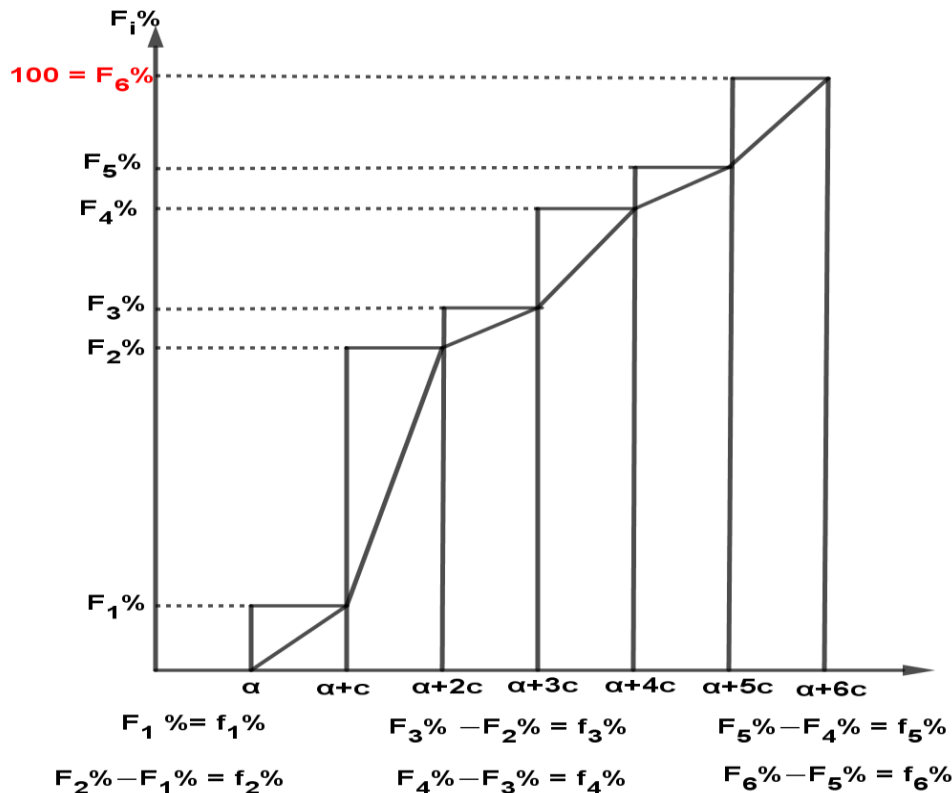
Αν  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$  τα εμβαδά των ορθογωνίων των αντίστοιχων κλάσεων τότε;

$E_1 = N_1 = v_1$  ,  $E_2 = N_2$  ,  $E_3 = N_3$  ,  $E_4 = N_4$  ,  $E_5 = N_5$  ,  $E_6 = N_6 = v$

ΙΣΤΟΓΡΑΜΜΑ και ΠΟΛΥΓΩΝΟ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΩΝ ΣΥΧΝΗΤΗΤΩΝ  $F_i$



**ΙΣΤΟΓΡΑΜΜΑ και ΠΟΛΥΓΩΝΟ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ  $F_i$  %**



1) Παρακάτω δίνεται το πολύγωνο συχνοτήτων των ομαδοποιημένων παρατηρήσεων μιας μεταβλητής  $X$ .

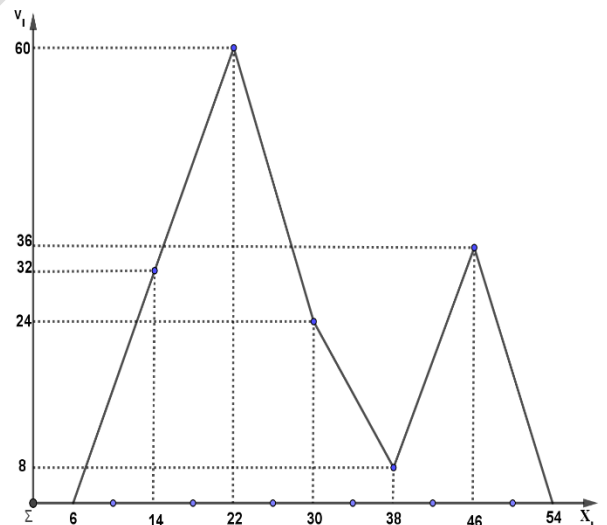
α) Να βρείτε τις κλάσεις που έχουν ομαδοποιηθεί οι παρατηρήσεις

β) Να βρείτε τη συχνότητα κάθε κλάσης.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του πολυγώνου συχνοτήτων και του οριζοντίου άξονα.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν καθενός από τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα του ιστογράμματος αθροιστικών συχνοτήτων και να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ιστόγραμμα.

ε) Αν επιλέξουμε τις 88 παρατηρήσεις με τη μεγαλύτερη τιμή, τότε να βρείτε τη μικρότερη τιμή που πρέπει να έχει μια παρατήρηση, ώστε να επιλεγεί.



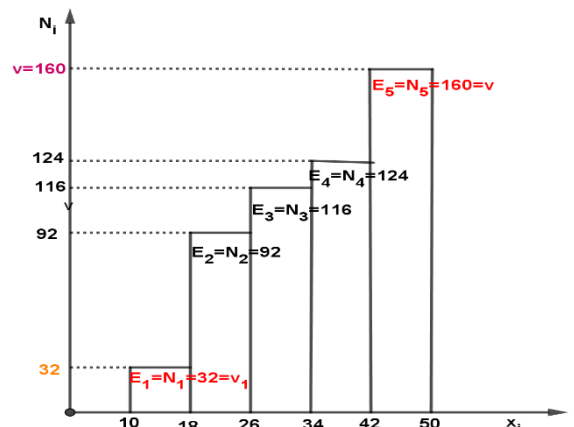
**1) ΛΥΣΗ**

Δεδομένου ότι στην αρχή και στο τέλος παίρνουμε δύο κλάσεις μηδενικής συχνότητας, οι κεντρικές τιμές είναι  $X_1=14$ ,  $X_2=22$ ,  $X_3=30$ ,  $X_4=38$ ,  $X_5=46$

Ισχύει:  $c = X_2 - X_1 = 22 - 14 = 8$  Αν γράψουμε συμβολικά την πρώτη κλάση θεωρώντας  $\alpha$  το κάτω άκρο και  $c$  το πλάτος έχουμε  $[\alpha, \alpha + c) = [\alpha, \alpha + 8)$  και η κεντρική τιμή  $X_1 = 14 = \frac{\alpha + \alpha + 8}{2} \Leftrightarrow$

$28 = 2\alpha + 8 \Leftrightarrow 2\alpha = 28 - 8 = 20 \Leftrightarrow \alpha = \frac{20}{2} = 10$  οπότε οι κλάσεις γίνονται:  $[\alpha, \alpha + c) = [10, 18)$ ,  $[\alpha + c, \alpha + 2c) = [18, 26)$ ,  $[\alpha + 2c, \alpha + 3c) = [26, 34)$ ,  $[\alpha + 3c, \alpha + 4c) = [34, 42)$ ,  $[\alpha + 4c, \alpha + 5c) = [42, 50)$

β) Από τον τρόπο κατασκευής του πολυγώνου συχνοτήτων οι συντεταγμένες των κορυφών του



αντιστοιχούν, η μεν τετμημένη στην κεντρική τιμή της κλάσης, η δε τεταγμένη στην συχνότητα της κλάσης. Συνεπώς  $(X_1, v_1)=(14,32)$ ,  $(X_2, v_2)=(22,60)$ ,  $(X_3, v_3)=(30,24)$ ,  $(X_4, v_4)=(38,8)$ ,  $(X_5, v_5)=(40,36)$

άρα:  $v_1=32$ ,  $v_2=60$ ,  $v_3=24$ ,  $v_4=8$ ,  $v_5=36$

γ) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του πολυγώνου συχνοτήτων και του οριζώντιου άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων έχουμε:

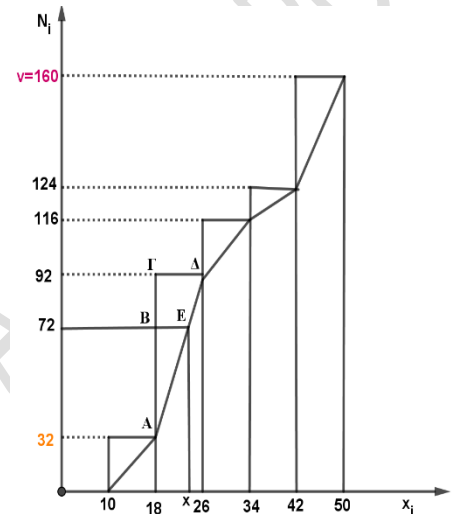
$$E = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 32 + 60 + 24 + 8 + 36 = 160 = v$$

δ) Το ύψος κάθε ορθογώνιου είναι όσο η αθροιστική συχνότητα της κλάσης:

$$N_1 = v_1 = 32, N_2 = v_1 + v_2 = 32 + 60 = 92, N_3 = N_2 + v_3 = 92 + 24 = 116, N_4 = N_3 + v_4 = 116 + 8 = 124 \\ N_5 = N_4 + v_5 = 124 + 36 = 160$$

ε) Επιλέγουμε 88 παρατηρήσεις με τη μεγαλύτερη τιμή, συνεπώς δεν επιλέγουμε  $160 - 88 = 72$  παρατηρήσεις.

Στο ιστόγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων και στον κατακόρυφο άξονα των αθροιστικών συχνοτήτων, σημειώνω τη θέση της τιμής 72 και φέρνω παράλληλη στον οριζόντιο άξονα, που συναντά το ορθογώνιο στο σημείο Β και το πολύγωνο στο σημείο Ε. Από το Ε φέρνω κάθετη στον οριζόντιο άξονα που τον συναντά στο  $\chi$ . Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι όμοια (οξεία γωνία  $\hat{A}$  κοινή) άρα ισχύει:  $\frac{AB}{AG} = \frac{BE}{GD} \Leftrightarrow \frac{72-32}{92-32} = \frac{\chi-18}{26-18} \Leftrightarrow \frac{40}{60} = \frac{\chi-18}{8} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{\chi-18}{8} \Leftrightarrow 2 \cdot 8 = 3(\chi - 18) \Leftrightarrow 16 = 3\chi - 54 \Leftrightarrow 3\chi = 16 + 54 \Leftrightarrow 3\chi = 70 \Leftrightarrow \chi = \frac{70}{3}$  που είναι η μικρότερη τιμή που πρέπει να έχει η παρατήρηση για να επιλεγεί.



**1Α)** Μελετήσαμε  $n$  μαθητές ενός σχολείου ως προς το νούμερο των παπουτσιών τους και τα αποτελέσματα τα ομαδοποιήσαμε σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους.

- Το μικρότερο νούμερο παπουτσιών είναι 34 και το μεγαλύτερο νούμερο είναι 43,9
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του πολυγώνου συχνοτήτων και του οριζώντιου άξονα ισούται με 400.
- Το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου στο ιστόγραμμα συχνοτήτων που αντιστοιχεί στην πρώτη κλάση ισούται με 60
- Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην δεύτερη κλάση είναι τριπλάσιο από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην πέμπτη κλάση.
- Το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου στο ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων που αντιστοιχεί στην τρίτη κλάση είναι 250.
- Το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου στο ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων (επί τοις %) που αντιστοιχεί στην πέμπτη κλάση είναι 7,5
- a) Να βρείτε το εύρος των παρατηρήσεων και το πλάτος  $c$  των κλάσεων.
- b) Να κατασκευάσετε τις 5 κλάσεις όπου ομαδοποιήθηκαν οι παρατηρήσεις.
- c) Να βρείτε τις συχνότητες όλων των κλάσεων.
- d) Να βρείτε πόσοι μαθητές έχουν νούμερο παπουτσιών από 37 ως 41,5

#### 1Α) ΛΥΣΗ

a) Το εύρος  $R$  των παρατηρήσεων είναι  $R = \chi_{max} - \chi_{min} = 43,9 - 34 = 9,9$  και ο αριθμός  $k$  των κλάσεων είναι 5 άρα το πλάτος  $c = \frac{R}{k} = \frac{9,9}{5} = 1,98 \approx 2$

b) Οι κλάσεις είναι:  $[34,36)$ ,  $[36,38)$ ,  $[38,40)$ ,  $[40,42)$ ,  $[42,44)$

c) Το εμβαδόν του πολυγώνου συχνοτήτων και του οριζώντιου άξονα είναι ίσο με το μέγεθος  $n$  του δείγματος, άρα  $n=400$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου της πρώτης κλάσης του ιστογράμματος συχνοτήτων ισούται με την συχνότητα της κλάσης άρα  $v_1=60$

(σχόλιο: Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα, κύκλου ακτίνας  $R$  και  $\mu^0$  δίνεται από τον τύπο:  $E = \frac{\pi R^2 \mu^0}{360^0}$  και επειδή εκτός από το  $\mu^0$ , τα λοιπά στοιχεία του τύπου είναι σταθερά, το εμβαδόν μεταβάλλεται όταν μεταβληθούν οι μοίρες της γωνίας.) οπότε:

$$a_2=3 a_5 \Leftrightarrow \frac{v_2}{v} 360^0 = 3 \frac{v_5}{v} 360^0 \Leftrightarrow \frac{v_2}{v} 360^0 = 3 \frac{v_5}{v} 360^0 \Leftrightarrow$$

- $v_2 = 3v_5$
- $N_3 = 250 \Leftrightarrow v_1 + v_2 + v_3 = 250$
- $E_5 = 7,5 \Leftrightarrow f_5 \% = 7,5 \Leftrightarrow f_5 = 0,075 \Leftrightarrow \frac{v_5}{v} = 0,075 \Leftrightarrow \frac{v_5}{400} = 0,075 \Leftrightarrow$
- $v_5 = 400 \cdot 0,075 = 30$

Άρα  $v_2 = 3 \cdot 30 = 90$ ,  $v_1 = 60$  οπότε  $60+90+v_3=250 \Leftrightarrow v_3 = 250-150=100$   
 $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v$  ή  $60+90+100+v_4+30=400 \Leftrightarrow v_4 = 400 - 100 - 60 - 90 - 30 = 120$

| Κλάσεις [ , ) | $X_i$ | Συχν. $v_i$ |
|---------------|-------|-------------|
| [34,36)       | 35    | 60          |
| [36,38)       | 37    | 90          |
| [38,40)       | 39    | 100         |
| [40,42)       | 41    | 120         |
| [42,44)       | 43    | 30          |
| Σύνολο        |       | 400         |

d) οι μαθητές που έχουν νούμερο παπουτσιών από 37 ως 41,5 είναι όσοι ανήκουν στις κλάσεις:

[37,38) και [38,40) και [40,41,5) Οι παρατηρήσεις θεωρείται ότι είναι ομοιόμορφα κατανομημένες. Στην κλάση [37,38) το 37 είναι κεντρική τιμή, άρα χωρίζει την κλάση σε δύο κλάσεις που περιέχουν, η κάθε μία, τις μισές παρατηρήσεις της κλάσης οπότε  $v'_2 = \frac{90}{2} = 45$ ,  $v_3 = 100$  και για την κλάση [40,41,5) έχουμε:

στην κλάση [40,42) πλάτους  $c = 42-40=2$  αντιστοιχεί συχνότητα  $v_4=120$

στην κλάση [40,41,5) πλάτους  $c = 41,5-40=1,5$  αντιστοιχεί συχνότητα  $v'_4 =$ ;

Άρα  $\frac{2}{1,5} = \frac{120}{v'_4} \Leftrightarrow 2 \cdot v'_4 = 1,5 \cdot 120 \Leftrightarrow 2 \cdot v'_4 = 180 \Leftrightarrow v'_4 = \frac{180}{2} = 90$  οπότε οι μαθητές είναι

$$v'_2 + v_3 + v'_4 = 45+100+90=235$$

2) Παρακάτω δίνεται το πολύγωνο συχνοτήτων των ομαδοποιημένων παρατηρήσεων μιας μεταβλητής  $X$

α) Να βρείτε τις κλάσεις στις οποίες έχουν ομαδοποιηθεί οι παρατηρήσεις.

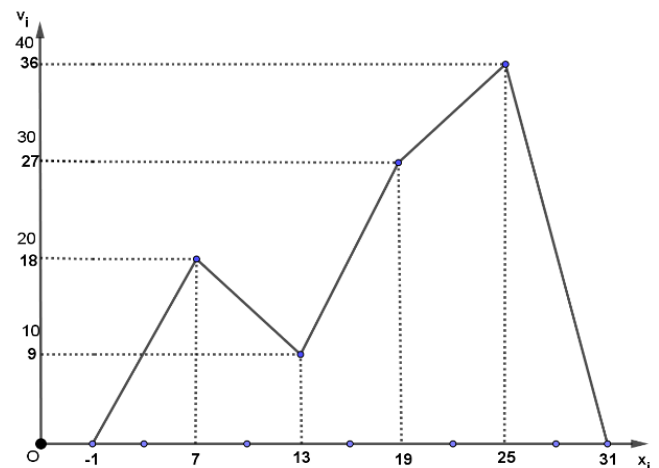
β) Να βρείτε τις συχνότητες της κλάσης.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν από τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα του ιστογράμματος αθροιστικών συχνοτήτων και να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα.

δ) Αν επιλέξουμε τις 45 παρατηρήσεις με τη μεγαλύτερη τιμή, τότε να βρείτε τη μικρότερη τιμή που πρέπει να έχει μια παρατήρηση, ώστε να επιλεγεί.

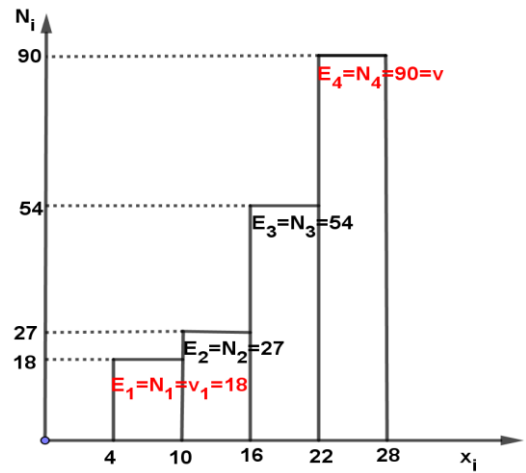
## 2) ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες των κορυφών του πολυγώνου εκφράζουν: η μεν τετμημένη την κεντρική τιμή της κλάσης, η δε τεταγμένη τη συχνότητα της κλάσης. Έστω  $a$  η μικρότερη παρατήρηση και  $c$  το πλάτος της κλάσης. Η πρώτη κλάση γράφεται  $[a, a+c)$ . Ακόμη γνωρίζουμε ότι η διαφορά δύο διαδοχικών κεντρικών τιμών είναι ίση με το πλάτος  $c$ . Συνεπώς ισχύουν:  $X_2 - X_1 = 13 - 7 = 6$  οπότε  $[a, a+c) = [a, a+6)$  Ισχύει:  $\frac{a+a+6}{2} = 7 \Leftrightarrow \frac{2a+6}{2} = 7 \Leftrightarrow a + 3 = 7 \Leftrightarrow a = 7 - 3 = 4$  και οι κλάσεις είναι:  $[a, a+c) = [4,10)$ ,  $[a+c, a+2c) = [10,16)$ ,  $[a+2c, a+3c) = [16,22)$ ,  $[a+3c, a+4c) = [22,28)$



β)  $v_1=18$  ,  $v_2=9$  ,  $v_3=27$  ,  $v_4=36$

γ)  $E_1=N_1=18=v_1$  ,  $E_2=N_2=27$  ,  $E_3=N_3=54$  ,  $E_4=N_4=90=v$  (σχόλιο: θεωρούμε ότι το πλάτος είναι η μονάδα μέτρησης συνεπώς έχει μέτρο ένα και το εμβαδό είναι  $E_1=1 \cdot N_1=N_1$  Για λόγους πρακτικούς με βάση τους περιορισμούς του χώρου, αν στον κατακόρυφο δεχθούμε ως μονάδα το πλάτος, είναι αδύνατο στον χώρο που διαθέτουμε να χωρέσουν 90 μονάδες πλάτους όσο η βάση του ορθογώνιου. Στον κατακόρυφο άξονα μοιράζουμε το διαθέσιμο ύψος αναλογικά με τις αθροιστικές συχνότητες.)



δ) Επιλέγοντας 45 παρατηρήσεις με τη μεγαλύτερη τιμή και επειδή η τελευταία κλάση [22,28) περιέχει 36 παρατηρήσεις απαιτούνται άλλες 9 παρατηρήσεις από την κλάση [16,22) Έστω  $[x,22)$  η κλάση που περιέχει τις 9 παρατηρήσεις. Τότε έχουμε:

Στην κλάση [16,22) πλάτους  $22-16=6$  αντιστοιχούν 27 παρατηρήσεις

Στην κλάση  $[x,22)$  πλάτους  $22-x$  αντιστοιχούν 9 παρατηρήσεις

Άρα  $\frac{22-16}{22-x} = \frac{27}{9} \Leftrightarrow \frac{6}{22-x} = 3 \Leftrightarrow 6 = 3(22-x) \Leftrightarrow 6 = 66 - 3x \Leftrightarrow 3x = 60 \Leftrightarrow x = \frac{60}{3} = 20$  Άρα θα πάρουμε από την παρατήρηση με τιμή 20 και πάνω. (20 η μικρότερη τιμή)

**3)** Παρακάτω δίνεται το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων (επί τοις εκατό %) των ομαδοποιημένων παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X.

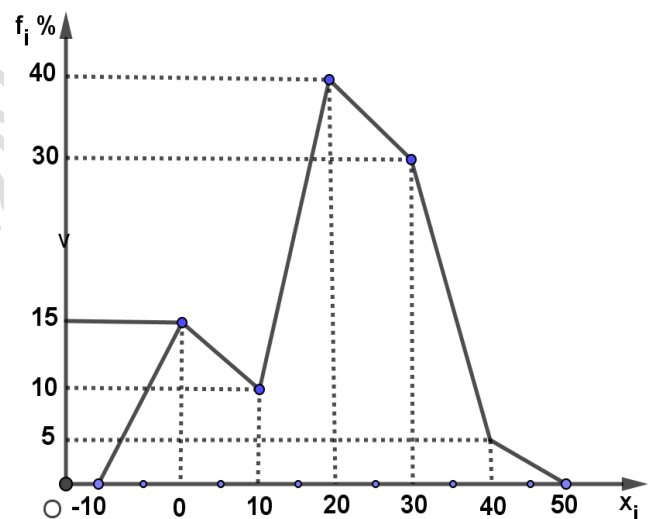
Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του πολυγώνου συχνοτήτων και του οριζώντιου άξονα ισούται με 600.

α) Να βρείτε τις κλάσεις στις οποίες έχουν ομαδοποιηθεί οι παρατηρήσεις.

β) Να βρείτε τη συχνότητα κάθε κλάσης.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν καθενός από τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα του ιστογράμματος σχετικών συχνοτήτων και να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα.

δ) Αν επιλέξουμε τις 300 παρατηρήσεις με τη μεγαλύτερη τιμή, τότε να βρείτε τη μικρότερη τιμή που πρέπει να έχει μια παρατήρηση, ώστε να επιλεγεί.

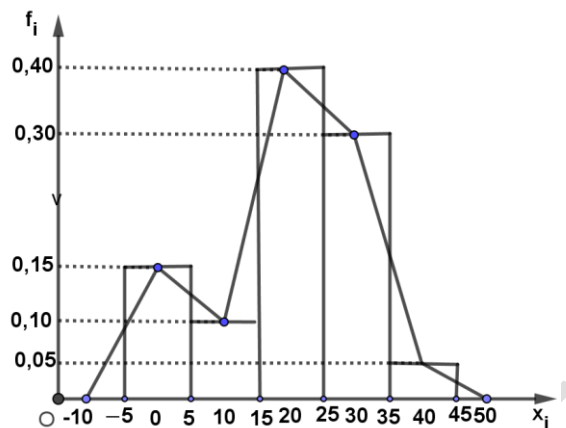


### 3) ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες των κορυφών του πολυγώνου εκφράζουν, η μεν τετμημένη την κεντρική τιμή της κλάσης, η δε τεταγμένη τη σχετική επί τοις εκατό (%) συχνότητα της κλάσης. Έστω  $\alpha$  η μικρότερη παρατήρηση και  $c$  το πλάτος της κλάσης. Η πρώτη κλάση γράφεται  $[\alpha, \alpha+c)$  Ακόμη γνωρίζουμε ότι η διαφορά δύο διαδοχικών κεντρικών τιμών είναι ίση με το πλάτος  $c$ . Συνεπώς ισχύουν:  $X_2 - X_1 = 10 - 0 = 10$  Οπότε ισχύει  $\frac{\alpha + \alpha + 10}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\alpha + 10}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + 10 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = -10 \Leftrightarrow \alpha = \frac{-10}{2} = -5$  και οι κλάσεις είναι:  $[\alpha, \alpha+c) = [-5, 5)$ ,  $[\alpha+c, \alpha+2c) = [5, 15)$ ,  $[\alpha+2c, \alpha+3c) = [15, 25)$ ,  $[\alpha+3c, \alpha+4c) = [25, 35)$ ,  $[\alpha+4c, \alpha+5c) = [35, 45)$  β) Το εμβαδό μεταξύ του πολυγώνου συχνοτήτων και του οριζώντιου άξονα ισούται με το μέγεθος  $v$  του δείγματος άρα  $v = 600$  και  $f_1 = \frac{f_1\%}{100} = \frac{15}{100} = 0,15$ ,  $f_2 = \frac{f_2\%}{100} = \frac{10}{100} = 0,10$ ,  $f_3 = \frac{f_3\%}{100} = \frac{40}{100} = 0,4$ ,  $f_4 = \frac{f_4\%}{100} = \frac{30}{100} = 0,3$ ,  $f_5 = \frac{f_5\%}{100} = \frac{5}{100} = 0,05$  ισχύει  $v_i = v \cdot f_i$  άρα:  $v_1 = v \cdot f_1 = 600 \cdot 0,15 = 90$ ,  $v_2 = v \cdot f_2 = 600 \cdot 0,10 = 60$ ,  $v_3 = v \cdot f_3 = 600 \cdot 0,4 = 240$ ,  $v_4 = v \cdot f_4 = 600 \cdot 0,3 = 180$ ,  $v_5 = v \cdot f_5 = 600 \cdot 0,05 = 30$



γ)



δ) Επιλέγοντας 300 παρατηρήσεις με τη μεγαλύτερη τιμή και επειδή η τελευταία, η 5<sup>η</sup> κλάση [35,45) περιέχει  $v_5=30$  παρατηρήσεις, η 4<sup>η</sup> κλάση [25,35) περιέχει  $v_4=180$  παρατηρήσεις,

$v_5 + v_4 = 30 + 180 = 210$  απαιτούνται άλλες 90 παρατηρήσεις από την κλάση [15,25).

Έστω  $[x, 25)$  η κλάση που περιέχει τις 90 παρατηρήσεις. Τότε έχουμε:

Στην κλάση [15,25) πλάτους  $c = 25 - 15$  αντιστοιχούν 240 παρατηρήσεις

Στην κλάση  $[x, 25)$  πλάτους  $c_1 = 25 - x$  αντιστοιχούν 90 παρατηρήσεις

$$\text{Άρα } \frac{25-15}{25-x} = \frac{240}{90} \Leftrightarrow \frac{10}{25-x} = \frac{24}{9} \Leftrightarrow 90 = 24(25-x) \Leftrightarrow 90 = 600 - 24x \Leftrightarrow 24x = 600 - 90 \Leftrightarrow x = \frac{510}{24} = 21,25$$

Άρα θα πάρουμε από την παρατήρηση με τιμή 21,25 και πάνω άρα αυτή είναι η μικρότερη τιμή.

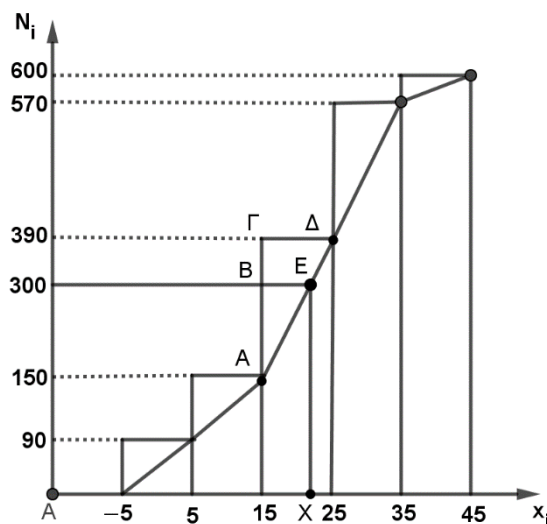
2<sup>ος</sup> τρόπος

Στο ιστόγραμμα και πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων, ορίζω στον κατακόρυφο άξονα την τιμή 300, φέρνω την παράλληλη στον οριζόντιο άξονα, συναντά το πολύγωνο στο σημείο E, από εκεί φέρνω κάθετη στον οριζόντιο που τον συναντά στο σημείο X. Τα τρίγωνα ABE και AΓΔ είναι όμοια

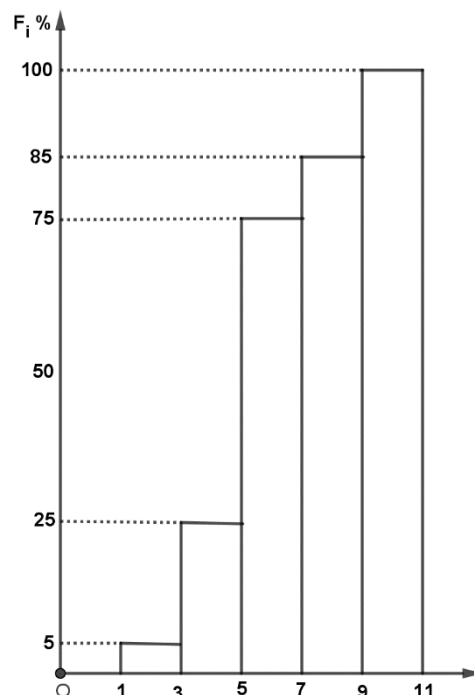
$$\text{άρα ισχύει: } \frac{AB}{AE} = \frac{BE}{ED} \Leftrightarrow \frac{300-150}{390-150} = \frac{x-15}{25-15} \Leftrightarrow \frac{150}{240} = \frac{x-15}{10} \Leftrightarrow \frac{15}{24} = \frac{x-15}{10} \Leftrightarrow 15 \cdot 10 = 24(x-15) \Leftrightarrow 150 = 24 \cdot x - 360 \Leftrightarrow$$

$$150 + 360 = 24 \cdot x \Leftrightarrow 510 = 24 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{510}{24} = 21,25$$

| κλάσεις   | $x_i$ | $v_i$ | $f_i$ | $f_i\%$ |                    |
|-----------|-------|-------|-------|---------|--------------------|
| $[-5,5)$  | 0     | 90    | 0,15  | 15      | $E_1=0,15 \cdot 1$ |
| $[5,15)$  | 10    | 60    | 0,10  | 10      | $E_2=0,10 \cdot 1$ |
| $[15,25)$ | 20    | 240   | 0,40  | 40      | $E_3=0,40 \cdot 1$ |
| $[25,35)$ | 30    | 180   | 0,30  | 30      | $E_4=0,30 \cdot 1$ |
| $[35,45)$ | 40    | 30    | 0,05  | 5       | $E_5=0,05 \cdot 1$ |
| Σύνολο    |       | 600   | 1     | 100     |                    |



4) Οι μαθητές ενός σχολείου συγκέντρωσαν χρήματα (σε ευρώ) για φιλανθρωπικό σκοπό προσφέροντας ο καθένας κάποιο ποσό. Τα ποσά που προσφέρθηκαν ομαδοποιήθηκαν σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους. Παρακάτω δίνεται το ιστόγραμμα των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων (επί τοις εκατό)  $F_i\%$ . Αν από 3 ως 5 ευρώ έδωσαν 28 μαθητές.



α) Να βρείτε πόσοι ήταν οι μαθητές του σχολείου.

β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων.

γ) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έδωσε από 3 ως 8 €

δ) Η διεύθυνση του σχολείου αποφάσισε να δώσει έπαινο στο 10% των μαθητών που έδωσαν το μεγαλύτερο ποσό. Να βρείτε ποιο ποσό πρέπει να έχει δώσει, τουλάχιστον, ένας μαθητής, ώστε να λάβει έπαινο.

ε) Η διεύθυνση του σχολείου αποφάσισε να δώσει επίσης τιμητική συμμετοχή στο 20% των μαθητών που έδωσαν το μικρότερο ποσό. Να βρείτε ποιο ποσό πρέπει να έχει δώσει, το πολύ, ένας μαθητής, ώστε να λάβει αυτή την τιμητική συμμετοχή.

#### 4) ΛΥΣΗ

α) Μας δόθηκε ότι στην κλάση [3,5) ανήκουν 28 μαθητές δηλαδή  $v_2=28$ . Από το ιστόγραμμα έχουμε  $F_2\%=25\%$ ,  $F_1\%=5\%$  άρα  $f_2\%=F_2\%-F_1\%=25\%-5\%=20\%$  άρα  $f_2=0,2$  ισχύει:  $f_2=\frac{v_2}{v} \Leftrightarrow v=\frac{v_2}{f_2} \Leftrightarrow v=\frac{28}{0,2}=140$

β) Ισχύουν:  $F_1\%=5\%=f_1\%$  άρα  $f_1=0,05$ ,  $f_3\%=F_3\%-F_2\%=75\%-25\%=50\%$  άρα  $f_3=0,5$ ,  $f_4\%=F_4\%-F_3\%=85\%-75\%=10\%$ , άρα  $f_4=0,1$ ,  $f_5\%=F_5\%-F_4\%=100\%-85\%=15\%$ , άρα  $f_5=0,15$  και οι συχνότητες είναι:  $v_1=v \cdot f_1=140 \cdot 0,05=7$ ,  $v_2=28$ ,  $v_3=v \cdot f_3=140 \cdot 0,5=70$ ,  $v_4=v \cdot f_4=140 \cdot 0,1=14$ ,  $v_5=v \cdot f_5=140 \cdot 0,15=21$

| κλάσεις | $X_i$ | $v_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $f_i\%$ | $F_i$ | $F_i\%$ |
|---------|-------|-------|-------|-------|---------|-------|---------|
| [1,3)   | 2     | 7     | 0,05  | 7     | 5       | 0,05  | 5       |
| [3,5)   | 4     | 28    | 0,2   | 35    | 20      | 0,25  | 25      |
| [5,7)   | 6     | 70    | 0,5   | 105   | 50      | 0,75  | 75      |
| [7,9)   | 8     | 14    | 0,1   | 119   | 10      | 0,85  | 85      |
| [9,11)  | 10    | 21    | 0,15  | 140   | 15      | 1     | 100     |
| Σύνολα  |       | 140   | 1     |       | 100     |       |         |

γ) Το ποσοστό των μαθητών που έδωσε από 3 ως 8 ευρώ είναι τα ποσοστά των κλάσεων [3,5) και [5,7) και [7,8) με  $f_2\%=20$ ,  $f_3\%=50$ ,  $\frac{f_4\%}{2}=\frac{10}{2}=5$  άρα  $f_2\%+f_3\%+\frac{f_4\%}{2}=20\%+50\%+5\%=75\%$

δ) Το 10% των μαθητών είναι  $10\% \cdot 140 = \frac{10}{100} \cdot 140 = 14$  μαθητές. Η κλάση των μαθητών που έδωσαν τα περισσότερα χρήματα [9,11) έχει 21 μαθητές άρα οι 14 μαθητές θα ανήκουν σε υποθετική κλάση  $[x,11)$ , μέρος της κλάσης [9,11) οπότε έχουμε:

$$\frac{11-9}{11-x} = \frac{21}{14} \Leftrightarrow \frac{2}{11-x} = \frac{21}{14} \Leftrightarrow 2 \cdot 14 = 21 \cdot (11-x) \Leftrightarrow 2 \cdot 14 = 21 \cdot (11-x) \Leftrightarrow 28 = 231 - 21x \Leftrightarrow 21x = 231 - 28 \Leftrightarrow 21x = 203 \Leftrightarrow x = \frac{203}{21} = 9,66 \text{ Έδωσαν τουλάχιστον 9,66 ευρώ}$$

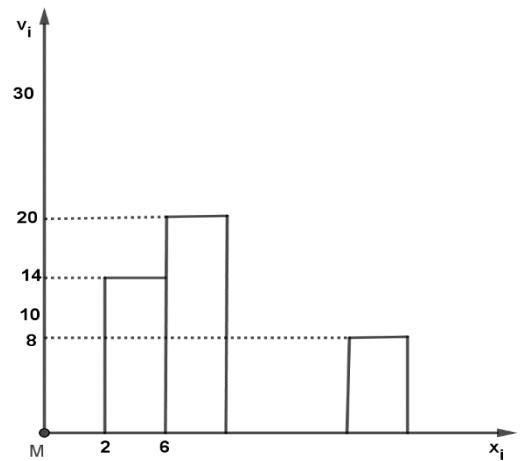
ε) Το 20% των μαθητών είναι  $20\% \cdot 140 = \frac{20}{100} \cdot 140 = 28$  Η πρώτη κλάση [1,3) έχει 7 μαθητές και απαιτείται να πάρουμε άλλους 21 μαθητές από υποθετική κλάση [3,x) μέρος της δεύτερης κλάσης [3,5) μέχρι να συμπληρώσουμε τους 28.

$$\frac{5-3}{x-3} = \frac{28}{21} \Leftrightarrow \frac{2}{x-3} = \frac{28}{21} \Leftrightarrow 2 \cdot 21 = 28 \cdot (x-3) \Leftrightarrow 42 = 28 \cdot (x-3) \Leftrightarrow 28x = 84 + 42 \Leftrightarrow 28x = 126 \Leftrightarrow x = \frac{126}{28} = 4,5 \text{ Έδωσαν το πολύ 4,5 ευρώ}$$

5) Παρακάτω δίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων των ομαδοποιημένων παρατηρήσεων μιας μεταβλητής  $X$ .

Αν η συχνότητα της 3<sup>ης</sup> κλάσης είναι πενταπλάσια από τη συχνότητα της 4<sup>ης</sup> κλάσης και το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι 78, τότε:

- Να βρείτε τις κλάσεις.
- Να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων.
- Να συμπληρώσετε το παραπάνω ιστόγραμμα συχνοτήτων.
- Να βρείτε πόσες παρατηρήσεις έχουν τιμή τουλάχιστον 8.



## 5) ΛΥΣΗ

Δίνεται ότι  $v_3 = 5v_5$

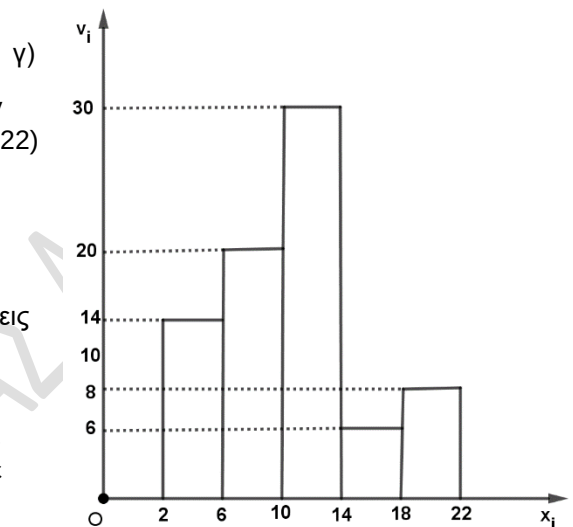
α) Η πρώτη κλάση είναι  $[2,6)$  συνεπώς το πλάτος είναι η διαφορά των άκρων της,  $6-2=4$  και οι κλάσεις είναι:  $[2,6), [6,10), [10,14), [14,18), [18,22)$

β) Επειδή το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ του πολυγώνου συχνοτήτων και του οριζόντιου άξονα είναι ίσο με το μέγεθος  $n$  του δείγματος, το πλήθος των παρατηρήσεων είναι  $n = 78$

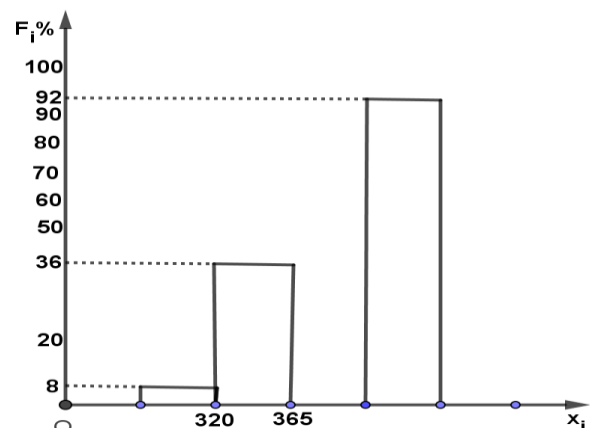
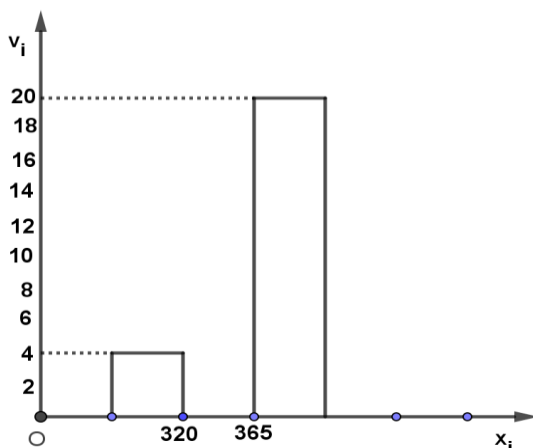
δ) Οι παρατηρήσεις που έχουν τιμή τουλάχιστον 8 ανήκουν στις κλάσεις  $[8,10), [10,14), [14,18), [18,22)$  με αντίστοιχες συχνότητες  $v'_2, v_3 = 30, v_4 = 6, v_5 = 8$

Επειδή το 8 είναι κεντρική τιμή της κλάσης και οι παρατηρήσεις θεωρείται ότι είναι ομοιόμορφα κατανομημένες, η κλάση μοιράζεται σε δύο κλάσεις που λόγω της ομοιόμορφης κατανομής των παρατηρήσεων, η κάθε μία περιέχει τις μισές παρατηρήσεις άρα

$$v'_2 = \frac{20}{2} = 10 \text{ οπότε: } v'_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 10 + 30 + 6 + 8 = 54$$



6) Δίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων καθώς και το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων (επί τοις %) που παριστάνουν τον χρόνο (σε δευτερόλεπτα) που απαιτήθηκε από 50 διαφορετικούς υπολογιστές μιας επιχείρησης, για να κάνουν λήψη ενός αρχείου, μεγέθους 300 MB, από το διαδίκτυο.



α) Να βρείτε τις κλάσεις β) Να συμπληρώσετε τα παραπάνω ιστογράμματα.

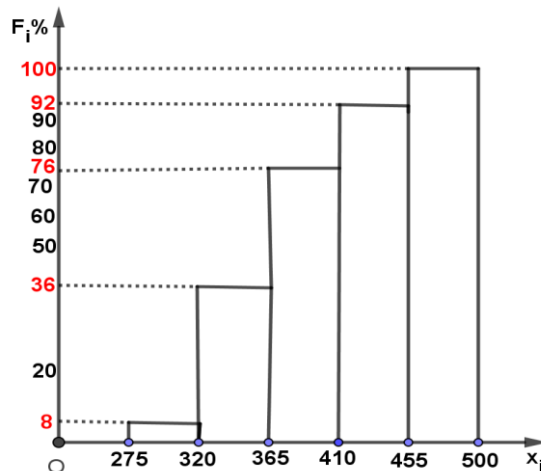
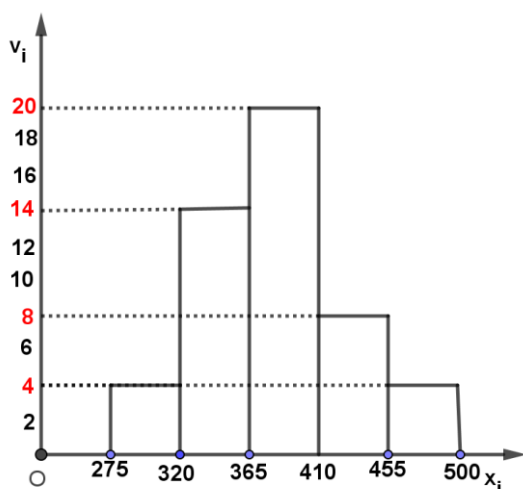
γ) Να βρείτε πόσοι υπολογιστές έκαναν λήψη του αρχείου σε λιγότερο από 387,5 δευτερόλεπτα.

δ) Η επιχείρηση θα προχωρήσει σε αναβάθμιση του 20% των γραμμών του δικτύου με τη χαμηλότερη ταχύτητα. Να βρείτε την ταχύτητα λήψης που πρέπει να έχει ένας υπολογιστής, ώστε να μη γίνει αναβάθμιση της γραμμής.

## 6) ΛΥΣΗ

α) Το πλάτος είναι  $c = 365 - 320 = 45$  και το αριστερό άκρο της πρώτης κλάσης είναι  $320 - 45 = 275$  και οι κλάσεις είναι:  $[275, 320)$ ,  $[320, 365)$ ,  $[365, 410)$ ,  $[410, 455)$ ,  $[455, 500)$ . Από άσκηση και τα ιστογράμματα έχουμε τα παρακάτω δεδομένα:  $v = 50$ ,  $v_1 = 4$ ,  $v_3 = 20$ ,  $F_1\% = 8$ ,  $F_2\% = 36$ ,  $F_4\% = 92$  και με τη χρήση τους υπολογίζουμε τα υπόλοιπα όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| κλάσεις      | $\chi_i$ | $v_i$                              | $f_i$                                       | $f_i\%$                              | $F_i\%$                  |
|--------------|----------|------------------------------------|---------------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------|
| $[275, 320)$ | 297,5    | $v_1 = 4$                          | 0,8                                         | <b>8</b>                             | $F_1\% = 8 = f_1\%$      |
| $[320, 365)$ | 342,5    | $v_2 = v f_4 = 50 \cdot 0,28 = 14$ | 0,28                                        | $f_2\% = F_2\% - F_1 = 36 - 8 = 28$  | $F_2\% = 36$             |
| $[365, 410)$ | 387,5    | $v_3 = 20$                         | $f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{20}{50} = 0,4$ | <b>40</b>                            | $F_3 = 8 + 28 + 40 = 76$ |
| $[410, 455)$ | 432,5    | $v_4 = v f_4 = 50 \cdot 0,1 = 8$   | 0,16                                        | $f_4\% = F_4\% - F_3 = 92 - 76 = 16$ | $F_4\% = 92$             |
| $[455, 500)$ | 477,5    | $v_5 = 50 - 4 - 14 - 20 - 8 = 4$   | $f_5 = \frac{v_5}{v} = \frac{4}{50} = 0,08$ | <b>8</b>                             | <b>100</b>               |
| Σύνολα       |          | $v = 50$                           |                                             | 100                                  |                          |



γ) 387,5 είναι η κεντρική τιμή της δεύτερης κλάσης και λόγω της ομοιόμορφης κατανομής των παρατηρήσεων η κλάση  $[365, 387,5)$  περιέχει  $v'_3 = \frac{v_3}{2} = \frac{20}{2} = 10$  άρα οι υπολογιστές που έκαναν λήψη αρχείου σε χρόνο λιγότερο από 387,5 είναι:  $v_1 + v_2 + v'_3 = 4 + 14 + 10 = 28$

δ) Οι γραμμές με τη χαμηλότερη ταχύτητα λήψης της πρώτης κλάσης έχουν ποσοστό 8% και για να συμπληρώσουμε το ποσοστό του 20% θα πάρουμε ποσοστό 12% από την δεύτερη κλάση και έστω  $[320, x)$  το μέρος της δεύτερης κλάσης που περιέχει ποσοστό 12%. Θα υπολογίσουμε το  $x$

$$\frac{365-320}{x-320} = \frac{f_2\%}{f'_2\%} \Leftrightarrow \frac{45}{x-320} = \frac{28}{12} \Leftrightarrow 45 \cdot 12 = 28(x-320) \Leftrightarrow 540 = 28x - 8960 \Leftrightarrow 540 + 8960 = 28x \Leftrightarrow x = \frac{9500}{28} = 339,285 = 339,29$$

Άρα για να μη γίνει αναβάθμιση γραμμής, η ταχύτητα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από 339,29 δευτερόλεπτα

7) Ρωτήσαμε 50 μαθητές για το χρόνο(σε λεπτά) επίλυσης ενός προβλήματος στατιστικής. Οι απαντήσεις δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| χρόνος  | Πλήθος μαθ. $n_i$ |
|---------|-------------------|
| [0,4)   | 6                 |
| [4,8)   | 10                |
| [8,12)  | 14                |
| [12,16) | 8                 |
| [16,20) | 12                |
| Σύνολα  | $n = 50$          |

Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αιτιολογώντας κάθε φορά την απάντησή σας.

Α) Να βρείτε το **πλήθος** των μαθητών που χρειάστηκαν **τουλάχιστον 12** λεπτά, για να απαντήσουν στο πρόβλημα.

Β) Να βρείτε το **ποσοστό** των μαθητών που χρειάστηκαν **το πολύ 8 λεπτά**, για να απαντήσουν στο πρόβλημα.

Γ) Να βρείτε το **ποσοστό** των μαθητών που χρειάστηκαν **πάνω από 14** λεπτά, για να απαντήσουν στο πρόβλημα.

Δ) Να βρείτε το **πλήθος** των μαθητών που χρειάστηκαν **περισσότερο από 10** λεπτά **αλλά λιγότερο από 18**, για να απαντήσουν στο πρόβλημα.

Ε) Το **ποσοστό** των μαθητών που χρειάστηκαν από **3** έως **11** λεπτά .

### 7) ΛΥΣΗ

| Χρόνος  | Κεντρ. Τιμή $x_i$ τιμή | Πλήθος Μαθητών $n_i$     | $N_i$ | $f_i$    | $f_i \%$   | $F_i$ | $F_i \%$ |
|---------|------------------------|--------------------------|-------|----------|------------|-------|----------|
| [0,4)   | 2                      | 6                        | 6     | 0,12     | 12         | 0,12  | 12       |
| [4,8)   | 6                      | 10                       | 16    | 0,2      | 20         | 0,32  | 32       |
| [8,12)  | 10                     | 14                       | 30    | 0,28     | 28         | 0,6   | 60       |
| [12,16) | 14                     | 8                        | 38    | 0,16     | 16         | 0,76  | 76       |
| [16,20) | 18                     | 12                       | 50    | 0,24     | 24         | 1     | 100      |
| σύνολο  |                        | <b><math>n=50</math></b> |       | <b>1</b> | <b>100</b> |       |          |

Α) οι μαθητές που χρειάστηκαν τουλάχιστον 12 λεπτά (ισοδύναμες εκφράσεις: το λιγότερο 12 λεπτά ή πάνω από 12 λεπτά ) για να απαντήσουν στο πρόβλημα είναι όλοι όσοι βρίσκονται στις κλάσεις [12,16) και [16,20) άρα  $n_4 + n_5 = 8 + 12 = 20$  μαθητές

Β) το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν το πολύ 8 λεπτά ,είναι το άθροισμα των ποσοστών που βρίσκονται στις κλάσεις [0,4) και [4,8) άρα  $f_1\% + f_2\% = 12 + 20 = 32$  ή απευθείας από την αθροιστική εκατοστιαία σχετική συχνότητα  $F_i\% = 32$  (προσοχή: σχολίο: το γεγονός ότι το δεξί άκρο είναι ανοικτό δεν μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι θα περιλάβουμε τιμές από την

επόμενη κλάση που περιλαμβάνει το 8. Αυτό δέχονται οι συγγραφείς σχολικών βιβλίων που έχουν άσκηση με αυτό το ερώτημα π.χ. «Στατιστική επιχειρήσεων» του τομέα οικονομίας και διοίκησης. Εδώ είμαστε σε αντίφαση με την ερμηνεία που δώσαμε στις μη ομαδοποιημένες κατανομές και συγκεκριμένα στο γ) ερώτημα της άσκησης 4 σελ.79 το «έως 5» ερμηνεύτηκε « $x \leq 5$ » και αυτό έγινε επειδή αυτό δέχεται στις λύσεις το βιβλίο που είναι και ο οδηγός σε περίπτωση ασαφών ερωτήσεων στις εξετάσεις.)

Γ) Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό πρέπει να γνωρίζουμε τα παρακάτω: 1) Οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση θεωρείται ότι είναι **ομοιόμορφα κατανεμημένες** και **αντιπροσωπεύονται** πλήρως από την **κεντρική τιμή**. Οπότε η κεντρική τιμή χωρίζει την κλάση σε δύο υποκλάσεις (άλλοι γράφουν: <σε δύο υποθετικές κλάσεις>) που η κάθε μία **περιέχει τις μισές παρατηρήσεις** της κλάσης, άρα και το **μισό ποσοστό** της κλάσης. Στην κλάση [12,16) έχουμε συχνότητα  $n_4 = 8$ ,  $f_4 = \frac{8}{50} = \frac{16}{100} = 16\%$ . Το **14** είναι η **κεντρική τιμή** και συνεπώς οι κλάσεις [12,14) και [14,16) θα περιέχουν από 4 παρατηρήσεις ( $\frac{n_4}{2} = \frac{8}{2} = 4$ ) και η σχετική συχνότητα και κατ' επέκταση η εκατοστιαία σχετική συχνότητα θα είναι  $\frac{f_4\%}{2} = \frac{16\%}{2} = 8$  Επομένως το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν **πάνω από 14 λεπτά** για να απαντήσουν είναι:  $\frac{f_4\%}{2} + f_5\% = 8 + 24 = 32$

Δ) Με βάση τα παραπάνω το πλήθος των μαθητών που χρειάστηκαν από 10 ως 18 λεπτά είναι:  $\frac{n_3}{2} + n_4 + \frac{n_5}{2} = 7 + 8 + 6 = 21$  (10 κεντρική τιμή τρίτης κλάσης και 18 κεντρική τιμή πέμπτης κλάσης)

Ε) Στην περίπτωση που, όπως εδώ, το 3 και το 4 **δεν είναι ούτε άκρο κλάσης, ούτε κεντρική τιμή**,

Έχουμε υπόψη μας τα παρακάτω: **Η ομοιόμορφη κατανομή** (ομοιόμορφο μοίρασμα) των παρατηρήσεων στις κλάσεις μας επιτρέπει να χωρίζουμε τις κλάσεις σε μικρότερες χρησιμοποιώντας την απλή μέθοδο των τριών :

**Σε κλάση πλάτους  $c$  έχουμε  $v_i$  παρατηρήσεις και ποσοστό  $f_i\%$**

**Σε κλάσεις νέου πλάτους  $k$  έχουμε  $v'_i$ ; παρατηρήσεις και ποσοστό  $f'_i\%$ ;**

Άρα  $\frac{c}{k} = \frac{v_i}{v'_i} \Leftrightarrow v'_i = \frac{k}{c} v_i$  και  $\frac{c}{k} = \frac{f_i\%}{f'_i\%} \Leftrightarrow f'_i\% = \frac{k}{c} f_i\%$  δηλαδή πολλαπλασιάζουμε την αντίστοιχη συχνότητα ή τη σχετική συχνότητα με το λόγο  $\frac{k}{c} = \frac{(\text{νέο πλάτος})}{(\text{πλάτος κλάσης})}$

Φτιάχνουμε τα διαστήματα που αρχίζουν από το 3 και τελειώνουν στο 11 και ενδιάμεσα παρεμβάλουμε τα άκρα των κλάσεων που υπάρχουν στον αρχικό πίνακα.

**1° διάστημα :** [3,4) έχει πλάτος  $k_1 = 4-3=1$  Άρα  $\frac{k_1}{c} = \frac{1}{4}$  οπότε στο διάστημα αυτό βρίσκεται το  $\frac{1}{4}$  των παρατηρήσεων που υπάρχουν στην κλάση [0,4) δηλαδή  $v'_1 = \frac{1}{4} v_1 = \frac{1}{4} 6 = \frac{6}{4}$  και το  $\frac{1}{4}$  του ποσοστού της κλάσης  $f'_1\% = \frac{1}{4} f_1\% = \frac{12}{4} = 3$  (Χρησιμοποίησα την αναλογία επειδή περιγράφω ποιο πάνω πώς βρίσκεται. Όταν απαντάμε στις εξετάσεις σε ένα τέτοιο ερώτημα θα πρέπει να το γράφουμε αναλυτικά ,αφού στο βιβλίο δεν περιγράφεται ως θεωρία με μορφή τύπου.) Έτσι θα γράφουμε:

Στην κλάση [0,4) που έχει πλάτος  $c=4$  (4-0) αντιστοιχεί συχνότητα  $v_1 = 6$

Στην κλάση [3,4) που έχει πλάτος  $k_1=1$  (4-3) αντιστοιχεί συχνότητα  $v'_1 =$ ;

τα ποσά είναι ανάλογα οπότε ισχύει:  $\frac{4}{1} = \frac{6}{v'_1}$  Αν δεν θέλετε αυτή την κατάστρωση περιγράψτε, τι παίρνετε, στην ισότητα της αναλογίας δηλαδή:  $\frac{4-0}{4-3} = \frac{v_1}{v'_1}$

Τα ίδια και για την εκατοστιαία σχετική ποσότητα όταν ζητείται ποσοστό.)

**2° διάστημα:** [4,8) είναι η δεύτερη κλάση άρα  $v_2 = 10$  και  $f_2\% = 20$

**3° διάστημα:** [8,11) έχει πλάτος  $k_2 = 11-8=3$  Άρα  $\frac{k_2}{c} = \frac{3}{4}$  οπότε στο διάστημα αυτό βρίσκεται το  $\frac{3}{4}$  των παρατηρήσεων που υπάρχουν στην κλάση [8,11) δηλαδή  $v'_3 = \frac{3}{4} v_3 = \frac{3}{4} 14 = \frac{42}{4}$  και το  $\frac{3}{4}$  του ποσοστού της κλάσης  $f'_3\% = \frac{3}{4} f_3\% = \frac{28 \cdot 3}{4} = \frac{84}{4} = 21$

Συνεπώς το πλήθος των μαθητών που χρειάστηκαν από 3 ως 11 λεπτά είναι:  $\frac{6}{4} + 10 + \frac{42}{4} = \frac{88}{4} = 22$  και το ποσοστό είναι  $3 + 20 + 21 = 44\%$  Αν δεν θέλουμε να προσθέσουμε κλάσματα βρίσκουμε το πλήθος από το ποσοστό :  $44\% \cdot 50 = \frac{44}{100} \cdot 50 = \frac{44}{2} = 22$

**8)** Δύο μαθητές κατέγραψαν τον αριθμό των λεπτών που διαρκεί κάθε τηλεφωνική τους συνομιλία, για 50 συνεχόμενες κλήσεις ,όπως αναγράφεται στον παρακάτω πίνακα.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 23 | 40 | 21 | 31 | 18 | 23 | 28 | 34 | 19 | 30 |
| 29 | 20 | 32 | 20 | 33 | 31 | 21 | 26 | 23 | 12 |
| 18 | 30 | 16 | 39 | 22 | 12 | 42 | 18 | 37 | 23 |
| 35 | 26 | 31 | 20 | 28 | 33 | 19 | 24 | 30 | 36 |
| 25 | 15 | 17 | 27 | 17 | 29 | 25 | 27 | 15 | 19 |

Α) Να βρείτε το εύρος των παρατηρήσεων. Β) Να ομαδοποιήσετε τις παρατηρήσεις σε 6 κλάσεις. Γ) Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων. Δ) Με τη βοήθεια του πίνακα του ερωτήματος Γ) να βρείτε

πόσες κλήσεις είχαν διάρκεια **τουλάχιστον 16** λεπτά και **το πολύ 32** λεπτά. Ε) Με τη βοήθεια του ίδιου πίνακα να βρείτε **το ποσοστό** των κλήσεων που είχαν διάρκεια **τουλάχιστον 13** λεπτά και **το πολύ 25** λεπτά.

## 8)ΛΥΣΗ

Για να βρούμε το πλάτος των κλάσεων βρίσκουμε το εύρος R και το διαιρούμε με τον αριθμό κ των κλάσεων. Μεγαλύτερη παρατήρηση το 42 και μικρότερη το 12 άρα εύρος  $R=42-12=30$  οπότε  $c = \frac{R}{κ} = \frac{30}{6} = 5$

Αρχίζουμε με κάτω όριο την μικρότερη παρατήρηση και προσθέτοντας το πλάτος βρίσκουμε το άνω όριο της πρώτης κλάσης . Δημιουργούμε και τις υπόλοιπες και επειδή **ο αριθμός των κλάσεων είναι δεδομένος από την άσκηση ,στην τελευταία κλάση παίρνουμε το άνω όριο με μορφή κλειστού διαστήματος** ώστε να συμπεριλάβουμε και την τιμή 42

| Διαλογή | κλάσεις | Κεντ.τιμή<br>$\chi_i$ | Συχν.<br>$\nu_i$ | Σχ.Συχ.<br>$f_i$ | Εκ.Σχ.Σ<br>$f_i\%$ | Αθρ.Συχ.<br>$N_i$ | Αθρ.Σχ.Συχ.<br>$F_i$ | Ε.Α.ΣχΣ<br>$F_i\%$ |
|---------|---------|-----------------------|------------------|------------------|--------------------|-------------------|----------------------|--------------------|
|         | [12-17) | 14,5                  | 5                | 0,10             | 10                 | 5                 | 0,10                 | 10                 |
|         | [17-22) | 19,5                  | 13               | 0,26             | 26                 | 18                | 0,36                 | 36                 |
|         | [22-27) | 24,5                  | 11               | 0,22             | 22                 | 29                | 0,58                 | 58                 |
|         | [27-32) | 29,5                  | 11               | 0,22             | 22                 | 40                | 0,80                 | 80                 |
|         | [32-37) | 34,5                  | 6                | 0,12             | 12                 | 46                | 0,92                 | 92                 |
|         | [37-42] | 39,5                  | 4                | 0,08             | 8                  | 50                | 1                    | 100                |
| Σύνολα  |         |                       | $\nu=50$         | 1,00             | 100                |                   |                      |                    |

α) Το 16 ανήκει στην πρώτη κλάση και η έκφραση «τουλάχιστον 16 και το πολύ 32» σημαίνει ότι θα πάρουμε τις κλήσεις που ανήκουν στην υποκλάση [16-17) ( και για αυτό πρέπει να υπολογίσουμε τη συχνότητα  $\nu'_1$  της κλάσης [16-17) και τις συχνότητες των κλάσεων [17-22) , [22-27) και [27-32)

Σε πλάτος 5 (=17-12) αντιστοιχεί συχνότητα  $\nu_1 = 5$

Σε πλάτος 1 (=17-16) αντιστοιχεί συχνότητα  $\nu'_1 =$ ; Τα ποσά είναι ανάλογα συνεπώς ισχύει:

$$\frac{17-12}{17-16} = \frac{\nu_1}{\nu'_1} \text{ ή } \frac{5}{1} = \frac{5}{\nu'_1} \Leftrightarrow 5 \cdot \nu'_1 = 5 \cdot 1 \Leftrightarrow \nu'_1 = \frac{5}{5} = 1 \text{ οπότε έχουμε : } \nu'_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 1 + 13 + 11 + 11 = 36$$

{αν ζητούσε και το ποσοστό:  $\frac{36}{50} = 0,72 = \frac{72}{100} = 72\%$  }

Β) «τουλάχιστον 13 και το πολύ 25» Το 13 ανήκει στην πρώτη κλάση και πρέπει να υπολογίσουμε το ποσοστό της κλάσης [13-17) ,ενώ το 25 ανήκει στην τρίτη κλάση και πρέπει να υπολογίσουμε το ποσοστό της κλάσης [22-25) Το αποτέλεσμα θα προκύψει αν αθροίσουμε τα ποσοστά των κλάσεων [13-17) , [17-22) , [22-25)

Σε πλάτος 5 (=17-12) αντιστοιχεί εκατοστιαία σχετική συχνότητα  $f_1\% = 10$

Σε πλάτος 4 (=17-13) αντιστοιχεί εκατοστιαία σχετική συχνότητα  $f'_1\% =$ ;

Τα ποσά είναι ανάλογα συνεπώς ισχύει:

$$\frac{17-12}{17-13} = \frac{f_1\%}{f'_1\%} \text{ ή } \frac{5}{4} = \frac{10}{f'_1\%} \Leftrightarrow 5 \cdot f'_1\% = 4 \cdot 10 \Leftrightarrow f'_1\% = \frac{40}{5} = 8\% \text{ για την υποκλάση [22-25)}$$

$$\frac{27-22}{25-22} = \frac{f_3\%}{f'_3\%} \text{ ή } \frac{5}{3} = \frac{22}{f'_3\%} \Leftrightarrow 5 \cdot f'_3\% = 3 \cdot 22 \Leftrightarrow f'_3\% = \frac{66}{5} = 13,2\% \text{ Το ζητούμενο ποσοστό είναι : } f'_1\% + f_2\% + f'_3\% = 8 + 26 + 13,2 = 47,2$$

////////////////////////////////////

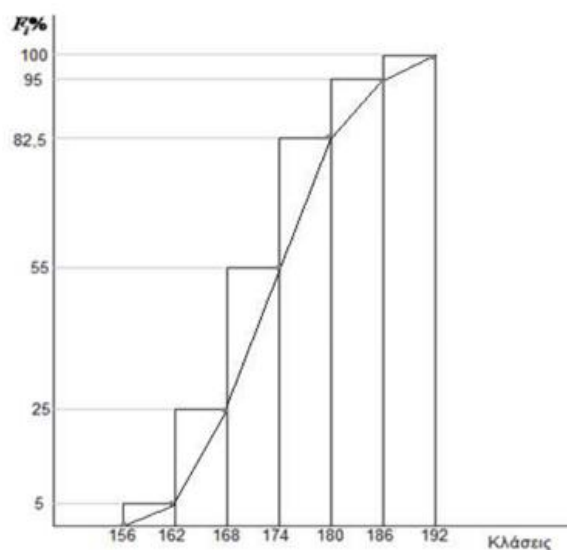
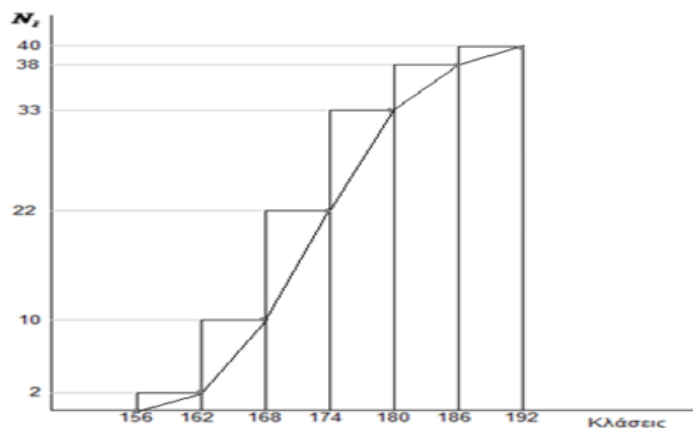
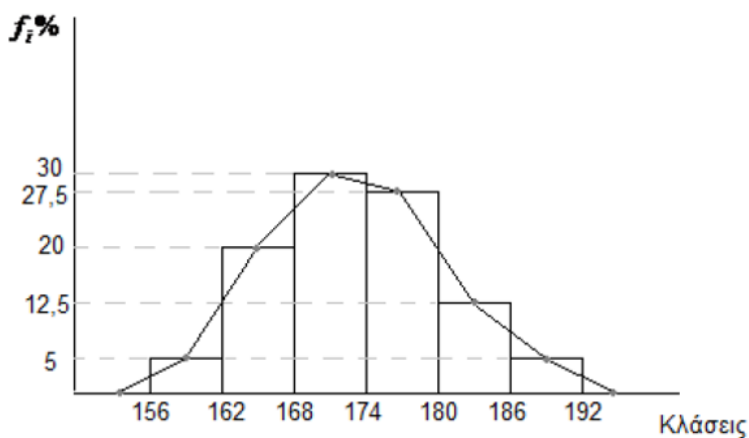


9) Για τα δεδομένα του πίνακα 9 σελίδα 73 του σχολικού βιβλίου που είναι ο παρακάτω:

| Κλάσεις<br>[...,...) | Κεντρικές<br>τιμές $x_i$ | Διαλογή       | Συχν.<br>$\nu_i$ | Σχετ.<br>Συχν.<br>$f_i$ | Σχετ.<br>Συχν.<br>$f_i\%$ | Αθρ.<br>Συχν.<br>$N_i$ | Αθρ.<br>Συχν.<br>$F_i\%$ |
|----------------------|--------------------------|---------------|------------------|-------------------------|---------------------------|------------------------|--------------------------|
| [156-162)            | 159                      | II            | 2                | 0,05                    | 5                         | 2                      | 5                        |
| [162-168)            | 165                      | IIII III      | 8                | 0,20                    | 20                        | 10                     | 25                       |
| [168-174)            | 171                      | IIII IIIII II | 12               | 0,30                    | 30                        | 22                     | 55                       |
| [174-180)            | 177                      | IIII IIIII I  | 11               | 0,275                   | 27,5                      | 33                     | 82,5                     |
| [180-186)            | 183                      | IIII          | 5                | 0,125                   | 12,5                      | 38                     | 95                       |
| [186-192)            | 189                      | II            | 2                | 0,05                    | 5                         | 40                     | 100                      |
|                      | Σύνολο                   |               | 40               | 1,00                    | 100                       |                        |                          |

- 1) Να κατασκευάσετε ιστόγραμμα και πολύγωνο εκατοστιαίων σχετικών συχνοτήτων.
- 2) Να κατασκευάσετε ιστόγραμμα και πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.
- 3) Να κατασκευάσετε ιστόγραμμα και πολύγωνο εκατοστιαίων σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.
- 4) Να βρείτε το πλήθος των μαθητών που έχουν ύψος κάτω από 172 cm
- 5) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχουν ύψος μεγαλύτερο ή ίσο από 182 cm
- 6) Αν στην πρώτη γραμμή της παρέλασης συμμετέχει το 10% των πιο ψηλών μαθητών, να βρείτε τι ύψος πρέπει να έχει ένας μαθητής για να βρίσκεται στην πρώτη γραμμή.

## 9) ΛΥΣΗ



- 4) Οι μαθητές που έχουν ύψος μικρότερο από 172 είναι αυτοί που ανήκουν στις κλάσεις



[156-162], [162-168] και στην υποκλάση [168-172] που είναι μέρος της κλάσης [168-174] και για την οποία πρέπει να υπολογίσουμε την συχνότητά της  $\nu'_3$  θεωρώντας πάντα ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανομημένες.

Σε πλάτος 6 (=174-168) αντιστοιχεί συχνότητα  $\nu_3 = 12$

Σε πλάτος 4 (=172-168) αντιστοιχεί συχνότητα  $\nu'_3 =$ ; άρα

$$\frac{6}{4} = \frac{12}{\nu'_3} \Leftrightarrow 6 \cdot \nu'_3 = 4 \cdot 12 \Leftrightarrow \nu'_3 = \frac{48}{6} = 8 \text{ συνεπώς: } \nu_1 + \nu_2 + \nu'_3 = 2+8+8=18$$

5) Το ποσοστό των μαθητών με ύψος μεγαλύτερο ή ίσο από 182 cm είναι το άθροισμα των ποσοστών των κλάσεων [182-186] που είναι μέρος της κλάσης 5<sup>ης</sup> κλάσης [180-186] και πρέπει να υπολογίσουμε το ποσοστό της  $f'_5\%$  και της 6<sup>ης</sup> [186-192]  $f_6\%$ .

Σε πλάτος 6 (=186-180) αντιστοιχεί ποσοστό %  $f_5\% = 12,5$

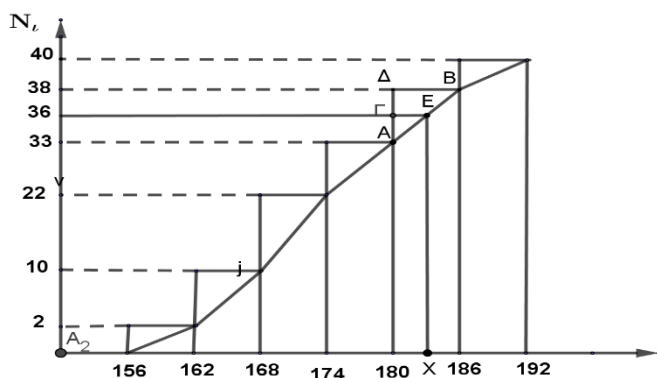
Σε πλάτος 4 (=186-182) αντιστοιχεί ποσοστό %  $f'_5\% =$ ;

$$\text{Άρα: } \frac{6}{4} = \frac{12,5}{f'_5\%} \Leftrightarrow 6 \cdot f'_5\% = 4 \cdot 12,5 \Leftrightarrow f'_5\% = 8,33 \text{ οπότε: } f'_5\% + f_6\% = 8,33+5=13,33\%$$

6) Στην 6<sup>η</sup> κλάση [186-192] ανήκει το 5% των μαθητών. Επειδή απαιτείται άλλο ένα 5% για να καλύψουμε το ζητούμενο ποσοστό 10% και η προηγούμενη κλάση [180-186] έχει ποσοστό 12,5% μας καλύπτει για το απαιτούμενο ποσοστό. Πρέπει να προσδιορίσουμε την κλάση  $[x-186]$  που έχει ποσοστό  $f'_5\% = 5\%$  άρα

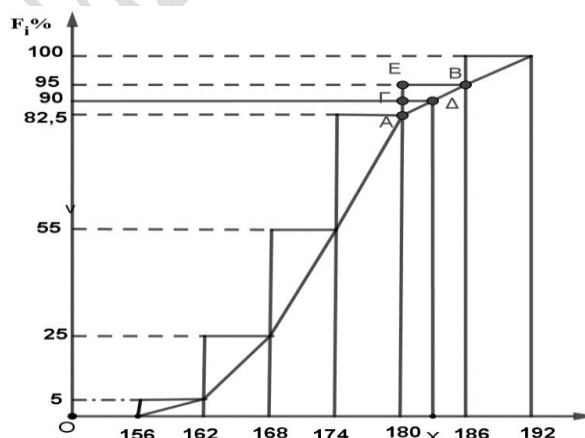
$$\frac{186-x}{186-180} = \frac{f'_5\%}{f_5\%} \Leftrightarrow \frac{186-x}{6} = \frac{5}{12,5} \Leftrightarrow 12,5(186-x) = 5 \cdot 6 \Leftrightarrow 2325 - 12,5x = 30 \Leftrightarrow -12,5x = -2325 \Leftrightarrow x=183,6 \text{ Άρα πρέπει ο μαθητής να έχει ύψος } 183,6 \text{ cm και πάνω για να είναι στην πρώτη γραμμή.}$$

Ιστογράμμο και πολ. Αθρ. Συχν.



Σχήμα 1

Ιστογράμμο και Πολ. Σχετικ. Αθρ. Συχν. επί %



Σχήμα 2

6) Αν στην πρώτη γραμμή της παρέλασης συμμετέχει το 10% των πιο ψηλών μαθητών, να βρείτε τι ύψος πρέπει να έχει ένας μαθητής για να βρίσκεται στην πρώτη γραμμή.

Άλλοι τρόποι για να απαντήσουμε σε αυτή την ερώτηση είναι χρησιμοποιώντας τα ιστογράμματα και πολύγωνα αθροιστικών συχνοτήτων και επί τοις % σχετικών σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.

**Σχήμα 1: Ιστογράμμο και πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων:** Αφού στην παρέλαση συμμετέχει το 10% των πιο ψηλών μαθητών, συμμετέχει το  $10\% \cdot 40 = \frac{10}{100} \cdot 40 = 4$  Άρα  $40 - 4 = 36$  (δεν συμμετέχουν). Στον κατακόρυφο άξονα του διαγράμματος τοποθετώ το 36 και από εκεί φέρνω παράλληλη στον οριζόντιο άξονα μέχρι να συναντήσει το πολύγωνο στο E. Από το σημείο E φέρνω κάθετη στον οριζόντιο άξονα που τον συναντά στο X.

Τα τρίγωνα AGE και ADB είναι όμοια γιατί είναι ορθογώνια και έχουν κοινή την οξεία γωνία  $\hat{A}$ . Στα όμοια τρίγωνα γνωρίζουμε ότι οι ομόλογες πλευρές (ομόλογες λέγονται αυτές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες των τριγώνων) είναι ανάλογες. (δεν ξεχνάμε ότι στον αριθμητή παίρνουμε πλευρές του ίδιου τριγώνου) δηλαδή ισχύει:  $\frac{(AG)}{(AD)} = \frac{(GE)}{(DB)}$  Όμως έχουμε:  $(AG)=36-33=3$ ,  $(AD)=38-33=5$ ,  $(GE)=X-180$ ,  $(DB)=186-180=6$  και αντικαθιστώντας

$$\frac{3}{5} = \frac{X-180}{6} \Leftrightarrow 3 \cdot 6 = 5 \cdot (X - 180) \Leftrightarrow 18 = 5X - 900 \Leftrightarrow 5X = 918 \Leftrightarrow X = \frac{918}{5} = \mathbf{183,6}$$

Ένας άλλος τρόπος ποιο γενικός, που επειδή έχετε μάθει να βρίσκετε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται σε ένα σημείο της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης, μπορεί αν θέλει κάποιος να τον εφαρμόσει, είναι ο εξής:

«Αφού έχω σκεφθεί όπως ποιο πάνω και έχω δημιουργήσει το σχήμα 1 σκέφτομαι ότι, το σημείο E(X,36) βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα AB που είναι μέρος μιας ευθείας. Αν γνωρίζω την εξίσωση της ευθείας τότε οι συντεταγμένες του σημείου E θα την επαλήθευαν ως γνωστόν.» Έστω  $\psi = \alpha x + \beta$  η εξίσωση της ευθείας που ανήκει το AB. «Γνωρίζω τις συντεταγμένες δυο σημείων της A(180,33) και B(186,38) άρα μπορώ να προσδιορίσω τα  $\alpha$  και  $\beta$ . Βάζω στην εξίσωση της ευθείας τις συντεταγμένες των σημείων A,B και προκύπτει σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τα  $\alpha$  και  $\beta$  το οποίο και λύνουμε.»

$$\begin{cases} 33 = 180\alpha + \beta \\ 38 = 186\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 33 = 180\alpha + \beta \\ 38 - 33 = 186\alpha + \beta - 180\alpha - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 33 = 180\alpha + \beta \\ 5 = 6\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 33 = 180\alpha + \beta \\ \alpha = \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 33 - 180 \cdot \frac{5}{6} = \beta \\ \alpha = \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 33 - 150 = \beta \\ \alpha = \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -117 \\ \alpha = \frac{5}{6} \end{cases} \quad \text{άρα η εξίσωση της ευθείας είναι :}$$

$\psi = \frac{5}{6}x - 117$  Το σημείο **E(X,36)** βρίσκεται πάνω σε αυτή, άρα επαληθεύει την εξίσωσή της, οπότε έχουμε :

$$36 = \frac{5}{6}x - 117 \Leftrightarrow 36 + 117 = \frac{5}{6}x \Leftrightarrow 153 = \frac{5}{6}x \Leftrightarrow x = \frac{153 \cdot 6}{5} = \frac{918}{5} = \mathbf{183,6}$$

## Σχήμα 2 : ιστόγραμμα και πολύγωνο εκατοστιαίων αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

Αφού στην πρώτη γραμμή συμμετέχει το 10% των μαθητών ,άρα συμμετέχει το πάνω από 100%-10%=90% Βρίσκω και σημειώνω στον άξονα του  $F_i\%$  το 90 και από το σημείο αυτό ,φέρνω παράλληλη στον οριζόντιο άξονα,( ή κάθετη στον κατακόρυφο) που συναντά το πολύγωνο στο σημείο Δ και από εκεί κάθετη στον οριζόντιο άξονα, που τον τέμνει (συναντά) στο σημείο X .

Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΕΒ είναι όμοια γιατί είναι ορθογώνια και έχουν κοινή την οξεία γωνία  $\hat{A}$  .Στα όμοια τρίγωνα γνωρίζουμε ότι οι ομόλογες πλευρές (αυτές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες των τριγώνων) είναι ανάλογες.(δεν ξεχνάμε ότι στον αριθμητή παίρνουμε πλευρές του ίδιου τριγώνου) δηλαδή ισχύει:  $\frac{(ΑΓ)}{(ΑΕ)} = \frac{(ΓΔ)}{(ΕΒ)}$  Όμως έχουμε:  $(ΑΓ)=90-82,5=7,5$  ,  $(ΑΕ)=95-82,5=12,5$  ,  $(ΓΔ)=X-180$  ,  $(ΕΒ)=186-180=6$  και αντικαθιστώντας

$$\frac{7,5}{12,5} = \frac{X-180}{6} \Leftrightarrow 7,5 \cdot 6 = 12,5 \cdot (X - 180) \Leftrightarrow 45 = 12,5X - 2250 \Leftrightarrow 12,5X = 2295 \Leftrightarrow X = \frac{2295}{12,5} = \mathbf{183,6}$$

Επίσης και εδώ μπορούμε να προσδιορίσουμε την εξίσωση της ευθείας που ανήκει το ευθύγραμμο τμήμα AB . Έστω  $\psi = \alpha x + \beta$  η εξίσωση της ευθείας που ανήκει το AB. Γνωρίζω τις συντεταγμένες δυο σημείων της A(180,82,5) και B(186,95) άρα μπορώ να προσδιορίσω τα  $\alpha$  και  $\beta$

$$\begin{cases} 82,5 = 180\alpha + \beta \\ 95 = 186\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 82,5 = 180\alpha + \beta \\ 95 - 82,5 = 186\alpha + \beta - 180\alpha - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 82,5 = 180\alpha + \beta \\ 12,5 = 6\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 82,5 = 180\alpha + \beta \\ \alpha = \frac{12,5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 82,5 - 180 \cdot \frac{12,5}{6} = \beta \\ \alpha = \frac{12,5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 82,5 - 375 = \beta \\ \alpha = \frac{12,5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -292,5 \\ \alpha = \frac{12,5}{6} \end{cases} \quad \text{άρα η εξίσωση της ευθείας είναι :}$$

$\psi = \frac{12,5}{6}x - 292,5$  Το σημείο **E(X,90)** βρίσκεται πάνω σε αυτή, άρα επαληθεύει την εξίσωσή της, οπότε έχουμε:  $90 = \frac{12,5}{6}x - 292,5 \Leftrightarrow 90 + 292,5 = \frac{12,5}{6}x \Leftrightarrow 382,5 = \frac{12,5}{6}x \Leftrightarrow x = \frac{382,5 \cdot 6}{12,5} = \frac{2295}{12,5} = \mathbf{183,6}$

## ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΠΙΝΑΚΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ-ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΜΕ ΕΛΛΙΠΗ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Σε ασκήσεις όπου δε δίνονται τα άκρα των κλάσεων για να τα υπολογίσουμε πρέπει να βρούμε το πλάτος  $c$  των κλάσεων.

Α) Τα διαδοχικά κέντρα των κλάσεων διαφέρουν κατά πλάτος  $c$  και μπορούμε να τα γράψουμε όπως στον πρώτο πίνακα ή όπως στον δεύτερο.

Β) Τα άκρα των κλάσεων διαφέρουν κατά πλάτος  $c$  οπότε μπορούμε να τα γράψουμε όπως στον δεύτερο πίνακα

| κλάσεις | Κεντρ. τιμές           |
|---------|------------------------|
| [ , )   | $\chi_1$               |
| [ , )   | $\chi_2 = \chi_1 + c$  |
| [ , )   | $\chi_3 = \chi_1 + 2c$ |
| [ , )   | $\chi_4 = \chi_1 + 3c$ |
| [ , )   | $\chi_5 = \chi_1 + 4c$ |
| σύνολο  |                        |

| κλάσεις                       | Κεντρ.τιμές                      |
|-------------------------------|----------------------------------|
| [ $\alpha$ , $\alpha+c$ )     | $\chi_1 = \alpha + \frac{c}{2}$  |
| [ $\alpha+c$ , $\alpha+2c$ )  | $\chi_2 = \alpha + \frac{3c}{2}$ |
| [ $\alpha+2c$ , $\alpha+3c$ ) | $\chi_3 = \alpha + \frac{5c}{2}$ |
| [ $\alpha+3c$ , $\alpha+4c$ ) | $\chi_4 = \alpha + \frac{7c}{2}$ |
| [ $\alpha+4c$ , $\alpha+5c$ ) | $\chi_5 = \alpha + \frac{9c}{2}$ |
| σύνολο                        |                                  |

Γ) Το κέντρο της κλάσης  $[\alpha, \beta)$  δίνεται από τον τύπο :  $\chi_i = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta+\alpha-\alpha}{2} = \frac{2\alpha+\beta-\alpha}{2} = \frac{2\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2} = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{2} = \alpha + \frac{c}{2}$  (αφού  $\beta-\alpha=c$ ) που συνδέει το κατώτερο όριο  $\alpha$  και το πλάτος  $c$

| κλάσεις                             | Κεντ τιμ  |
|-------------------------------------|-----------|
| [ $\alpha=0$ , $\alpha+c=4$ )       | <b>2</b>  |
| [ $\alpha+c=4$ , $\alpha+2c=8$ )    | <b>6</b>  |
| [ $\alpha+2c=8$ , $\alpha+3c=12$ )  | <b>10</b> |
| [ $\alpha+3c=12$ , $\alpha+4c=16$ ) | <b>14</b> |
| [ $\alpha+4c=16$ , $\alpha+5c=20$ ) | <b>18</b> |

**ΛΥΣΗ:** Με βάση τα παραπάνω η κεντρική τιμή της 2<sup>ης</sup> κλάσης θα είναι  $\chi_2 = \chi_1 + c = 6$  (1) και της  $\chi_5 = \chi_1 + 4c = 18$  (2) Λύνω το σύστημα.  $\chi_1 + c = 6 \Leftrightarrow \chi_1 = 6 - c$  το αντικαθιστώ στη δεύτερη οπότε έχουμε:

$$6 - c + 4c = 18 \Leftrightarrow -c + 4c = 18 - 6 \Leftrightarrow 3c = 12 \Leftrightarrow c = 4 \text{ οπότε } \chi_1 = \chi_2 - c = 6 - 4 = 2$$

$$\chi_3 = \chi_2 + c = 6 + 4 = 10 \quad \chi_4 = \chi_3 + c = 10 + 4 = 14$$

Για τα άκρα των κλάσεων: Έστω  $[\alpha, \beta)$  τα όρια της πρώτης κλάσης. Τότε

$$\text{ισχύει : } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha + \beta}{2} = \chi_1 \\ \beta - \alpha = c \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha + \beta}{2} = 2 \\ \beta - \alpha = 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 4 \\ \beta - \alpha = 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\beta = 8 \\ \beta - \alpha = 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta = 4 \\ \alpha = 0 \end{array} \right\}$$

Άλλος τρόπος:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha + c + \alpha + 2c}{2} = 6 \\ \frac{\alpha + 4c + \alpha + 5c}{2} = 18 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha + 3c = 12 \\ 2\alpha + 9c = 36 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha + 3c = 12 \\ 2\alpha + 9c - 2\alpha - 3c = 36 - 12 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha + 3c = 12 \\ 6c = 24 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha + 12 = 12 \Leftrightarrow \alpha = 0 \\ c = 4 \end{array} \right\}$$

Και οι κλάσεις είναι  $[0, 4)$ ,  $[4, 8)$ ,  $[8, 12)$ ,  $[12, 16)$ ,  $[16, 20)$ ,

2) Να υπολογισθούν τα άκρα των κλάσεων και οι κεντρικές τιμές που λείπουν στον παρακάτω πίνακα:

| κλάσεις  | Κεντρ. τιμές |
|----------|--------------|
| [10, 20) | 15           |
| [20, 30) | 25           |
| [30, 40) | 35           |
| [40, 50) | 45           |

**ΛΥΣΗ:** Με βάση το αρχικό πρότυπο γραφής των κλάσεων έχουμε: 1<sup>η</sup> κλάση  $[α, α+α]$ , 2<sup>η</sup>  $[α+α, α+2α]$ , 3<sup>η</sup>  $[α+2α, α+3α]$ , 4<sup>η</sup>  $[α+3α, α+4α]$ , άρα  $α+3α=40$  (1) Η κεντρική τιμή της 2<sup>η</sup> κλάσης είναι  $\frac{α+α+α+2α}{2} = 25 \Leftrightarrow 2α+3α=50$  (2) Με αφαίρεση κατά μέλη (2)-(1) έχουμε:

$$(2α+3α)-(α+3α)=50-40 \Leftrightarrow 2α+3α-α-3α=10 \Leftrightarrow α=10$$

$$\begin{cases} α+3α=40 \\ α=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10+3α=40 \\ α=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3α=40-10 \\ α=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3α=30 \\ α=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} α=10 \\ α=10 \end{cases} \text{ οπότε οι κλάσεις είναι}$$

1<sup>η</sup> κλάση [10, 20), 2<sup>η</sup> [20, 30), 3<sup>η</sup> [30, 40), 4<sup>η</sup> [40, 50) και οι κεντρικές τιμές  $\frac{10+20}{2}=15$ ,  $15+10=25$ ,  $25+10=35$ ,  $35+10=45$

3) Να υπολογισθούν τα άκρα των κλάσεων και οι κεντρικές τιμές που λείπουν στον παρακάτω πίνακα:

| κλάσεις            | Κ.τ  |
|--------------------|------|
| [α=0, α+α=5)       | 2,5  |
| [α+α=5, α+2α=10)   | 7,5  |
| [α+2α=10, α+3α=15) | 12,5 |
| [α+3α=15, α+4α=20) | 17,5 |

**ΛΥΣΗ:** Με βάση το αρχικό πρότυπο γραφής των κλάσεων έχουμε: 1<sup>η</sup> κλάση  $[α, α+α]$ , 2<sup>η</sup>  $[α+α, α+2α]$ , 3<sup>η</sup>  $[α+2α, α+3α]$ , 4<sup>η</sup>  $[α+3α, α+4α]$ , άρα  $α+2α=10$  και  $α+4α=20$  Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} α+2α=10 \\ α+4α=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (α+4α)-(α+2α)=40-20 \\ α+4α=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2α=10 \\ α+4α=20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} α=5 \\ α+20=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} α=5 \\ α=0 \end{cases}$$

και οι κλάσεις είναι 1<sup>η</sup> κλάση [0, 5), 2<sup>η</sup> 5, 10), 3<sup>η</sup> [10, 15), 4<sup>η</sup> [15, 20) οι δε κεντρικές τιμές είναι: 2,5 - 7,5 - 12,5 - 17,5

1).....2).....3)

|             |          |
|-------------|----------|
| κλάσεις     | $\chi_i$ |
| [ 10, ... ) |          |
| [ ..., ...) |          |
| [ ..., ...) |          |
| [ ..., ...) | 24       |
| [ ..., ...) |          |

|           |          |
|-----------|----------|
| κλάσεις   | $\chi_i$ |
| [...,15)  |          |
| [...,...) |          |
| [...,...) |          |
| [...,...) |          |
| [36,...)  |          |

4) ,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,5) ,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,6) ,,,,,,,,,

|              |          |
|--------------|----------|
| κλάσεις      | $\chi_i$ |
| [ 2 ,... )   |          |
| [ ... ,... ) | 8        |
| [ ..., ...)  |          |
| [ ..., ...)  |          |

|           |          |
|-----------|----------|
| κλάσεις   | $\chi_i$ |
| [...,..)  | 8        |
| [..,..)   |          |
| [ .., ..) |          |
| [ .., ..) |          |
| [ .., ..) | 48       |

7),,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,8),,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,

---

| κλάσεις     | $\chi_i$  |
|-------------|-----------|
| [... ,... ) | <b>7</b>  |
| [... ,... ) |           |
| [ ..., ...) | <b>11</b> |
| [ ..., ...) |           |
| [ ..., ...) |           |

1) ..... 2) ..... 3) .....

| 1σ κλάσεις | $\chi_i$ |
|------------|----------|
| [ 10, 14 ) | 12       |
| [ 14, 18 ) | 16       |
| [ 18, 22 ) | 20       |
| [ 22, 26 ) | 24       |
| [ 26, 30 ) | 28       |

4),,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,5),,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,6)

| κλάσεις    | $\chi_i$ |
|------------|----------|
| [ 2, 6 )   | 4        |
| [ 6, 10 )  | 8        |
| [ 10, 14 ) | 12       |
| [ 14, 18 ) | 16       |

7),,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,8),,,,,,,,,,,,,,,,,,

| κλάσεις   | $\chi_i$ |
|-----------|----------|
| [.6,8 )   | 7        |
| [8,10)    | 9        |
| [ 10, 12) | 11       |
| [ 12, 14) | 13       |
| [ 14, 16) | 15       |

[illegible]

10) Οι μέρες των καλοκαιρινών διακοπών μιας ομάδας ατόμων δίνονται στον παρακάτω πίνακα

α) Να κατασκευάσετε πίνακα με τις κεντρικές τιμές και συχνότητες:  $\nu_i$ ,  $f_i$ ,  $N_i$ ,  $f_i\%$ ,  $F_i$ ,  $F_i\%$

β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών % σχετικών συχνοτήτων.

δ) Να βρείτε: i) Το πλήθος των ατόμων που έκαναν διακοπές κάτω από 12 ημέρες

ii) Το ποσοστό των ατόμων που έκαναν διακοπές τουλάχιστον 16 ημέρες.

| Ημέρες  | Άτομα |
|---------|-------|
| [7,11)  | 24    |
| [11,15) | 40    |
| [15,19) | 48    |
| [19,23) | 32    |
| [23,27) | 16    |

τις

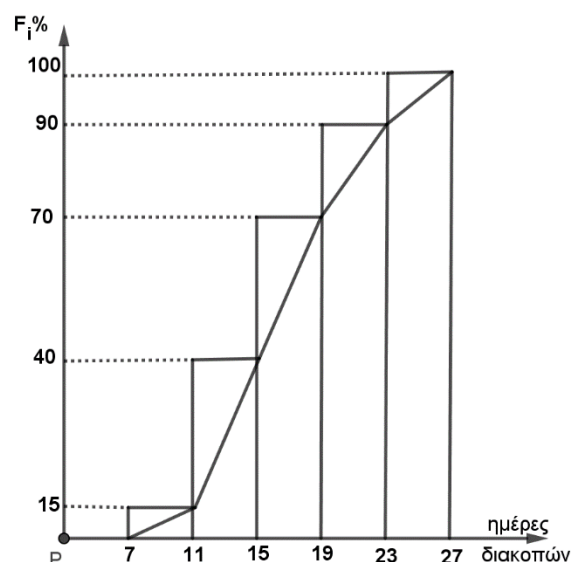
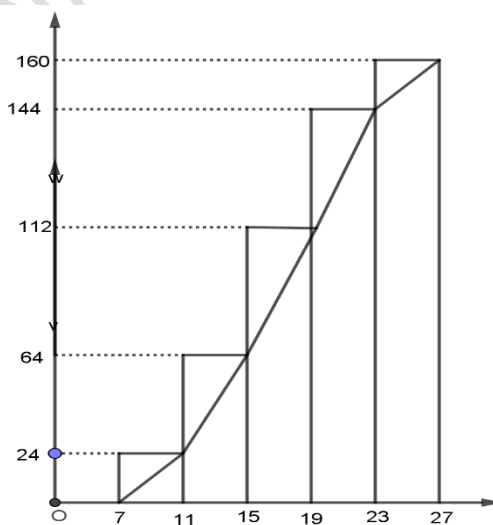
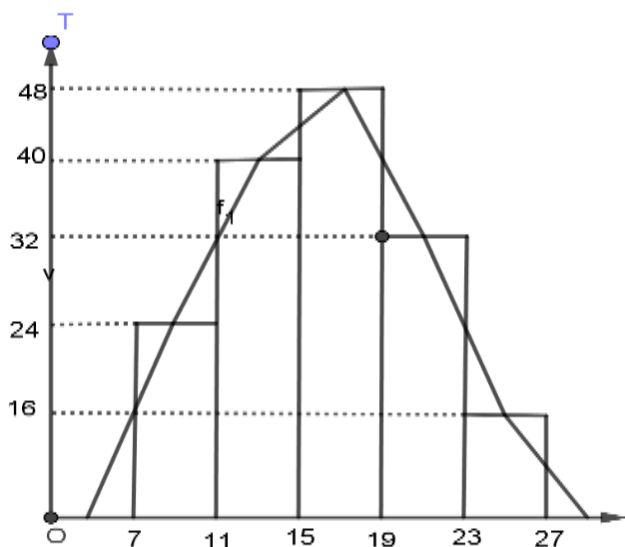
10) ΛΥΣΗ

α)

β)

γ)

| ΗΜΕΡΕΣ  | $\chi_i$ | $\nu_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ | $F_i\%$ |
|---------|----------|---------|-------|-------|-------|---------|
| [7,11)  | 9        | 24      | 0,15  | 24    | 0,15  | 15      |
| [11,15) | 13       | 40      | 0,25  | 64    | 0,40  | 40      |
| [15,19) | 17       | 48      | 0,30  | 112   | 0,70  | 70      |
| [19,23) | 21       | 32      | 0,20  | 144   | 0,90  | 90      |
| [23,27) | 25       | 16      | 0,10  | 160   | 1,00  | 100     |
| Σύνολα  |          | 160     | 1,00  |       |       |         |



δ) i) Κάτω από 12 μέρες είναι όσοι ανήκουν στις κλάσεις [7,11) και [11,12) Πρέπει να υπολογίσουμε τη συχνότητα  $\nu'_2$  της κλάσης [11,12) : έχουμε  $\frac{15-11}{12-11} = \frac{\nu'_2}{\nu'_1} \Leftrightarrow \frac{4}{1} = \frac{\nu'_2}{40} \Leftrightarrow 4 \cdot \nu'_2 = 11 \cdot 40 \Leftrightarrow \nu'_2 = \frac{40}{4} = 10$  άρα  $\nu_1 + \nu'_2 = 24 + 10 = 34$

ii) Ποσοστό τουλάχιστον 16 ημέρες τα ποσοστά των κλάσεων [16,19), [19,23), [23,27)



Το ποσοστό της κλάσης [16,19) είναι:  $\frac{19-15}{19-16} = \frac{f_3\%}{f_3'\%} \Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{30}{f_3'\%} \Leftrightarrow 4 \cdot f_3'\% = 3 \cdot 30 \Leftrightarrow f_3'\% = \frac{90}{4} = 22,5\%$

$$f_3'\% + f_4\% + f_5\% = 22,5\% + 20\% + 10\% = 52,5\%$$

**11)** Η βαθμολογία των φοιτητών του 1<sup>ου</sup> έτους ενός πανεπιστημίου στο μάθημα

της στατιστικής δίνεται στο διπλανό πίνακα και ισχύει:  $\frac{12}{5}f_1 = 2f_3 = 3f_4 = \frac{3}{k}$

α) Να βρείτε το κ

β) Αν 44 φοιτητές είχαν βαθμολογία από 2 μέχρι 6 να βρείτε πόσοι ήταν οι φοιτητές στο 1<sup>ο</sup> έτος και να κάνετε το πολύγωνο συχνοτήτων της βαθμολογίας.

**11) ΛΥΣΗ**

Επειδή ισχύει  $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$  και από τη δοθείσα ισότητα  $\frac{12}{5}f_1 = 2f_3 = 3f_4 = \frac{3}{k}$  παίρνουμε:

$$\frac{12}{5}f_1 = \frac{3}{k} \Leftrightarrow \frac{5 \cdot 12}{12 \cdot 5}f_1 = \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot k} \Leftrightarrow f_1 = \frac{5}{4k} \quad (1) \quad 2f_3 = \frac{3}{k} \Leftrightarrow \frac{1}{2}2f_3 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot k} \Leftrightarrow f_3 = \frac{3}{2k} \quad (2) \quad 3f_4 = \frac{3}{k} \Leftrightarrow \frac{1}{3}3f_4 = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot k} \Leftrightarrow f_4 = \frac{1}{k} \quad (3)$$

$$\text{και δόθηκε ότι } f_2 = 0,25 \text{ οπότε } f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{4k} + 0,25 + \frac{3}{2k} + \frac{1}{k} = 1 \Leftrightarrow 4k \cdot \frac{5}{4k} + 4k \cdot 0,25 + 4k \cdot \frac{3}{2k} + 4k \cdot \frac{1}{k} = 4k \Leftrightarrow 5 + k + 6 + 4 = 4k \Leftrightarrow 15 = 3k \Leftrightarrow k = 5 \text{ οπότε: } f_1 = \frac{5}{20} = 0,25, f_3 = \frac{3}{10} = 0,3, f_4 = \frac{1}{5} = 0,2$$

β) 44 φοιτητές είχαν βαθμολογία από 2 έως 6 σημαίνει ότι:  $v_2 + v_3 = 44 \Leftrightarrow v f_2 + v f_3 = 44 \Leftrightarrow$

$$v(f_2 + f_3) = 44 \Leftrightarrow v(0,25 + 0,3) = 44 \Leftrightarrow v \cdot 0,55 = 44 \Leftrightarrow v = \frac{44}{0,55} = 80 \quad (\text{αφού } f_2 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow v_2 = v f_2)$$

**12)** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα

συχνοτήτων της βαθμολογίας ενός τμήματος

στα μαθηματικά. Σε κάθε ορθογώνιο που η βάση του είναι ίση με μια μονάδα μήκους φαίνεται το εμβαδόν του.

α) Να βρείτε το πλήθος των μαθητών που εξετάστηκαν.

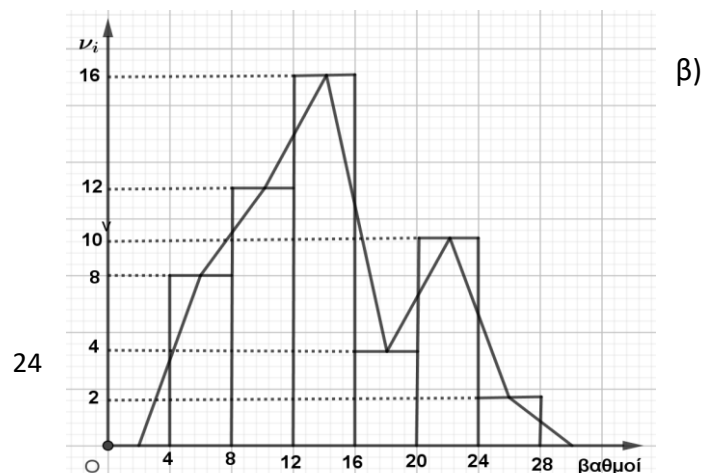
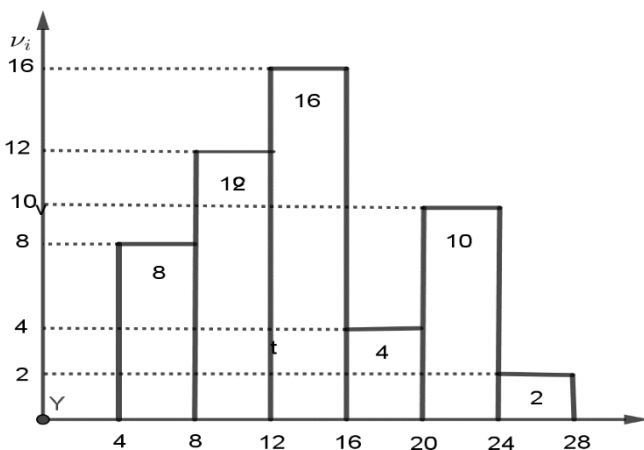
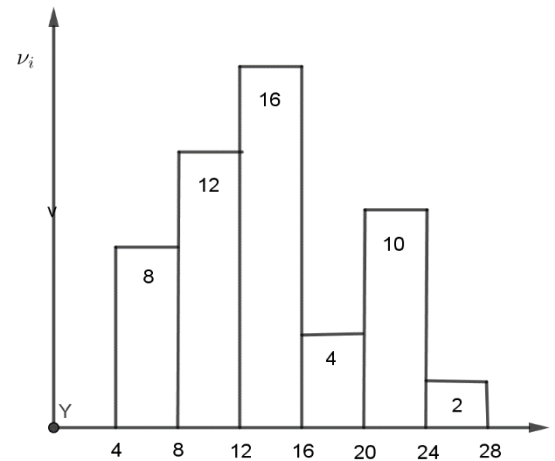
β) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων.

γ) Πόσοι μαθητές βαθμολογήθηκαν τουλάχιστον με 10 και το πολύ 14.

**12) ΛΥΣΗ**

α) Το κάθε ορθογώνιο έχει εμβαδό ίσο με την συχνότητα της κλάσης και για την πρώτη κλάση έχουμε  $E_1 = 1 \cdot 8 = 8 = v_1$  το ίδιο ισχύει και για τις λοιπές κλάσεις αντίστοιχα, άρα

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6 = v \text{ ή } v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = 8 + 12 + 16 + 4 + 10 + 2 = 52$$



β)

γ) τουλάχιστον 10 και το πολύ 14 είναι οι μαθητές που ανήκουν στις κλάσεις : [10,12) , [12,14)

Το 10 είναι κεντρική τιμή της δεύτερης κλάσης και άρα η κλάση [10,12) έχει συχνότητα  $\frac{v_2}{2} = \frac{12}{2} = 6$  Το 14 είναι κεντρική τιμή της τρίτης κλάσης και άρα η κλάση [12,16) έχει συχνότητα  $\frac{v_3}{2} = \frac{16}{2} = 8$  άρα  $\frac{v_2}{2} + \frac{v_3}{2} = 6 + 8 = 14$

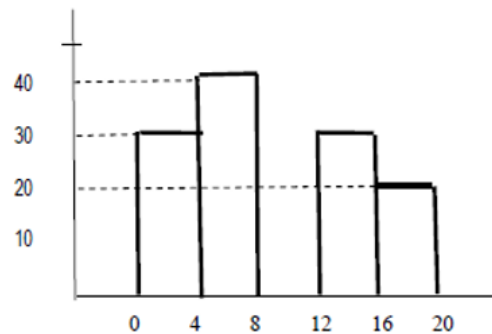
**13)** Στο διπλανό ιστόγραμμα συχνοτήτων φαίνονται οι μισθοί 200 υπαλλήλων μιας εταιρίας , αλλά σβήστηκε από λάθος το ορθογώνιο της κλάσης [8,12). Αν είναι γνωστό ότι δεν υπάρχει μισθός πάνω από 2000 ευρώ τότε :

α) Να κατασκευάσετε το ορθογώνιο που λείπει.

β) Να βρείτε το πλήθος των εργαζομένων που έχουν μισθό πάνω από 600 ευρώ.

γ) Να βρείτε το πλήθος των εργαζομένων που έχουν μισθό τουλάχιστον 700 ευρώ και το πολύ 1300 ευρώ.

Αριθμός Εργαζομένων



Μισθός (σε εκατοντάδες)

### 13) ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι το ορθογώνιο κάθε κλάσης υψώνετε μέχρι την συχνότητα της κλάσης και **επειδή θεωρούμε το πλάτος ως μονάδα μέτρησης το εμβαδό του ορθογωνίου ισούται με τη συχνότητα της κλάσης.**

$v_1=30, v_2=40, v_3=;$  ,  $v_4=30, v_5=20$  ισχύει  $v_1+v_2+v_3+v_4+v_5=v$  ή  $30+40+v_3+30+20=200$  ή  $v_3=200-120=80$

α) Τοποθετούμε την τιμή 80 στον κατακόρυφο άξονα και υψώνουμε ορθογώνιο μέχρι το 80.

β) Πάνω από 600 ευρώ παίρνουν οι εργαζόμενοι που ανήκουν στις κλάσεις : [6,8) , [8,12) , [12,16) , [16,20) Το 600 ή 6 εκατοντάδες είναι κεντρική τιμή της δεύτερης κλάσης και θεωρώντας ότι οι τιμές κατανέμονται ομοιόμορφα η κλάση [6, 8) έχει συχνότητα  $v'_2 = \frac{v_2}{2} = \frac{40}{2} = 20$  συνεπώς :  $v'_2+v_3+v_4+v_5=20+80+30+20=150$

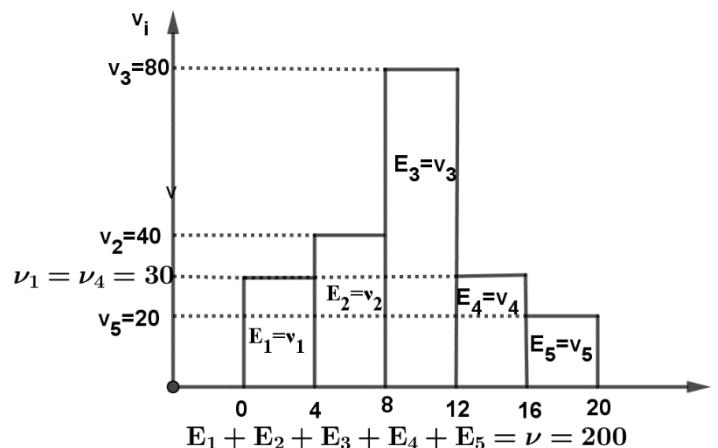
γ) Με μισθό τουλάχιστον 700 και το πολύ 1300 είναι οι εργαζόμενοι που ανήκουν στις κλάσεις [7,8) , [8,12) , [12,13)

Για τη συχνότητα της κλάσης [7,8) και θεωρώντας ομοιόμορφη την κατανομή των παρατηρήσεων έχουμε:

{ στην κλάση [4, 8) πλάτους  $8 - 4 = 4$  αντιστοιχεί συχνότητα  $v_2 = 40$  άρα  $\frac{4}{1} = \frac{40}{v'_2}$  ή  $v'_2 = 10$   
 { στην κλάση [7, 8) πλάτους  $8 - 7 = 1$  αντιστοιχεί συχνότητα  $v'_2 = ;$

Για τη συχνότητα της κλάσης [12,13) έχουμε:

{ στην κλάση [12, 16) πλάτους  $16 - 12 = 4$  αντιστοιχεί συχνότητα  $v_4 = 30$  άρα  $\frac{4}{1} = \frac{30}{v'_4}$  ή  $v'_4 = 8$   
 { στην κλάση [12, 13) πλάτους  $13 - 12 = 1$  αντιστοιχεί συχνότητα  $v'_4 = ;$   
 συνεπώς:  $v'_2+v_3+v'_4=10+80+8=98$



**14)** Οι χρόνοι που χρειάστηκαν κάποιοι μαθητές για να λύσουν μια άσκηση είναι από 10 ως 20 λεπτά. Τους παραπάνω χρόνους τους χωρίζουμε σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους έτσι ώστε :

\*Το πολύγωνο συχνοτήτων με μεταβλητή το χρόνο λύσης της άσκησης έχει εμβαδόν 40

\* Το ύψος του ορθογωνίου στο ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων ,που αντιστοιχεί στην κλάση με κεντρική τιμή 13 είναι 0,1

\* Η γωνία του κυκλικού τομέα στο κυκλικό διάγραμμα που αντιστοιχεί στην κλάση με κεντρική τιμή 19 είναι  $72^\circ$

\* Οι μαθητές που έκαναν από 16 ως 18 λεπτά είναι διπλάσιοι των μαθητών που έκαναν χρόνο 10 ως 12 λεπτά

\*24 μαθητές έκαναν χρόνο κάτω από 16 λεπτά

α) Να κατασκευάσετε πίνακα για  $\nu_i, f_i, N_i, f_i\%, F_i, F_i\%$

β) Να κατασκευάσετε τα i) ιστόγραμμα συχνοτήτων και πολύγωνο

ii) ιστόγραμμα και πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων .

#### 14) ΛΥΣΗ

Οι χρόνοι είναι από 10 έως 20 άρα μικρότερη παρατήρηση το 10 και μεγαλύτερη το 20 και το εύρος είναι:  $R = x_{max} - x_{min} = 20 - 10 = 10$  Ο αριθμός των κλάσεων είναι  $k=5$  και το πλάτος είναι  $c = \frac{R}{k} = \frac{10}{5} = 2$  Οι κλάσεις που δημιουργούνται είναι:

[10,12) , [12,14) , [14,16) , [16,18) , [18,20)

Επειδή το εμβαδό του πολυγώνου συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος άρα  $\nu=40$

Το  $13 = \frac{12+14}{2} = \frac{26}{2}$  είναι κεντρική τιμή της δεύτερης κλάσης [12,14) και δεδομένου ότι το ύψος του ορθογωνίου στο ιστόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων είναι όσο η σχετική συχνότητα της κλάσης έχουμε ότι  $f_2=0,1$

Το  $19 = \frac{18+20}{2} = \frac{38}{2}$  είναι κεντρική τιμή της πέμπτης κλάσης [18,20) άρα αν  $\alpha_5 = 72^\circ$  είναι η γωνία του κυκλικού τομέα ισχύει

$$: \alpha_5 = \frac{\nu_5}{\nu} 360^\circ \Leftrightarrow 72^\circ = \frac{\nu_5}{40} 360^\circ \Leftrightarrow \nu_5 = \frac{72^\circ \cdot 40}{360^\circ} = 8$$

Οι μαθητές που έκαναν 16' έως 18 λεπτά ανήκουν στην τέταρτη κλάση είναι διπλάσιοι των μαθητών που έκαναν 10 έως 12 λεπτά και ανήκουν στην πρώτη κλάση συνεπώς ισχύει :  $\nu_4=2\nu_1$

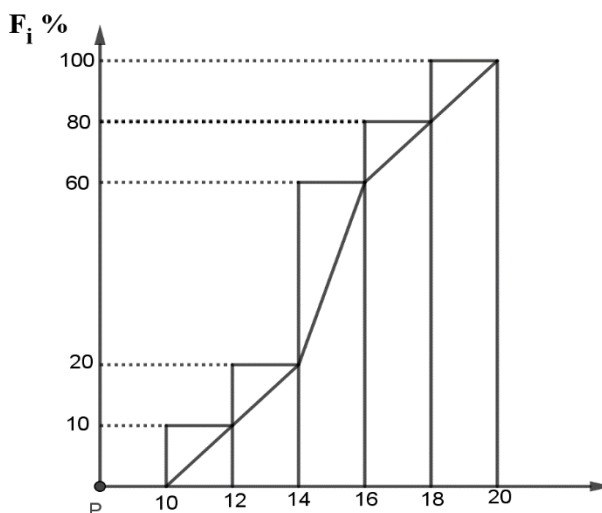
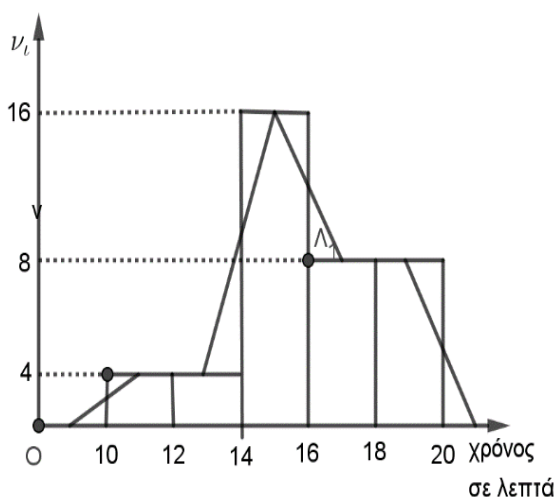
Οι 24 μαθητές που έκαναν χρόνο κάτω από 16 λεπτά είναι αυτοί που ανήκουν στην πρώτη ,δεύτερη και τρίτη κλάση συνεπώς ισχύει:  $\nu_1+\nu_2+\nu_3=24$  Επειδή  $f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} \Leftrightarrow \nu \cdot f_2 = \nu_2 \Leftrightarrow \nu_2 = 40 \cdot 0,1 = 4$  Από τα παραπάνω και τη σχέση

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu_5=40 \text{ έχουμε: } \begin{cases} \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = 40 \\ \nu_2 = 4, \nu_5 = 8, \nu_4 = 2\nu_1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \nu_1 + 4 + \nu_3 + 2\nu_1 + 8 = 40 \\ \nu_1 + 4 + \nu_3 = 24 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3\nu_1 + \nu_3 = 28 \\ \nu_1 + \nu_3 = 20 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} (3\nu_1 + \nu_3) - (\nu_1 + \nu_3) = 28 - 20 \\ \nu_1 + \nu_3 = 20 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 2\nu_1 = 8 \\ \nu_1 + \nu_3 = 20 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \nu_1 = \frac{8}{2} = 4 \\ \nu_3 = 20 - 4 = 16 \end{cases}$$

Ακόμη  $\nu_4 = 2\nu_1 = 2 \cdot 4 = 8$  οπότε οι σχετικές συχνότητες είναι:  $f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{4}{40} = 0,1$  ,  $f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = 0,1$  ,  $f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} = \frac{16}{40} = 0,4$  ,  $f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} = \frac{8}{40} = 0,2$  ,  $f_5 = \frac{\nu_5}{\nu} = \frac{8}{40} = 0,2$

| χρόνος  | $x_i$ | $\nu_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $f_i\%$ | $F_i$ | $F_i\%$ |
|---------|-------|---------|-------|-------|---------|-------|---------|
| [10,12) | 11    | 4       | 0,1   | 4     | 10      | 0,1   | 10      |
| [12,14) | 13    | 4       | 0,1   | 8     | 10      | 0,2   | 20      |
| [14,16) | 15    | 16      | 0,4   | 24    | 40      | 0,6   | 60      |
| [16,18) | 17    | 8       | 0,2   | 32    | 20      | 0,8   | 80      |
| [18,20) | 19    | 8       | 0,2   | 40    | 20      | 1,00  | 100     |
| Σύνολα  |       | 40      | 1,00  |       |         |       |         |



**15)** Οι ημέρες άδειας των υπαλλήλων μιας εταιρείας ομαδοποιούνται σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

| Αριθ. Ημ. Άδειας | $\chi_i$ | $\nu_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ |
|------------------|----------|---------|-------|-------|-------|
| [6, ...)         |          | 16      |       |       |       |
| [..., ...)       |          |         |       |       |       |
| [..., ...)       |          |         |       |       |       |
| [..., ...)       |          |         |       |       |       |
| [..., 26)        |          |         |       |       |       |
| <b>Σύνολα</b>    |          |         |       |       |       |

Αν ισχύει ότι:

- Στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων των ημερών άδειας το τόξο  $\alpha_i$  του κυκλικού τομέα, το οποίο αντιστοιχεί στην πρώτη κλάση, είναι  $72^\circ$  και
- $3f_2 = 3f_5 = f_3 = f_4$  τότε:

α) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε κατάλληλα.

β) Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

γ) Να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων που πήραν άδεια από 12 μέχρι 25 ημέρες

δ) Να βρείτε τον μέσο αριθμό ημερών άδειας και την τυπική απόκλιση του δείγματος.

Δίνεται:  $\sqrt{25,6} = 5,06$  {Το ερώτημα αυτό για φέτος 2020-21 είναι εκτός ύλης.}

ΓΕΛ επαναληπτικές 2012) }

### 15) ΛΥΣΗ

Έστω  $c$  το πλάτος της κλάσης. Τότε οι κλάσεις γράφονται με την μορφή  $[6, 6+c)$ ,  $[6+c, 6+2c)$ ,  $[6+2c, 6+3c)$ ,  $[6+3c, 6+4c)$ ,  $[6+4c, 6+5c)$ . Δίνεται ότι το δεξί άκρο της πέμπτης κλάσης είναι 26 άρα ισχύει:  $6+5c = 26 \Leftrightarrow 5c = 26-6 \Leftrightarrow 5c = 20 \Leftrightarrow c = \frac{20}{5} = 4$  και οι κλάσεις γίνονται:  $[6, 10)$ ,  $[10, 14)$ ,  $[14, 18)$ ,  $[18, 22)$ ,  $[22, 26)$

« Σχόλιο: Με βάση τον πίνακα που δόθηκε, η μικρότερη παρατήρηση είναι 6 και αν θεωρήσουμε ότι η μεγαλύτερη παρατήρηση είναι το 26 (και αυτό παρά το ότι φαίνεται ότι είναι λάθος από μαθηματική σκοπιά, γιατί το διάστημα δόθηκε ανοικτό, άρα η τιμή 26 δεν ανήκει στην κλάση, δεχόμαστε να θεωρούμε το δεξί άκρο της τελευταίας κλάσης ως τη μεγαλύτερη τιμή των παρατηρήσεων) τότε το εύρος είναι  $R = x_{\max} - x_{\min} = 26 - 6 = 20$ . Για να μην εμπλακούμε σε αυτή την αντινομία, είναι προτιμητέο, αφού γνωρίζουμε ότι ο αριθμός των κλάσεων είναι  $k = 5$  το

πλάτος το υπολογίσαμε  $c = 4$  τότε ~(σελίδα 73 βιβλίου)  $c = \frac{\mathbb{R}}{\kappa} \Leftrightarrow \mathbb{R} = c \cdot \kappa = 4 \cdot 5 = 20$  και οι κλάσεις είναι  $[6,10)$  ,  $[10,14)$  ,  $[14,18)$  ,  $[18,22)$  ,  $[22,26)$  .)»

Αφού στον κυκλικό τομέα που αντιστοιχεί στην πρώτη κλάση το τόξο είναι  $\alpha_1 = 72^\circ$  και η συχνότητα  $v_1 = 16$  έχουμε:  
 $\alpha_1 = \frac{v_1}{v} 360^\circ \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot v = v_1 \cdot 360^\circ \Leftrightarrow v = \frac{v_1 \cdot 360^\circ}{\alpha_1} \Leftrightarrow v = \frac{16 \cdot 360^\circ}{72^\circ} = 80$

Οπότε  $f_1 = \frac{16}{80} = 0,2$  Για τις σχετικές συχνότητες ισχύει η σχέση :  $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1$  (1)

Από τη δοσμένη σχέση μεταξύ των σχετικών συχνοτήτων παίρνουμε:  $f_4 = 3f_2$  ,  $f_3 = 3f_2$  ,  $f_5 = \frac{3f_2}{3} = f_2$  και αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε :  $0,2 + f_2 + 3f_2 + 3f_2 + f_2 = 1 \Leftrightarrow 8f_2 = 1 - 0,2 \Leftrightarrow 8f_2 = 0,8 \Leftrightarrow f_2 = \frac{0,8}{8} = 0,1$  άρα  $f_4 = 3 \cdot 0,1 = 0,3$  ,  $f_3 = 3 \cdot 0,1 = 0,3$  .  $f_5 = f_2 = 0,1$  και οι συχνότητες είναι:

$$v_1 = 80 \cdot 0,2 = 16 \quad , \quad v_2 = 80 \cdot 0,1 = 8 \quad , \quad v_3 = 80 \cdot 0,3 = 24 \quad , \quad v_4 = 80 \cdot 0,3 = 24 \quad , \quad v_5 = 80 \cdot 0,1 = 8$$

| Αρ.Ημ.Αδειας | $x_i$ | $v_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ | $x_i \cdot v_i$ | $x_i \cdot f_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $(x_i - \bar{x})^2 v_i$ |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------|-----------------|-----------------|---------------------|-------------------------|
| [6,10)       | 8     | 16    | 0,2   | 16    | 0,2   | 128             | 1,6             | -8              | 64                  | 1024                    |
| [10,14)      | 12    | 8     | 0,1   | 24    | 0,3   | 96              | 1,2             | -4              | 16                  | 128                     |
| [14,18)      | 16    | 24    | 0,3   | 48    | 0,6   | 384             | 4,8             | 0               | 0                   | 0                       |
| [18,22)      | 20    | 24    | 0,3   | 72    | 0,9   | 480             | 6,0             | 4               | 16                  | 384                     |
| [22,26)      | 24    | 8     | 0,1   | 80    | 1,00  | 192             | 2,4             | 8               | 64                  | 512                     |
| Σύνολο       |       | 80    | 1,00  |       |       | 1280            | $\bar{x} = 16$  |                 |                     | 2048                    |

β)

γ) Το ποσοστό των υπαλλήλων που πήραν άδεια από 12 μέχρι 25 ημέρες ανήκει στις κλάσεις  $[12,14)$  ,  $[14,18)$  ,  $[18,22)$  ,  $[22,25)$  Με την υπόθεση ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες υπολογίζουμε το ποσοστό της κλάσης  $[12,14)$  :

$$f_2' \% = 10$$

Στην κλάση **[12,14)** πλάτους  $c=2$  το ποσοστό είναι  $f_2' \% =$ ;

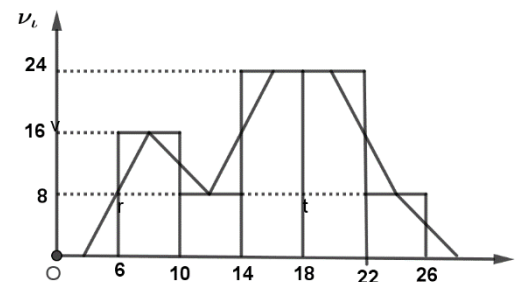
$$\frac{4}{2} = \frac{10}{f_2' \%} \Leftrightarrow f_2' \% = \frac{2 \cdot 10}{4} = 5 \quad \text{και για την κλάση } [22,25) \text{ έχουμε:}$$

Στην κλάση **[22,26)** πλάτους  $c=4$  το ποσοστό είναι  $f_2' \% = 10$

Στην κλάση **[22,25)** πλάτους  $c=3$  το ποσοστό είναι  $f_2' \% =$ ;

$$\frac{4}{3} = \frac{10}{f_5' \%} \Leftrightarrow f_5' \% = \frac{3 \cdot 10}{4} = 7,5 \quad \text{Το ποσοστό των υπαλλήλων είναι} \quad f_2' \% + f_3' \% + f_4' \% + f_5' \% = 5 + 30 + 30 + 7,5 = 72,5$$

$$\delta) \text{ Μέση τιμή } \bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^5 x_i \cdot v_i = \frac{1280}{80} = 16 = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot f_i \quad \text{Η διακύμανση } S^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 v_i = \frac{2048}{80} = 25,6 \quad \text{και η τυπική απόκλιση } S = \sqrt{S^2} = \sqrt{25,6} = 5,06$$



**16)** Οι απουσίες των μαθητών της Γ τάξης ενός λυκείου κατά τους μήνες Ιανουάριο -Φεβρουάριο- Μάρτιο- Απρίλιο του έτους 2006 έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους και εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων :

| Απουσίες μαθητών | $x_i$ | $f_i$ |
|------------------|-------|-------|
| [... , ...)      |       | 0,1   |
| [... , 7)        |       |       |
| [... , ...)      |       | 0,3   |
| [... , ...)      | 10    |       |
| Σύνολο           |       | 1     |

Αν επιπλέον δίνεται ότι η σχετική συχνότητα της 4<sup>ης</sup> κλάσης  $f_4$  είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της 2<sup>ης</sup> κλάσης  $f_2$  ,τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το πλάτος  $c$  των κλάσεων ισούται με 2 .

β) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα σχετικών συχνοτήτων ,αφού υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές. {Το  $\gamma$  είναι εκτός ύλης για το 2020-21}

γ) i) Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  ii) Να βρείτε την τυπική απόκλιση  $S$  Δίνεται:

$$S^2 = \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{(\sum_{i=1}^k x_i v_i)^2}{n} \right] \quad (\text{ΓΕΛ επαναλ 2006})$$

## 16) ΛΥΣΗ

Αν  $\alpha$  η μικρότερη τιμή και  $c$  το πλάτος ,τότε οι κλάσεις γράφονται :

| Απουσίες μαθητών                               | $x_i$ | $f_i$ | $x_i \cdot f_i$ | $x_i^2$ | $x_i^2 f_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $(x_i - \bar{x})^2 f_i$ |
|------------------------------------------------|-------|-------|-----------------|---------|-------------|-----------------|---------------------|-------------------------|
| [...3, ...5) = [ $\alpha$ , $\alpha+c$ )       | 4     | 0,1   | 0,4             | 16      | 1,6         | -4              | 16                  | 1,6                     |
| [...5 , 7) = [ $\alpha+c$ , $\alpha+2c$ )      | 6     | 0,2   | 1,2             | 36      | 7,2         | -2              | 4                   | 0,8                     |
| [7... , ...9) = [ $\alpha+2c$ , $\alpha+3c$ )  | 8     | 0,3   | 2,4             | 64      | 19,2        | 0               | 0                   | 0                       |
| [9... , ...11) = [ $\alpha+3c$ , $\alpha+4c$ ) | 10    | 0,4   | 4,0             | 100     | 40,0        | 2               | 4                   | 1,6                     |
| Σύνολο                                         |       | 1     | 8               |         | 68          |                 |                     | 4                       |

«σχόλιο :Στον πίνακα δεν γράφουμε την συμβολική γραφή που για εκπαιδευτικούς λόγους σας παρουσιάζω εδώ, παρά μόνο τους αριθμούς»

Με βάση τα παραπάνω έχουμε τις σχέσεις  $\alpha + 2c = 7$  (1) και  $\frac{\alpha + 3c + \alpha + 4c}{2} = 10 \Leftrightarrow 2\alpha + 7c = 20$  (2) Λύνουμε το σύστημα των

$$\text{σχέσεων (1) και (2)} \quad \begin{cases} \alpha + 2c = 7 \\ 2\alpha + 7c = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha - 4c = -14 \\ 2\alpha + 7c = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha - 4c = -14 \\ 3c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha - 4c = -14 \\ 3c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2c = 7 \\ c = \frac{6}{3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2c = 7 \\ c = \frac{6}{3} = 2 \end{cases}$$

**β) Γνωστό** ότι  $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$  με  $f_1 = 0,1$  ,  $f_3 = 0,3$  .  $f_4 = 2f_2$  άρα  $0,1 + f_2 + 0,3 + 2f_2 = 1 \Leftrightarrow 3f_2 = 1 - 0,1 - 0,3 \Leftrightarrow 3f_2 = 0,6 \Leftrightarrow f_2 = \frac{0,6}{3} = 0,2$  οπότε  $f_4 = 2f_2 = 2 \cdot 0,2 = 0,4$

γ) i) Μέση τιμή :  $\bar{x} = \sum_{i=1}^5 x_i f_i = 0,4 + 1,2 + 2,4 + 4 = 8$

ii) {σχόλιο: επειδή δεν δίνεται η συχνότητα ,επιλύουμε τους τύπους, ώστε να αντικαταστήσουμε αυτό που δεν μας δίνεται, τη συχνότητα, με τη σχετική συχνότητα.}

α' τρόπος (θυμάμαι:  $f_i = \frac{v_i}{n}$ )

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 v_i}{n} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \frac{v_i}{n} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 f_i = 1,6 + 0,8 + 0 + 1,6 = 4 \quad \text{άρα } S = \sqrt{4} = 2$$

Β τρόπος (με χρήση του τύπου που μας δόθηκε. Θυμάμαι :  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i v_i}{n}$ )

$$S^2 = \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 v_i - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i v_i)^2}{n} \right] = \sum_{i=1}^n x_i^2 \frac{v_i}{n} - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i v_i)^2}{n^2} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \frac{v_i}{n} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i v_i}{n} \right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 f_i - (\bar{x})^2 = 68 - 8^2 = 68 - 64 = 4 \quad \text{άρα } S = \sqrt{4} = 2$$

**17)** Στην Αττική οδό εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα, τα οποία διανύουν από 5 έως 45 χιλιόμετρα. Η διανυόμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του παρακάτω πίνακα:

| Κλάσεις σε χλμ | Κέντρο κλάσης $\chi_i$ | Συχνότητα $\nu_i$<br>(σε χιλιάδες) | Σχετ.Συχνότη.% $f_i\%$ | Αθροιστική Συχν<br>(σε χιλιάδες) $N_i$ | Αθρ.Σχετ.Συχν. $F_i\%$ |
|----------------|------------------------|------------------------------------|------------------------|----------------------------------------|------------------------|
| [5, 15)        |                        | 60                                 |                        |                                        |                        |
| [15, 25)       |                        |                                    |                        |                                        | 68                     |
| [25, 35)       |                        |                                    |                        | 180                                    |                        |
| [35, 45)       |                        |                                    |                        |                                        |                        |
| Σύνολο         |                        | 200                                |                        |                                        |                        |

α) Να συμπληρώσετε τις τιμές των αντίστοιχων μεγεθών του πίνακα.

β) Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα ( $\chi_i, f_i\%$ ) και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

γ) Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων.

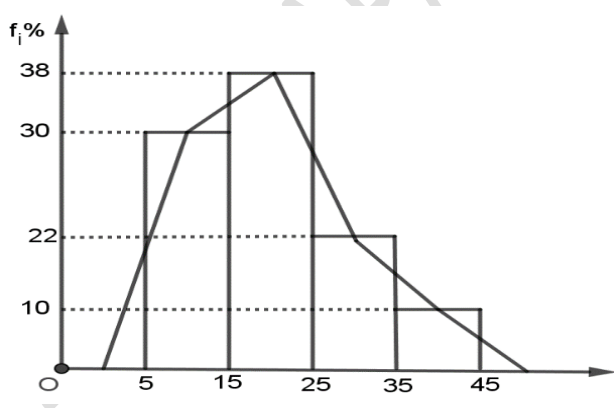
δ) Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{\chi}$ . { εκτός ύλης για 2020-21 }

ΓΕΛ 2004

### 17) ΛΥΣΗ

α)

| Κλάσεις σε χλμ | Κέντρο κλάσης $\chi_i$ | Συχνότητα $\nu_i$ σε χιλιάδες | $\chi_i \nu_i$ | Σχετ.Συχνότη.% $f_i\%$ | Αθροιστική Συχν(χιλιάδες) $N_i$ | Αθρ.Σχετ.Συχν. $F_i\%$ |
|----------------|------------------------|-------------------------------|----------------|------------------------|---------------------------------|------------------------|
| [5, 15)        | 10                     | 60                            | 600            | 30                     | 60                              | 30                     |
| [15, 25)       | 20                     | 76                            | 1520           | 38                     | 136                             | 68                     |
| [25, 35)       | 30                     | 44                            | 1320           | 22                     | 180                             | 90                     |
| [35, 45)       | 40                     | 20                            | 800            | 10                     | 200                             | 100                    |
| Σύνολο         |                        | 200                           | 4240           | 100                    |                                 |                        |



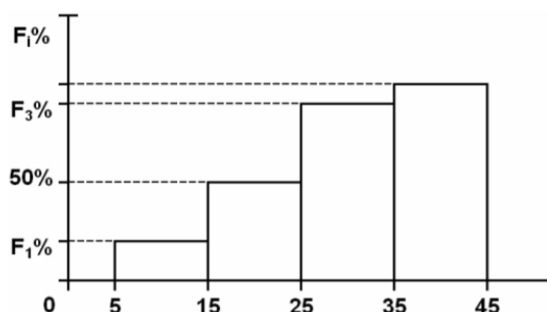
β)

γ) Είναι τα οχήματα που ανήκουν στις κλάσεις: [25,35), [35,45) άρα  $\nu_3 + \nu_4 = 44 + 20 = 64$

$$\delta) \bar{\chi} = \frac{\sum_{i=1}^4 \chi_i \nu_i}{\nu} = \frac{4240}{200} = 21,2$$

**18)** Οι χρόνοι σε λεπτά που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα [5,45) και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους.

30





Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.

α) Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές. {ερώτημα εκτός ύλης για το 2020-21 }

β) Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων να αποδείξετε ότι  $\alpha=8$  και να συμπληρώσετε τον πίνακα.

| Χρόνοι(λεπτά) | $\chi_i$ | $\nu_i$       | $f_i\%$ | $N_i$ | $F_i\%$ |
|---------------|----------|---------------|---------|-------|---------|
| [5 , ...)     |          | $\alpha+4$    |         |       |         |
| [... , ...)   |          | $3\alpha - 6$ |         |       | 50      |
| [... , ...)   |          | $2\alpha+8$   |         |       |         |
| [... , 45)    |          | $\alpha-2$    |         |       |         |
| Σύνολο        |          |               |         |       |         |

γ) Να βρεθεί η μέση τιμή  $\bar{\chi}$  και η τυπική απόκλιση S των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές. Δίνεται ότι:  $\sqrt{84} = 9,17$  {εκτός ύλης για 2020-21.

δ) Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα. ΓΕΛ 2012

### 18) ΛΥΣΗ

Έστω c το πλάτος της κλάσης. Τότε οι κλάσεις γράφονται με την μορφή [5,5+ c), [5+c,5+2c), [5+2c,5+3c) , [5+3c,5+4c) Δίνεται ότι το δεξί άκρο της τέταρτης κλάσης είναι 45 άρα ισχύει :  $5+4c = 45 \Leftrightarrow 4c = 45-5 \Leftrightarrow 4c = 40 \Leftrightarrow c = \frac{40}{4} = 10$  και οι κλάσεις γίνονται: [5,15) , [15,25) , [25,35) , [35,45)

« Σχόλιο: δες το σχόλιο της άσκησης 15) Για το εύρος: επειδή ο αριθμός των κλάσεων είναι  $k=4$  το πλάτος είναι  $c=10$  ισχύει  $c = \frac{R}{k} \Leftrightarrow R = c \cdot k = 4 \cdot 10 = 40$  και οι κλάσεις είναι [5,15) , [15,25) , [25,35) , [35,45) .)»

α) Η διάμεσος χωρίζει το πλήθος των διατεταγμένων (τοποθετημένων σε αύξουσα σειρά) παρατηρήσεων σε δύο ίσα μέρη και στο ιστόγραμμα των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων είναι αυτός που αντιστοιχεί στο 50% των παρατηρήσεων.(φέρνω κάθετη στον κατακόρυφο άξονα στο 50% ,συναντάμε το διάγραμμα και από εκεί κάθετη στον οριζόντιο άξονα. Η τιμή που θα συναντήσουμε είναι η διάμεσος και εδώ είναι  $\delta=25$

β) (Προσοχή στο ερώτημα αυτό. Από τις σχέσεις στη σελίδα 66 έχουμε  $F_2 = \frac{N_2}{N}$  διότι  $F_2 = f_1 + f_2$

$\frac{\nu_1}{N} + \frac{\nu_2}{N} = \frac{\nu_1+\nu_2}{N} = \frac{N_2}{N}$  ) Από τον δοθέντα πίνακα έχουμε ότι :  $\nu_1 = \alpha + 4$  ,  $\nu_2 = 3\alpha - 6$  ,  $\nu_3 = 2\alpha + 8$  ,  $\nu_4 = \alpha - 2$   $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = N \Leftrightarrow \alpha + 4 + 3\alpha - 6 + 2\alpha + 8 + \alpha - 2 = N \Leftrightarrow 7\alpha + 4 = N$  (1)  $F_2\% = 50$  άρα

$F_2 = 0,50 = f_1 + f_2 = \frac{\nu_1}{N} + \frac{\nu_2}{N} = \frac{\nu_1+\nu_2}{N} = \frac{\alpha+4+3\alpha-6}{7\alpha+4} = \frac{4\alpha-2}{7\alpha+4}$  λύνουμε την εξίσωση:  $\frac{4\alpha-2}{7\alpha+4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(4\alpha - 2) = 7\alpha + 4 \Leftrightarrow 8\alpha - 4 = 7\alpha + 4 \Leftrightarrow 8\alpha - 7\alpha = 4 + 4 \Leftrightarrow \alpha = 8$  οπότε  $\nu_1 = 8 + 4 = 12$  ,  $\nu_2 = 3 \cdot 8 - 6 = 18$  ,  $\nu_3 = 2 \cdot 8 + 8 = 24$  ,  $\nu_4 = 8 - 2 = 6$

| Χρόνοι(λεπτά) | $\chi_i$ | $\nu_i$ | $f_i\%$ | $N_i$ | $F_i\%$ | $\chi_i \nu_i$ | $\chi_i - \bar{\chi}$ | $(\chi_i - \bar{\chi})^2$ | $(\chi_i - \bar{\chi})^2 \nu_i$ |
|---------------|----------|---------|---------|-------|---------|----------------|-----------------------|---------------------------|---------------------------------|
| [5 , 15)      | 10       | 12      | 20      | 12    | 20      | 120            | -14                   | 196                       | 2352                            |
| [15 , 25)     | 20       | 18      | 30      | 30    | 50      | 360            | -4                    | 16                        | 288                             |
| [25 , 35)     | 30       | 24      | 40      | 54    | 90      | 720            | 6                     | 36                        | 864                             |
| [35 , 45)     | 40       | 6       | 10      | 60    | 100     | 240            | 16                    | 256                       | 1536                            |
| Σύνολο        |          | 60      | 100     |       |         | 1440           |                       |                           | 5040                            |

γ) υ) Μέση τιμή :  $\bar{\chi} = \frac{\sum_{i=1}^4 \chi_i \nu_i}{N} = \frac{1440}{60} = 24$  υ) Διακύμανση  $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 (\chi_i - \bar{\chi})^2 \nu_i}{N} = \frac{5040}{60} = 84$  άρα η τυπική απόκλιση είναι  $S = \sqrt{84} = 9,17$



δ) Οι μαθητές που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά ανήκουν στην τέταρτη κλάση [37,45)

Στην κλάση [35,45) πλάτους  $c = 45 - 35 = 10$  αντιστοιχεί συχνότητα  $f_4\% = 10$

Στην κλάση [37,45) πλάτους  $c = 45 - 37 = 8$  αντιστοιχεί συχνότητα  $f'_4\% =$

Τα ποσά είναι ανάλογα οπότε ισχύει:  $\frac{10}{8} = \frac{10}{f'_4\%} \Leftrightarrow 10 \cdot f'_4\% = 10 \cdot 8 \Leftrightarrow f'_4\% = \frac{80}{10} = 8\%$

19) Η μέση βαθμολογία των μαθητών μιας τάξης σε ένα τεστ είναι 70. Χωρίζουμε τη βαθμολογία σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| κλάσεις  | $x_i$ | $n_i$ | $f_i$ |
|----------|-------|-------|-------|
| [20,40)  |       |       |       |
| [40,60)  |       |       |       |
| [60,80)  |       |       |       |
| [80,100) |       |       |       |
| Σύνολο   |       |       |       |

Δίνεται επιπλέον ότι το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 20 έως 40 είναι ίσο με το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 40 έως 60, ενώ στο κυκλικό διάγραμμα των δεδομένων, η γωνία του κυκλικού τομέα για την επίδοση από 80 έως 100 είναι  $108^\circ$ .

α) Να δείξετε ότι:  $f_1 = f_2 = \frac{1}{10}$ ,  $f_3 = \frac{5}{10}$ ,  $f_4 = \frac{3}{10}$

β) Αν ο αριθμός της τάξης είναι 50 τότε:

i) Να συμπληρώσετε τον πίνακα

ii) Να βρείτε το πλήθος των μαθητών που έχουν βαθμολογία τουλάχιστον 60.

iii) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία από 50 έως 70. (ΓΕΛ επ.2008)

## 19) ΛΥΣΗ

## β) ι)

| κλάσεις  | $x_i$ | $x_i \cdot f_i$                             | $f_i$ | κλάσεις  | $x_i$ | $n_i$ | $f_i$ |
|----------|-------|---------------------------------------------|-------|----------|-------|-------|-------|
| [20,40)  | 30    | $30 \cdot f_1$                              | $f_1$ | [20,40)  | 30    | 5     | 0,1   |
| [40,60)  | 50    | $50 \cdot f_1$                              | $f_1$ | [40,60)  | 50    | 5     | 0,1   |
| [60,80)  | 70    | $70 \cdot f_3$                              | $f_3$ | [60,80)  | 70    | 25    | 0,5   |
| [80,100) | 90    | $90 \cdot 0,3 = 27$                         | 0,3   | [80,100) | 90    | 15    | 0,3   |
| Σύνολο   |       | $70 = \bar{x} = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot f_i$ | 1     | Σύνολο   |       | 50    | 1     |

α) Δίνεται ότι  $f_1\% = f_2\%$  άρα και  $f_1 = f_2$ . Επειδή η γωνία του κυκλικού τομέα της τέταρτης κλάσης είναι  $108^\circ$

έχουμε:  $\alpha_4 = f_4 \cdot 360^\circ \Leftrightarrow 108^\circ = f_4 \cdot 360^\circ \Leftrightarrow f_4 = \frac{108^\circ}{360^\circ} = \frac{3}{10} = 0,3$  ισχύει  $\begin{cases} f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \\ f_1 = f_2 \\ f_4 = 0,3 \end{cases}$  άρα  $f_1 + f_1 + f_3 +$

$$0,3 = 1 \Leftrightarrow 2f_1 + f_3 = 1 - 0,3 = 0,7 \Leftrightarrow f_3 = 0,7 - 2f_1 \quad (1)$$

Δόθηκε ότι:  $\bar{x} = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot f_i = 70 \Leftrightarrow 30 \cdot f_1 + 50 \cdot f_1 + 70 \cdot f_3 + 27 = 70 \Leftrightarrow 80f_1 + 70 \cdot f_3 = 70 - 27 \Leftrightarrow 80f_1 + 70 \cdot f_3 = 43$

Αντικαθιστώ στη (2) την (1) και έχουμε  $80f_1 + 70(0,7 - 2f_1) = 43 \Leftrightarrow 80f_1 + 49 - 140f_1 = 43 \Leftrightarrow -60f_1 = -49 + 43$

$$\Leftrightarrow -60f_1 = -6 \Leftrightarrow f_1 = \frac{-6}{-60} = \frac{1}{10} = f_2$$

$$\begin{cases} f_3 = 0,7 - 2f_1 \\ f_1 = \frac{1}{10} \end{cases} \quad \text{ή} \quad f_3 = \frac{7}{10} - 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = 0,5$$

$$n_1 = n f_1 = 50 \cdot 0,1 = 5, \quad n_2 = n f_2 = 50 \cdot 0,1 = 5, \quad n_3 = n f_3 = 50 \cdot 0,5 = 25, \quad n_4 = n f_4 = 50 \cdot 0,3 = 15$$

β) ι) Το πλήθος των μαθητών που έχουν βαθμολογία τουλάχιστον 60 είναι όσοι ανήκουν στις κλάσεις [60,80), [80,100) άρα  $n_3 + n_4 = 25 + 15 = 40$

ιι) Το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία από 50 έως 70 είναι  $\frac{f_2\%}{2} + \frac{f_3\%}{2} = \frac{10}{2} + \frac{50}{2} = 5 + 25 = 30\%$

**20)** Οι βαθμοί 60 μαθητών σε ένα διαγώνισμα μαθηματικών κυμαίνονται από 10 έως 20 και έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους. Αν:

- Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην κλάση [14,16) του κυκλικού διαγράμματος είναι  $144^\circ$
- Οι σχετικές συχνότητες των δύο πρώτων κλάσεων είναι ίσες.
- 48 μαθητές πήραν βαθμό έως 16 και
- 6 μαθητές πήραν βαθμό τουλάχιστον 18, τότε:

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| βαθμολογία  | $x_i$ | $v_i$ | $f_i$ | $f_i\%$ |
|-------------|-------|-------|-------|---------|
| [... , ...) |       |       |       |         |
| [... , ...) |       |       |       |         |
| [... , ...) |       |       |       |         |
| [... , ...) |       |       |       |         |
| [... , ...) |       |       |       |         |
| Σύνολο      |       |       |       |         |

β) Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  της βαθμολογίας των μαθητών. { εκτός ύλης για 2020-21}

γ) Να βρείτε πόσοι μαθητές πήραν βαθμολογία από 10 έως 14.

δ) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που πήραν βαθμολογία τουλάχιστον 17. (ΓΕΛ επ 2010)

#### 20) ΛΥΣΗ

Αφού οι βαθμοί κυμαίνονται από 10 ο μικρότερος ως 20 ο μεγαλύτερος το εύρος  $R=20-10=10$  και δεδομένου ότι ομαδοποιήσαμε σε 5 κλάσεις το πλάτος  $c = \frac{R}{\kappa} = \frac{10}{5} = 2$  και οι κλάσεις είναι: [10,12) , [12,14) , [14,16) , [16,18) , [18,20)

| βαθμολογία | $x_i$ | $v_i$ | $f_i$ | $f_i\%$ | $x_i v_i$ |
|------------|-------|-------|-------|---------|-----------|
| [10 ,12)   | 11    | 12    | 0,2   | 20      | 132       |
| [12 , 14)  | 13    | 12    | 0,2   | 20      | 156       |
| [14, 16)   | 15    | 24    | 0,4   | 40      | 360       |
| [16 , 18)  | 17    | 6     | 0,1   | 10      | 102       |
| [18 , 20]  | 19    | 6     | 0,1   | 10      | 114       |
| Σύνολο     |       | 60    | 1     | 100     | 864       |

Δίνεται ότι  $\alpha_3 = 144^\circ$  οπότε  $\alpha_3 = \frac{v_3}{v} 360^\circ$  ή  $144 = \frac{v_3}{60} 360^\circ$  ή  $144 = v_3 \cdot 6$  ή  $v_3 = \frac{144}{6} = 24$

Οι σχετικές συχνότητες των δύο πρώτων κλάσεων είναι ίσες  $f_1 = f_2$  άρα και  $v_1 = v_2$

48 μαθητές πήραν βαθμό έως 16 άρα  $v_1 + v_2 + v_3 = 48$  6 μαθητές πήραν βαθμό τουλάχιστον 18 , άρα  $v_5 = 6$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 60 & (1) \\ v_1 = v_2 & (2), \quad v_3 = 24 & (3), \quad v_5 = 6 & (4) \end{cases} \text{ Από τη σχέση (1) και τις (4),(5) έχουμε:} \\ v_1 + v_2 + v_3 = 48 & (5)$$

$$48 + v_4 + 6 = 60 \Leftrightarrow v_4 = 60 - 48 - 6 \Leftrightarrow v_4 = 6 \quad \text{Από τις σχέσεις (2), (3) και (5) έχουμε: } v_1 + v_1 + 24 = 48 \Leftrightarrow 2v_1 = 48 - 24 \Leftrightarrow 2v_1 = 24 \Leftrightarrow v_1 = \frac{24}{2} = 12 = v_2$$

$$\beta) \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{v} = \frac{864}{60} = 14,4$$

γ) Οι μαθητές που πήραν βαθμολογία από 10 ως 14 ανήκουν στις κλάσεις [10,12), [12,14) άρα  $v_1 + v_2 = 12 + 12 = 24$

**δ )** Το ποσοστό των μαθητών που πήραν βαθμό τουλάχιστον 17 είναι όσοι ανήκουν στις κλάσεις [17,18],[18,20) Θεωρώντας ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στις κλάσεις ,το 17 είναι κεντρική τιμή, άρα χωρίζει την κλάση σε δύο κλάσεις ,που η κάθε μία έχει τις μισές παρατηρήσεις άρα και το μισό ποσοστό. Οπότε έχουμε:  $\frac{f_4\%}{2} + f_5\% = 5\% + 10\% = 15\%$

**21)** Εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους  $n$  ως προς μία ποσοτική μεταβλητή  $X$  και ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις του δείγματος σε 5 ισοπλάτεις κλάσεις πλάτους  $c$  , όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| κλάσεις          | $x_i$ | $f_i\%$ | $F_i$ | $F_i\%$                           |
|------------------|-------|---------|-------|-----------------------------------|
| $[a, \dots)$     |       |         |       | $\lambda$                         |
| $[\dots, \dots)$ |       |         |       | $3\lambda+10$                     |
| $[\dots, \dots)$ |       |         |       |                                   |
| $[\dots, \dots)$ |       |         |       | $\kappa\lambda^2 - 2\lambda + 10$ |
| $[\dots, \dots)$ |       |         |       | $\kappa\lambda^2 - 3\lambda + 30$ |
| Σύνολο           |       | 100     |       |                                   |

Δίνεται ότι οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες  $F_3$  και  $F_5$  είναι ρίζες της εξίσωσης

$$5\chi^2 - 8\chi + 3\kappa = 0 \quad , \quad \text{όπου } \chi \in \mathbb{R} \text{ και } \kappa \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι  $\kappa=1$  και  $\lambda=10$

β) Να αποδείξετε ότι :  $f_1\%=10$  ,  $f_2\%=30$  ,  $f_3\%=20$  ,  $f_4\%=30$  ,  $f_5\%=10$

γ) Αν το 25% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 16 και το 25% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 24 , τότε να αποδείξετε ότι  $a = 10$  και  $c = 4$  και να συμπληρώσετε τον πίνακα.

δ) Αν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22 είναι 800, τότε να υπολογίσετε το μέγεθος του δείγματος.  
(ΓΕΛ επαν. 2013)

## 21) ΛΥΣΗ

**α )** Οι αθροιστική σχετική συχνότητα  $F_5 = 1$  διότι εκτός από ρίζα της εξίσωσης  $5\chi^2 - 8\chi + 3\kappa = 0$  που δίνεται από την άσκηση, είναι στην τελευταία γραμμή και συνεπώς είναι ίση με το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων οπότε

1<sup>ος</sup> τρόπος: αφού δίνεται ότι οι συχνότητες  $F_3$  και  $F_5$  είναι ρίζες της εξίσωσης

$$5\chi^2 - 8\chi + 3\kappa = 0 \text{ από τους τύπους Vieta έχουμε: } \begin{cases} F_3 + F_5 = -\frac{-8}{5} = \frac{8}{5} \\ F_3 \cdot F_5 = \frac{3\kappa}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_3 + 1 = \frac{8}{5} \\ F_5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_3 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{8-5}{5} = \frac{3}{5} \\ F_5 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_3 = \frac{3}{5} \\ F_3 = \frac{3\kappa}{5} \\ F_5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_3 = \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} = \frac{3\kappa}{5} \\ F_5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_3 = \frac{3}{5} \\ \kappa = 1 \\ F_5 = 1 \end{cases}$$

2<sup>ος</sup> τρόπος

$F_5 = 1$  και επειδή είναι ρίζα της εξίσωσης  $5\chi^2 - 8\chi + 3\kappa = 0$  την επαληθεύει δηλαδή ισχύει :  $5F_5^2 - 8F_5 + 3\kappa = 0$  με  $F_5 = 1$  παίρνουμε:  $5 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 3\kappa = 0 \Leftrightarrow -3 + 3\kappa = 0 \Leftrightarrow$

$3\kappa = 3 \Leftrightarrow \kappa = 1$  και η εξίσωση γίνεται  $5\chi^2 - 8\chi + 3 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 5\chi^2 - 8\chi + 3 = 0$  Η  $F_3$  είναι ρίζα της  $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = 64 - 60 = 4$

$$\begin{cases} \chi_1 = \frac{-(-8) + \sqrt{4}}{2 \cdot 5} = \frac{8+2}{10} = 1 = F_3 & \text{απορρίπτεται διότι } F_3 < 1 \\ \chi_2 = \frac{-(-8) - \sqrt{4}}{2 \cdot 5} = \frac{8-2}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = F_3 \end{cases}$$

Αποδείξαμε ότι  $\kappa=1$  και  $F_3 = \frac{3}{5} = 0,6$  Ακόμη δίνεται ότι:  $F_5\% = \kappa\lambda^2 - 3\lambda + 30$  επειδή  $\kappa=1$  έχουμε  $F_5\% = \lambda^2 - 3\lambda + 30$  (1)

$F_5 = 1$  άρα  $F_5\% = 100F_5 = 100 \cdot 1 = 100(2)$  Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε  $\lambda^2 - 3\lambda + 30 = 100 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 70 = 0$  Λύνουμε την

$$\text{εξίσωση : } \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-70) = 289 = 17^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{289}}{2 \cdot 1} = \frac{3+17}{2} = 10 \\ \lambda_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{289}}{2 \cdot 1} = \frac{3-17}{2} = -7 \end{array} \right. \quad \text{Επειδή δόθηκε } F_1\% = \lambda \geq 0 \text{ απορρίπτεται η αρνητική τιμή άρα}$$

$\lambda = 10$

Για τις εκατοστιαίες αθροιστικές σχετικές συχνότητες με  $\kappa=1$  κι  $\lambda=10$  έχουμε:

$$\begin{array}{ll} F_1\% = \lambda = 10 & f_1\% = F_1\% = 10 \\ F_2\% = 3\lambda + 10 = 3 \cdot 10 + 10 = 30 + 10 = 40 & f_2\% = F_2\% - F_1\% = 40 - 10 = 30 \\ F_3\% = 60 \text{ διότι } F_3 = 0,6 & f_3\% = F_3\% - F_2\% = 60 - 40 = 20 \\ F_4\% = \kappa \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 1 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10 + 10 = 100 - 20 + 10 = 90 & f_4\% = F_4\% - F_3\% = 90 - 60 = 30 \\ F_5\% = \kappa \lambda^2 - 3\lambda + 30 = 1 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 + 30 = 100 - 30 + 30 = 100 & f_5\% = F_5\% - F_4\% = 100 - 90 = 10 \end{array}$$

Έστω  $c$  το πλάτος της κλάσης τότε οι κλάσεις γράφονται συμβολικά όπως παρακάτω:

| κλάσεις                  | $x_i$ | $f_i\%$ | $F_i$ | $F_i\%$ |
|--------------------------|-------|---------|-------|---------|
| $[\alpha, \alpha+c)$     | $x_1$ | 10      | 0,1   | 10      |
| $[\alpha+c, \alpha+2c)$  | $x_2$ | 30      | 0,4   | 40      |
| $[\alpha+2c, \alpha+3c)$ | $x_3$ | 20      | 0,6   | 60      |
| $[\alpha+3c, \alpha+4c)$ | $x_4$ | 30      | 0,9   | 90      |
| $[\alpha+4c, \alpha+5c)$ | $x_5$ | 10      | 1     | 100     |
| Σύνολο                   |       | 100     |       |         |

**γ)** Το 25% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 16 σημαίνει ότι υποχρεωτικά θα περιλαμβάνει το ποσοστό της πρώτης κλάσης και όποιο ποσοστό απαιτείται για να συμπληρωθεί το ζητούμενο ποσοστό 25%. Η δεύτερη κλάση έχει ποσοστό 30% άρα το απαιτούμενο ποσοστό είναι  $f_1\% + \frac{f_2\%}{2} = 10\% + 15\% = 25\%$  Άρα το 16 αντιστοιχεί στην κεντρική τιμή  $x_2 = \frac{\alpha+c+\alpha+2c}{2} = 16 \Leftrightarrow \frac{2\alpha+3c}{2} = 16 \Leftrightarrow 2\alpha+3c=32$  **(1)**

και το 25% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 24 σημαίνει ότι υποχρεωτικά θα περιλαμβάνει το ποσοστό της πέμπτης κλάσης και όποιο ποσοστό απαιτείται για να συμπληρωθεί το ζητούμενο ποσοστό 25% από την τέταρτη κλάση. Η πέμπτη κλάση έχει ποσοστό 10% άρα το απαιτούμενο ποσοστό είναι  $f_5\% + \frac{f_4\%}{2} = 10\% + 15\% = 25\%$  Άρα το 24 αντιστοιχεί στην κεντρική τιμή  $x_4 = \frac{\alpha+3c+\alpha+4c}{2} = 24 \Leftrightarrow \frac{2\alpha+7c}{2} = 24 \Leftrightarrow 2\alpha+7c=48$  **(2)**

Οι ισότητες (1) και (2) είναι σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και το λύνουμε:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3c = 32 \\ 2\alpha + 7c = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3c = 32 \\ (2\alpha + 7c) - (2\alpha + 3c) = 48 - 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3c = 32 \\ 4c = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3c = 32 \\ c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3 \cdot 4 = 32 \\ c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 32 - 12 \\ c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 20 \\ c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{20}{2} = 10 \\ c = 4 \end{cases}$$

Και ο πίνακας

γίνεται:

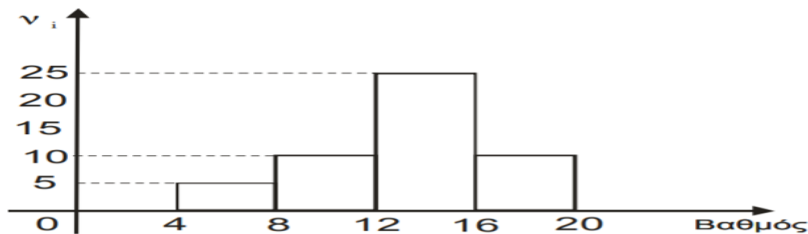
| κλάσεις  | $x_i$ | $f_i\%$ | $F_i$ | $F_i\%$ |
|----------|-------|---------|-------|---------|
| [10, 14) | 12    | 10      | 0,1   | 10      |
| [14, 18) | 16    | 30      | 0,4   | 40      |
| [18, 22) | 20    | 20      | 0,6   | 60      |
| [22, 26) | 24    | 30      | 0,9   | 90      |
| [26, 30) | 28    | 10      | 1     | 100     |
| Σύνολο   |       | 100     |       |         |

**δ)** Το πλήθος των παρατηρήσεων δεν είναι γνωστό αλλά είναι γνωστό το ποσοστό των παρατηρήσεων των κλάσεων [22,26) και [26,30) δηλαδή το ποσοστό μεγαλύτερο ή ίσο από 22 είναι  $f_4\% + f_5\% = 30\% + 10\% = 40\%$  Συνεπώς

Στο 40% των παρατηρήσεων αντιστοιχούν 800 παρατηρήσεις

Στο 100% των παρατηρήσεων αντιστοιχούν  $n$  παρατηρήσεις άρα  $\frac{40}{100} = \frac{800}{n} \Leftrightarrow 40n = 100 \cdot 800 \Leftrightarrow n = \frac{80000}{40} = 2000$

**22)** Σε ένα διαγώνισμα βιολογίας η βαθμολογία των μαθητών δένεται από το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων  $v_i$  :



α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| Κλάσεις | $x_i$ | $v_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| [4,8)   |       |       |       |       |       |
| [8,12)  |       |       |       |       |       |
| [12,16) |       |       |       |       |       |
| [16,20) |       |       |       |       |       |
| Σύνολα  |       |       |       |       |       |

β) Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών. { εκτός ύλης για 2020-21 }

γ) Πόσοι μαθητές έχουν βαθμό μέχρι και 10;

(ΓΕΛ 2005)

## 22) ΛΥΣΗ

α) Επειδή κάθε ορθογώνιο έχει ύψος όσο η συχνότητα της κλάσης, από το ιστόγραμμα έχουμε:

$$v_1 = 5, v_2 = 10, v_3 = 25, v_4 = 10$$

$$\beta) \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v} = \frac{660}{50} = 13,2$$

| Κλάσεις | $x_i$ | $v_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ | $x_i v_i$ |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|
| [4,8)   | 6     | 5     | 0,1   | 5     | 0,1   | 30        |
| [8,12)  | 10    | 10    | 0,2   | 15    | 0,3   | 100       |
| [12,16) | 14    | 25    | 0,5   | 40    | 0,8   | 350       |
| [16,20) | 18    | 10    | 0,2   | 50    | 1     | 180       |
| Σύνολα  |       | 50    | 1     |       |       | 660       |

γ) Μέχρι 10 έχουν βαθμολογία οι μαθητές που ανήκουν στις κλάσεις [4,8), [8,10) και επειδή το 10 είναι κεντρική τιμή της δεύτερης κλάσης η κλάση [8,10) περιέχει τις μισές παρατηρήσεις της κλάσης οπότε έχουμε

$$v_1 + \frac{v_2}{2} = 5 + \frac{10}{2} = 5 + 5 = 10$$

**23)** Οι τιμές της απώλειας βάρους ,σε κιλά,160 ατόμων, τα οποία ακολούθησαν ένα πρόγραμμα αδυνατίσματος έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

| Απώλεια βάρους | $x_i$    | $v_i$      |
|----------------|----------|------------|
| [ 0 , ...)     | ...      | <b>20</b>  |
| [... , ...)    | <b>6</b> | <b>40</b>  |
| [... , ...)    | ...      | <b>45</b>  |
| [... , ...)    | ...      | <b>30</b>  |
| [... , ...)    | ...      | <b>25</b>  |
| Σύνολα         |          | <b>160</b> |

α) Να αποδείξετε ότι το πλάτος  $c$  κάθε κλάσης είναι ίσο με 4 και να συμπληρώσετε τον πίνακα .

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  και την τυπική απόκλιση  $S$ .

γ) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. { εκτός ύλης για 2020-21 }

(ΓΕΛ 2010)

### 23) ΛΥΣΗ

α) Αν  $c$  το πλάτος της κλάσης τότε οι κλάσεις συμβολικά γράφονται:  $[0,c)$  ,  $[c,2c)$  ,  $[2c,3c)$  ,  $[3c,4c)$  ,  $[4c,5c)$  . Επειδή η κεντρική τιμή της δεύτερης κλάσης είναι 6 ισχύει:  $\frac{c+2c}{2} = 6 \Leftrightarrow 3c = 12 \Leftrightarrow c = \frac{12}{3} = 4$

| Απώλεια βάρους | $x_i$    | $v_i$      | $x_i v_i$   | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $(x_i - \bar{x})^2 v_i$ |
|----------------|----------|------------|-------------|-----------------|---------------------|-------------------------|
| [ 0 , 4)       | 2        | <b>20</b>  | <b>40</b>   | <b>-8</b>       | <b>64</b>           | <b>1280</b>             |
| [4 , 8)        | <b>6</b> | <b>40</b>  | <b>240</b>  | <b>-4</b>       | <b>16</b>           | <b>640</b>              |
| [8 , 12)       | 10       | <b>45</b>  | <b>450</b>  | <b>0</b>        | <b>0</b>            | <b>0</b>                |
| [12 , 16)      | 14       | <b>30</b>  | <b>420</b>  | <b>4</b>        | <b>16</b>           | <b>480</b>              |
| [16 , 20)      | 18       | <b>25</b>  | <b>450</b>  | <b>8</b>        | <b>64</b>           | <b>1600</b>             |
| Σύνολα         |          | <b>160</b> | <b>1600</b> |                 |                     | <b>4000</b>             |

$$\beta) \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{v} = \frac{1600}{160} = 10 \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{4000}{160} = 25 \quad \text{άρα } S = \sqrt{25} = 5$$

$$\gamma) CV = \frac{S}{\bar{x}} 100\% = \frac{5}{10} = 0,5 = 50\% > 10\% \text{ άρα ανομοιογενές το δείγμα}$$

**24)** Οι πωλήσεις σε χιλιάδες ευρώ που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά την διάρκεια ενός έτους, ομαδοποιήθηκαν σε πίνακα συχνοτήτων με κλάσεις ίσου πλάτους. Το αντίστοιχο πολύγωνο εκατοστιαίων σχετικών συχνοτήτων  $f_i\%$  έχει διαδοχικές κορυφές τις:

A(8 , 0) , B(10 , 10) , Γ(12 , 20) , Δ(14 ,  $\Psi_\Delta$ ) , E(16 ,  $\Psi_E$ ) , Z(18 , 10) , H(20 , 0) όπου

$\Psi_\Delta$  ,  $\Psi_E$  οι τεταγμένες των κορυφών Δ και Ε του πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΗ .

α) Να υπολογισθούν οι τεταγμένες  $\Psi_\Delta$  και  $\Psi_E$  των κορυφών Δ και Ε, αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα.

β) Να σχεδιαστεί το πολύγωνο των εκατοστιαίων σχετικών συχνοτήτων  $f_i\%$  .

γ) Να κατασκευασθεί ο πίνακας των σχετικών συχνοτήτων  $f_i\%$  της κατανομής των πωλήσεων που έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.

δ) Η διεύθυνση της εταιρείας αποφάσισε τη χορήγηση ενός επιπλέον εφάπαξ ποσού σε όσους πωλητές έχουν κάνει ετήσιες πωλήσεις τουλάχιστον 15000 ευρώ. Να υπολογιστεί το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν αυτό το ποσό

ε) Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων, οι οποίες έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας, κατά τη διάρκεια ενός έτους και του οριζόντιου άξονα είναι 80. Να βρείτε τον αριθμό των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό που αναφέρεται στο δ) ερώτημα.

(ΓΕΛ 2011)

## 24) ΛΥΣΗ

| κλάσεις | $X_i$ | $f_i\%$ |
|---------|-------|---------|
| [9,11)  | 10    | 10      |
| [11,13) | 12    | 20      |
| [13,15) | 14    | 30      |
| [15,17) | 16    | 30      |
| [17,19) | 18    | 10      |
| Σύνολα  |       | 100     |

α) Γνωρίζουμε ότι το πολύγωνο εκατοστοστιαίων σχετικών συχνοτήτων δημιουργείται ενώνοντας τα μέσα των άνω πλευρών των ορθογωνίων. Η τετμημένη είναι η κεντρική τιμή της κλάσης και η τεταγμένη η εκατοστιαία σχετική συχνότητα της κλάσης. Άρα το άθροισμα των τεταγμένων ισούται με 100. Επιπλέον επειδή το τμήμα ΔΕ είναι

παράλληλο στον οριζόντιο άξονα οι τεταγμένες των άκρων του είναι ίσες :  $\psi_{\Delta} = \psi_E$   
 άρα  $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100\% \Leftrightarrow 10 + 20 + \psi_{\Delta} + \psi_{\Delta} + 10 = 100 \Leftrightarrow 2\psi_{\Delta} = 100 - 40 \Leftrightarrow 2\psi_{\Delta} = 60 \Leftrightarrow \psi_{\Delta} = \frac{60}{2} = 30 = \psi_E$

β)

γ)

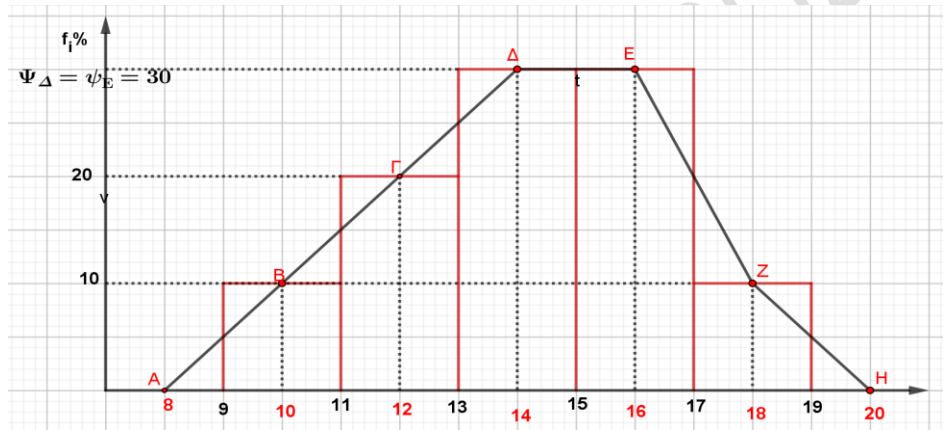
Έστω α η μικρότερη παρατήρηση και c το πλάτος της κλάσης. Δίνονται οι κεντρικές τιμές

$X_1=10$  ,  $X_2=12$  ,  $X_3=14$  ,  $X_4=16$  ,  $X_5=18$  (Οι τιμές 8 και 20 αναφέρονται σε κλάσεις μηδενικής συχνότητας που τις δημιουργούμε, για να αρχίζει και να τελειώνει το πολύγωνο στον οριζόντιο άξονα.)

Επειδή δύο διαδοχικές κεντρικές τιμές διαφέρουν ως προς το πλάτος άρα το πλάτος είναι :  $c = X_2 - X_1 = 12 - 10 = 2$  και η πρώτη κλάση γράφεται  $[\alpha, \alpha+2)$  οπότε η κεντρική τιμή  $X_1 = \frac{\alpha + \alpha + 2}{2} = 10 \Leftrightarrow \frac{2\alpha + 2}{2} = 10 \Leftrightarrow \alpha + 1 = 10 \Leftrightarrow \alpha = 10 - 1 = 9$

δ) Είναι οι υπάλληλοι των κλάσεων [15,17) και [17,19) άρα  $f_4\% + f_5\% = 30\% + 10\% = 40\%$

ε) Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του πολυγώνου στο ιστόγραμμα συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος n του δείγματος. Άρα  $n=80$  οπότε το 40% του συνόλου των πωλητών είναι :  $40\% \cdot n = 0,4 \cdot 80 = 32$



25) α) Να γράψετε στο τετράδιό σας τον πίνακα των τιμών της μεταβλητής X σωστά συμπληρωμένο.

| Τιμές μεταβλητής X | Συχνότητα $v_i$ | Σχετική συχνότητα $f_i$ | Εκατ.Σχετ. συχνότητα $f_i\%$ | Αθροιστική συχνότητα $N_i$ | $X_i v_i$ | $X_i^2$ | $X_i^2 v_i$ |
|--------------------|-----------------|-------------------------|------------------------------|----------------------------|-----------|---------|-------------|
| 1                  | 10              |                         |                              |                            | 10        | 1       | 10          |
| 2                  |                 |                         |                              | 35                         |           | 4       |             |
| 3                  |                 |                         |                              |                            |           | 9       |             |
| Σύνολο             | $n=50$          | 1                       | 100                          |                            |           |         |             |

β) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

γ) Να δείξετε ότι η διακύμανση είναι  $S^2 = 0,49$  Δίνεται  $S^2 = \frac{1}{v} \left[ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{(\sum_{i=1}^k x_i v_i)^2}{v} \right]$  (ΓΕΛ 2000)

25) ΛΥΣΗ

α)

| Τιμές μεταβλητής X | Συχνότητα $v_i$ | Σχετική συχνότητα $f_i$ | Εκατ.Σχετ. συχνότητα $f_i\%$ | Αθροιστική συχνότητα $N_i$ | $X_i v_i$ | $X_i^2$ | $X_i^2 v_i$ |
|--------------------|-----------------|-------------------------|------------------------------|----------------------------|-----------|---------|-------------|
| 1                  | 10              | 0,2                     | 20                           | 10                         | 10        | 1       | 10          |
| 2                  | 25              | 0,5                     | 50                           | 35                         | 50        | 4       | 100         |
| 3                  | 15              | 0,3                     | 30                           | 50                         | 45        | 9       | 135         |
| Σύνολο             | $n=50$          | 1                       | 100                          |                            | 105       |         | 245         |

**β)** Μέση τιμή  $\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3}{v_1 + v_2 + v_3} = \frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 15}{10 + 25 + 15} = \frac{10 + 50 + 45}{50} = \frac{105}{50} = 2,1$  Για την διάμεσο επειδή  $n=50$  είναι άρτιος, η διάμεσος θα είναι το ημίαθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων και αυτές βρίσκονται στις θέσεις

(όταν οι παρατηρήσεις τοποθετηθούν σε αύξουσα σειρά)  $\frac{v}{2}$  και  $\frac{v}{2} + 1$  αυτά με μορφή τύπου  $\delta = \frac{v_1 + v_2}{2}$  και για  $n=50$  οι θέσεις είναι  $\frac{50}{2} = 25$ η θέση και  $\frac{50}{2} + 1 = 25 + 1 = 26$ η θέση. Άρα  $\delta = \frac{2+2}{2} = 2$

{σχόλιο: Η αθροιστική συχνότητα μας δίνει τη διάταξη των παρατηρήσεων από την μικρότερη προς τη μεγαλύτερη. Έτσι από την πρώτη ως τη δέκατη θέση θα έχουμε την τιμή 1 της μεταβλητής, από την ενδέκατη ως την τριακοστή πέμπτη θέση έχουμε την τιμή 2 και από την τριακοστή έκτη θέση μέχρι την πεντηκοστή, έχουμε την τιμή 3}

**γ)** Έχουμε  $\sum_{i=1}^3 x_i^2 v_i = 245$  και  $\sum_{i=1}^3 x_i v_i = 105$  άρα  $(\sum_{i=1}^3 x_i v_i)^2 = 105^2 = 11025$  οπότε

$$S^2 = \frac{1}{50} \left[ 245 - \frac{11025}{50} \right] = \frac{1}{50} [245 - 220,5] = \frac{1}{50} 24,5 = 0,49$$

**26)** Στα σχολεία ενός δήμου υπηρετούν συνολικά 100 εκπαιδευτικοί. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

A) Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας

B) Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί, όταν συμπληρώσει 35 χρόνια:

α) πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια: Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Πόσοι συνολικά εκπαιδευτικοί πρέπει να προσληφθούν μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια, ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία του δήμου να παραμένει ο ίδιος: Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. ΓΕΛ 2000

| Χρόνια υπηρεσίας<br>[ - ) | Σχετική συχνότητα<br>$f_i\%$ |
|---------------------------|------------------------------|
| [0 - 5)                   | 10                           |
| [5-10)                    | 15                           |
| [10 - 15)                 | 12                           |
| [15 - 20)                 | 15                           |
| [20 - 25)                 | 18                           |
| [25 - 30)                 | 18                           |
| [30 - 35)                 | 12                           |

**26) ΛΥΣΗ** Επειδή το 10% των  $n=100$  εκπαιδευτικών ανήκουν στην πρώτη κλάση έχουμε:  $f_1\% = \frac{v_1}{n} 100 \Leftrightarrow v_1 = \frac{v f_1\%}{100} = \frac{100 \cdot 10}{100} = 10$ , όμοια  $v_2 = \frac{v f_2\%}{100} = \frac{100 \cdot 15}{100} = 15$ ,  $v_3 = \frac{v f_3\%}{100} = \frac{100 \cdot 12}{100} = 12$ ,  $v_4 = \frac{v f_4\%}{100} = \frac{100 \cdot 15}{100} = 15$ ,  $v_5 = \frac{v f_5\%}{100} = \frac{100 \cdot 18}{100} = 18$ ,  $v_6 = \frac{v f_6\%}{100} = \frac{100 \cdot 18}{100} = 18$ ,  $v_7 = \frac{v f_7\%}{100} = \frac{100 \cdot 12}{100} = 12$

Οι εκπαιδευτικοί που έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας θα είναι οι εκπαιδευτικοί των κλάσεων [15 – 20) , [20 - 25) , [25 - 30) , [30 - 35) , οπότε θα είναι συνολικά  $15+18+18+12=63$

B) α) Για τα επόμενα 12,5 χρόνια θα έχουν συμπληρώσει 35 χρόνια υπηρεσίας οι εκπαιδευτικοί των κλάσεων [25 – 30) και [30 – 35) , δηλαδή  $18+12=30$  καθώς και  $x$  εκπαιδευτικοί της κλάσης [20 - 25) που ανήκουν στην υποκλάση [22,5 – 25) . Θεωρώντας ότι τα 18 άτομα είναι ομοιόμορφα κατανομημένα οι 9 έχουν κάτω από 22,5 χρόνια υπηρεσίας. Άρα το σύνολο θα είναι  $30+9=39$

| Χρόνια υπηρεσίας<br>[ - ) | Σχετική συχνότητα<br>$f_i\%$ | Συχνότητα<br>$v_i$ |
|---------------------------|------------------------------|--------------------|
| [0 - 5)                   | 10                           | 10                 |
| [5-10)                    | 15                           | 15                 |
| [10 - 15)                 | 12                           | 12                 |
| [15 - 20)                 | 15                           | 15                 |
| [20 - 25)                 | 18                           | 18                 |
| [25 - 30)                 | 18                           | 18                 |
| [30 - 35)                 | 12                           | 12                 |
| Σύνολο                    | 100                          | 100                |

β) Μέσα στα επόμενα 5 χρόνια θα έχουν συμπληρώσει 35 χρόνια υπηρεσίας οι εκπαιδευτικοί της τελευταίας κλάσης δηλαδή 12. Άρα 12 εκπαιδευτικοί πρέπει να προσληφθούν, ώστε να παραμένει ο αριθμός των εκπαιδευτικών ο ίδιος.



**27)** Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ τάξης ενός λυκείου. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις .

| Βάρος σε κιλά<br>[ - ) | Αθροιστική σχετική συχνότητα<br>$F_i$ |
|------------------------|---------------------------------------|
| [45-55)                | 0,2                                   |
| [55-65)                | 0,5                                   |
| [65-75)                |                                       |
| [75-85)                |                                       |

Α) Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης , να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας ,που αντιστοιχούν στην τρίτη και τέταρτη κλάση.

Β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων.  
ΓΕΛ 2001

## 27) ΛΥΣΗ

**A)**

| Βάρος σε κιλά | $x_i$ | $v_i$  | $f_i$ | $F_i$ | $x_i v_i$ | $x_i f_i$ |
|---------------|-------|--------|-------|-------|-----------|-----------|
| [45-55)       | 50    | 16     | 0,2   | 0,2   | 800       | 10        |
| [55-65)       | 60    | 24     | 0,3   | 0,5   | 1440      | 18        |
| [65-75)       | 70    | 32     | 0,4   | 0,9   | 2240      | 28        |
| [75-85)       | 80    | 8      | 0,1   | 1     | 640       | 8         |
| Σύνολα        |       | $v=80$ | 1     |       | 5120      | 64        |

{σχόλιο: να θυμηθούμε ότι:  $F_1 = f_1$  ,  $F_2 - F_1 = f_2$  ,  $F_3 - F_2 = f_3$  ,  $F_4 - F_3 = f_4$  για να υπολογίσουμε τις σχετικές συχνότητες και από εκεί τη μέση τιμή  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i f_i}{\sum_{i=1}^4 f_i}$  ή να υπολογίσουμε και τις συχνότητες από  $f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i = v f_i$

,ώστε να πάρουμε τον τύπο  $\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 x_i v_i$  αν δεν θυμόμαστε τον πρώτο }

$F_2 - F_1 = f_2$  ; άρα  $0,5 - 0,2 = 0,3$  δίνεται ότι  $f_3 = 2f_1$  ή  $f_3 = 2 \cdot 0,2 = 0,4$  όμως ισχύει ότι  $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$

ή  $0,2 + 0,3 + 0,4 + f_4 = 1 \Leftrightarrow f_4 = 1 - 0,9 = 0,1$  οπότε  $F_3 = F_2 + f_3 = 0,5 + 0,4 = 0,9$  και  $F_4 = 1$  Για τις συχνότητες έχουμε:  $v_1 = v f_1$  ή  $v_1 = 80 \cdot 0,2 = 16$   $v_2 = v f_2$  ή  $v_2 = 80 \cdot 0,3 = 24$   $v_3 = v f_3$  ή  $v_3 = 80 \cdot 0,4 = 32$   $v_4 = v f_4$  ή  $v_4 = 80 \cdot 0,1 = 8$

Β) α τρόπος:  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i f_i}{\sum_{i=1}^4 f_i}$  ή  $\bar{x} = 50 \cdot 0,2 + 60 \cdot 0,3 + 70 \cdot 0,4 + 80 \cdot 0,1 = 10 + 18 + 28 + 8 = 64$

β τρόπος:  $\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 x_i v_i$  ή  $\bar{x} = \frac{5120}{80} = 64$

**28)** Το βάρος των αποσκευών καθενός εκ των 80 επιβατών μιας πτήσης κάποιας Αεροπορικής Εταιρείας είναι τουλάχιστον 11 κιλά αλλά μικρότερο από 26 κιλά. Γνωρίζουμε ότι 8 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 14 κιλά , το 30% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος μικρότερο από 17 κιλά , 48 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 20 κιλά και 15% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος τουλάχιστον 23 κιλά.

Α. Να παρασταθούν τα δεδομένα σε ένα πίνακα συχνοτήτων.

Β. Κάθε επιβάτης δικαιούται να μεταφέρει αποσκευές με βάρος μικρότερο των 20 κιλών , διαφορετικά έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση . Να βρείτε τι ποσοστό από τους 80 επιβάτες της πτήσης αυτής έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση.

Γ. Να βρεθούν οι γωνίες των αντίστοιχων κυκλικών τομέων του κυκλικού διαγράμματος σχετικών συχνοτήτων , για τα δεδομένα του προβλήματος.  
Επαν. ΓΕΛ 2001

## 28) ΛΥΣΗ

{ Σχόλιο: οι υπολογισμοί που γίνονται παρακάτω αφορούν το πρόχειρο .

Μόνο τον συμπληρωμένο πίνακα πρέπει να γράψουμε.

Ορίζοντας 5 κλάσεις με πλάτος c και επειδή η μικρότερη παρατήρηση είναι 11 οι κλάσεις είναι: [11,11+c) , [11+c,11+2c) , [11+2c,11+3c) , [11+3c,11+4c) ,

**A)**

| ΚΛΑΣΕΙΣ | $v_i$ | $N_i$ | $f_i\%$ | $F_i\%$ |
|---------|-------|-------|---------|---------|
| [11,14) | 8     | 8     | 10      | 10      |
| [14,17) | 16    | 24    | 20      | 30      |
| [17,20) | 24    | 48    | 30      | 60      |
| [20,23) | 20    | 68    | 25      | 85      |
| [23,26) | 12    | 80    | 15      | 100     |
| Σύνολα  | 80    |       | 100     |         |

11+4c, 11+5c) Επειδή το βάρος είναι μικρότερο από 26 κιλά θα ισχύει  $11+5c=26 \Leftrightarrow 5c=26-11 \Leftrightarrow 5c=15 \Leftrightarrow c=3$  και οι κλάσεις είναι [11,14), [14,17), [17,20), [20,23), [23, 26)

- ο 8 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 14 κιλά, (1<sup>η</sup> κλάση [11,14)) άρα  $v_1 = 8$
- ο 30% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος μικρότερο από 17 κιλά, (2<sup>η</sup> κλάση [14,17)) άρα  $F_2\% = 30$
- ο 48 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 20 κιλά, (3<sup>η</sup> κλάση [17,20)) άρα  $N_3 = 48$
- ο 15% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος τουλάχιστον 23 κιλά, (5<sup>η</sup> κλάση [23,26)) άρα  $f_5\% = 15$

$$F_1\% = f_1\% = \frac{v_1}{v} \cdot 100 = \frac{8}{80} \cdot 100 = 10, \quad F_2\% - F_1\% = f_2\% \text{ ή } 30 - 10 = 20, \quad v_2 = v \frac{f_2\%}{100} = 80 \frac{20}{100} = 16,$$

$$N_2 = 8 + 16 = 24, \quad N_3 - N_2 = v_3 \text{ ή } 48 - 24 = 24 = v_3, \quad f_3\% = \frac{24}{80} \cdot 100 = 30, \quad F_2\% + f_3\% = 30 + 30 = F_3\% = 60, \quad v_5 = v \frac{f_5\%}{100} = 80 \frac{15}{100} = 12, \quad v_4 = 80 - 8 - 16 - 24 - 12 = 80 - 60 = 20, \quad N_4 = 48 + 20 = 68,$$

$$f_4\% = \frac{20}{80} \cdot 100 = 25, \quad F_3\% + f_4\% = 60 + 25 = F_4\% = 85, \quad N_5 = 80 = v, \quad F_5\% = 85 + 15 = 100\}$$

**Β)** Οι επιβάτες που μεταφέρουν πάνω από 20 κιλά είναι οι επιβάτες που ανήκουν στις κλάσεις [20,23) και [23,26) **α τρόπος**  
:  $v_4 + v_5 = 20 + 12 = 32$  άρα το ποσοστό είναι  $\frac{32}{80} = 0,4 = \frac{4}{10} = \frac{40}{100} = 40\%$

**β τρόπος:**  $f_4\% + f_5\% = 25\% + 15\% = 40\%$  **γ τρόπος:**  $F_5\% - F_3\% = 100\% - 60\% = 40\%$

$$\Gamma) \alpha_1 = f_1 \cdot 360^\circ = 0,1 \cdot 360^\circ = 36^\circ$$

$$\alpha_2 = f_2 \cdot 360^\circ = 0,2 \cdot 360^\circ = 72^\circ$$

$$\alpha_3 = f_3 \cdot 360^\circ = 0,3 \cdot 360^\circ = 108^\circ$$

$$\alpha_4 = f_4 \cdot 360^\circ = 0,25 \cdot 360^\circ = 90^\circ$$

$$\alpha_5 = f_5 \cdot 360^\circ = 0,15 \cdot 360^\circ = 54^\circ$$

**29)** Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στις παρακάτω τιμές, σε Ευρώ: 8,10,13,13,15,16,18,14,14,9.

Α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο. (η επικρατούσα τιμή που ζητούσε είναι εκτός ύλης)

Β) Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.

Γ) Αν οι τιμές του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα υποστούν έκπτωση 10%, να εξετάσετε αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.

ΓΕΛ 2002

**29) ΛΥΣΗ**

$$\text{Α)} \bar{X} = \frac{8+10+13+13+15+16+18+14+14+9}{10} = \frac{130}{10} = 13$$

Βάζοντας τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά έχουμε: 8,9,10,13,13,14,14,15,16,18, το πλήθος των παρατηρήσεων είναι ζυγό άρα η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.  $\delta = \frac{13+14}{2} = \frac{27}{2} = 13,5$

$$\text{Β)} R = 18 - 8 = 10$$

$$S^2 = \frac{(8-13)^2 + (9-13)^2 + (10-13)^2 + (13-13)^2 \cdot 2 + (14-13)^2 \cdot 2 + (15-13)^2 + (16-13)^2 + (18-13)^2}{10}$$

$$= \frac{(-5)^2 + (-4)^2 + (-3)^2 + (0)^2 \cdot 2 + (1)^2 \cdot 2 + (2)^2 + (3)^2 + (5)^2}{10} = \frac{25 + 16 + 9 + 0 + 2 + 4 + 9 + 25}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

Άρα  $S = \sqrt{9} = 3$  και ο συντελεστής μεταβολής είναι  $CV = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{3}{13} = 0,23 = \frac{23}{100} = 23\%$

Γ) Αν  $x'$  η μειωμένη κατά την έκπτωση 10% τιμή θα ισχύει:  $x' = x - \frac{10}{100}x = (1 - \frac{10}{100})x = \frac{90}{100}x = 0,9x$  και η νέα μέση τιμή

$$\bar{X'} = \frac{0,9 \cdot 8 + 0,9 \cdot 10 + 0,9 \cdot 13 + 0,9 \cdot 13 + 0,9 \cdot 15 + 0,9 \cdot 16 + 0,9 \cdot 18 + 0,9 \cdot 14 + 0,9 \cdot 14 + 0,9 \cdot 9}{10} = \frac{0,9 \cdot 130}{10} = 0,9 \cdot 13$$

$$S'^2 = \frac{(0,9 \cdot 8 - 0,9 \cdot 13)^2 + (0,9 \cdot 9 - 0,9 \cdot 13)^2 + (0,9 \cdot 10 - 0,9 \cdot 13)^2 + (0,9 \cdot 13 - 0,9 \cdot 13)^2 \cdot 2}{10} + \frac{(0,9 \cdot 14 - 0,9 \cdot 13)^2 \cdot 2 + (0,9 \cdot 15 - 0,9 \cdot 13)^2 + (0,9 \cdot 16 - 0,9 \cdot 13)^2 + (0,9 \cdot 18 - 0,9 \cdot 13)^2}{10}$$

$$S'^2 = \frac{(0,9)^2 [(8-13)^2 + (9-13)^2 + (10-13)^2 + (13-13)^2 \cdot 2 + (14-13)^2 \cdot 2 + (15-13)^2 + (16-13)^2 + (18-13)^2]}{10} = (0,9)^2 \cdot 9$$

$$S' = \sqrt{(0,9)^2 \cdot 9} = 0,9 \cdot 3 \quad \text{και η νέα τυπική απόκλιση είναι} \quad CV' = \frac{S'}{\bar{x}'} = \frac{0,9 \cdot 3}{0,9 \cdot 13} = \frac{3}{13} = 0,23 = \frac{23}{100} = 23\% = CV$$

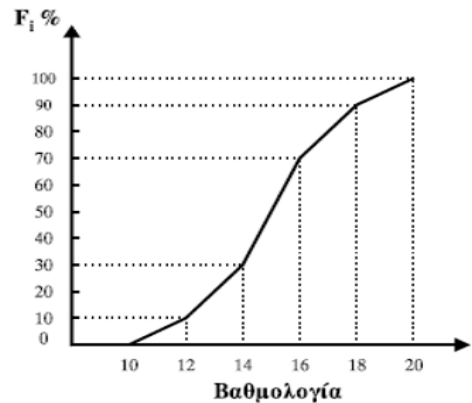
Ο συντελεστής μεταβολής παραμένει ίδιος. (δες και μάθε εφαρμογή 3 σελ.99 βιβλίου)

**30)** Στο διπλανό σχήμα δίνεται το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων, που παρουσιάζει τη βαθμολογία μιας ομάδας μαθητών στο μάθημα της ιστορίας. Η βαθμολογία κυμαίνεται από 10 μέχρι 20. Δίνεται ότι 10 μαθητές έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 και μικρότερο του 14.

Α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των μαθητών είναι 50.

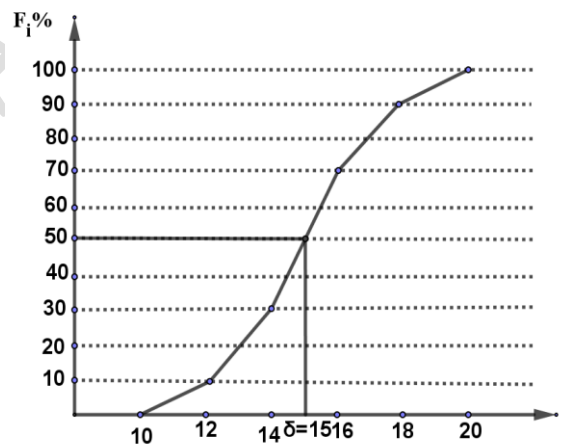
Β) Να βρείτε τη διάμεσο και τη μέση τιμή

Γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων Επαν 2002



### 30) ΛΥΣΗ

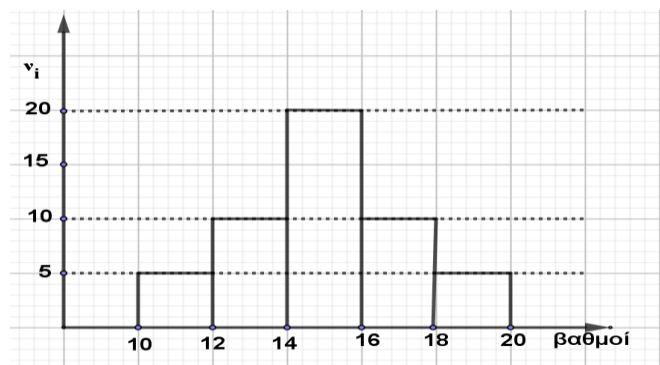
Α) Οι βαθμοί είναι ομαδοποιημένοι σε 5 κλάσεις τις  $[10,12)$ ,  $[12,14)$ ,  $[14,16)$ ,  $[16,18)$ ,  $[18,20)$ . Δίνεται ότι οι 10 μαθητές που έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 και μικρότερο του 14 ανήκουν στην δεύτερη κλάση, άρα  $v_2 = 10$ . Από το πολύγωνο έχουμε ότι  $F_2\% - F_1\% = f_2\%$  ή  $f_2\% = 30 - 10 = 20$  οπότε  $f_2 = 0,2 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow 0,2 = \frac{10}{v} \Leftrightarrow v = \frac{10}{0,2} = 50$  Β) Επειδή η διάμεσος χωρίζει το πλήθος των παρατηρήσεων σε δύο ίσα μέρη, όταν έχω διάγραμμα σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων βρίσκω στον κατακόρυφο άξονα το σημείο που τοποθετείται το 50%, φέρνω παράλληλη στον οριζόντιο άξονα μέχρι να συναντήσει το γράφημα και από εκεί φέρνω κάθετη στον οριζόντιο άξονα. Το σημείο (ο αριθμός) που θα συναντήσουμε στον οριζόντιο άξονα είναι η διάμεσος. Όπως φαίνεται στο πολύγωνο  $\delta = 15$



Γ)

| κλάσεις   | $x_i$ | $v_i$  | $f_i\%$ | $F_i\%$ | $x_i v_i$ |
|-----------|-------|--------|---------|---------|-----------|
| $[10,12)$ | 11    | 5      | 10      | 10      | 55        |
| $[12,14)$ | 13    | 10     | 20      | 30      | 130       |
| $[14,16)$ | 15    | 20     | 40      | 70      | 300       |
| $[16,18)$ | 17    | 10     | 20      | 90      | 170       |
| $[18,20)$ | 19    | 5      | 10      | 100     | 95        |
| Σύνολα    |       | $v=50$ | 100     |         | 750       |

$$\bar{x} = \frac{750}{50} = 15$$



**31)** Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς ,σε Ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα Α) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα Β) ενός γυμνασίου.

Α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας.

Β) Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες.

Γ) Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας Α γίνει αύξηση 20% και οι παρατηρήσεις της ομάδας Β αυξηθούν κατά 5 Ευρώ η κάθε μία, πως διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των δύο ομάδων;

Δ) Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες με τα νέα δεδομένα.

ΓΕΛ 2003

| Ομάδα Α | Ομάδα Β |
|---------|---------|
| 1       | 7       |
| 8       | 14      |
| 9       | 6       |
| 5       | 4       |
| 3       | 12      |
| 4       | 5       |

### 31) ΛΥΣΗ

#### Α) Ομάδα Α

$\bar{X}_A = \frac{1+8+9+5+3+4}{6} = \frac{30}{6} = 5$  Ταξινομούμε τις παρατηρήσεις κατά αύξουσα σειρά 1, 3, 4, 5, 8, 9 και επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι ζυγός αριθμός, η διάμεσος είναι το ημίαθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων  $\delta = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$

$\bar{X}_B = \frac{7+14+6+4+12+5}{6} = \frac{48}{6} = 8$  Ταξινομούμε τις παρατηρήσεις κατά αύξουσα σειρά 4, 5, 6, 7, 12, 14 και επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι ζυγός αριθμός, η διάμεσος είναι το ημίαθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων  $\delta = \frac{6+7}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$

$$\text{Β) } S_A^2 = \frac{(1-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (8-5)^2 + (9-5)^2}{6} = \frac{16+4+1+0+9+16}{6} = \frac{46}{6} = \frac{23}{3} \quad \text{άρα } S_A = \sqrt{\frac{23}{3}} = \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{3}}$$

$$CV_A = \frac{S_A}{\bar{X}_A} = \frac{\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{3}}}{5} = \frac{\sqrt{23}}{5\sqrt{3}}$$

$$S_B^2 = \frac{(4-8)^2 + (5-8)^2 + (6-8)^2 + (7-8)^2 + (12-8)^2 + (14-8)^2}{6} = \frac{16+9+4+1+16+36}{6} = \frac{82}{6} = \frac{41}{3} \quad \text{άρα } S_B = \sqrt{\frac{41}{3}} = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{3}}$$

$$CV_B = \frac{S_B}{\bar{X}_B} = \frac{\frac{\sqrt{41}}{\sqrt{3}}}{8} = \frac{\sqrt{41}}{8\sqrt{3}}$$

Λόγω ριζικών για να συγκρίνουμε υψώνουμε στο τετράγωνο:  $CV_A^2 = \left(\frac{\sqrt{23}}{5\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{23}{75} = 0,306 = 0,31$

$CV_B^2 = \left(\frac{\sqrt{41}}{8\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{41}{192} = 0,213 = 0,21$  άρα  $CV_B < CV_A$  Η ομάδα Β πιο ομοιογενής από την ομάδα Α

Γ) Κάθε τιμή της Α ομάδας αυξάνεται κατά 20% δηλαδή  $\chi'_A = \chi_A + \frac{20}{100}\chi_A = (1 + 0,2)\chi_A = 1,2\chi_A$  και βάσει της εφαρμογής 3 σελίδα 99 βιβλίου  $\bar{\chi}'_A = 1,2\bar{\chi}_A$  και  $S'_A = 1,2S_A$

Σε κάθε τιμή της Β ομάδας αυξάνεται κατά 5 δηλαδή  $\chi'_B = \chi_B + 5$  και βάσει της εφαρμογής 3 σελίδα 99 βιβλίου  $\bar{\chi}'_B = \bar{\chi}_B + 5 = 8+5=13$  και  $S'_B = S_B$  οπότε

$$CV'_A = \frac{S'_A}{\bar{\chi}'_A} = \frac{1,2S_A}{1,2\bar{\chi}_A} = \frac{S_A}{\bar{\chi}_A} = CV_A = \frac{\sqrt{23}}{5\sqrt{3}} \quad \text{και} \quad CV'_B = \frac{S'_B}{\bar{\chi}'_B} = \frac{\frac{\sqrt{41}}{\sqrt{3}}}{13} = \frac{\sqrt{41}}{13\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{41}}{8\sqrt{3}} = CV_B \quad \text{άρα}$$

$CV'_B < CV_B < CV_A$  Η ομάδα Β πιο ομοιογενής από την ομάδα Α

**32)** Η μέση τιμή των βαθμών που πήραν οι 25 μαθητές της Γ τάξης ενός λυκείου στα μαθηματικά είναι 14, ενώ η μέση τιμή των βαθμών των 10 μαθητών που παρουσίασαν τη μικρότερη βαθμολογία είναι 11.

Α) Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των 15 υπόλοιπων μαθητών.

Β) Αν το άθροισμα των τετραγώνων των βαθμών των 25 αυτών μαθητών είναι 5000, να βρείτε το συντελεστή μεταβολής (CV)

$$\text{Δίνεται: } S^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v t_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^v t_i)^2}{v} \right\}$$

Επαν.2004

**32) ΛΥΣΗ** (Δες και ασκήσεις 4,5,8 βιβλίου σελ 100)

$$\text{Α) } \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{25} t_i}{v} \Leftrightarrow 14 = \frac{\sum_{i=1}^{25} t_i}{25} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{25} t_i = 14 \cdot 25 = 350 \quad \bar{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} t_i}{10} \Leftrightarrow 11 = \frac{\sum_{i=1}^{10} t_i}{10} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{10} t_i = 11 \cdot 10 = 110$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{25} t_i - \sum_{i=1}^{10} t_i}{15} \Leftrightarrow \bar{X}_2 = \frac{350 - 110}{15} \Leftrightarrow \bar{X}_2 = \frac{240}{15} = 16$$

$$\text{β) } S^2 = \frac{1}{25} \left\{ \sum_{i=1}^{25} t_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{25} t_i)^2}{25} \right\} = \frac{\sum_{i=1}^{25} t_i^2}{25} - \frac{(\sum_{i=1}^{25} t_i)^2}{25^2} = \frac{\sum_{i=1}^{25} t_i^2}{25} - \bar{X}^2 = \frac{5000}{25} - 14^2 = 200 - 196 = 4$$

$$S = \sqrt{4} = 2 \quad C_v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{14} = 0,1429 = \frac{14,29}{100} = 14,29\%$$

**33)** Έστω  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{11}$  ένα δείγμα με παρατηρήσεις: 7, 5,  $\alpha$ , 2, 5,  $\beta$ , 8, 6,  $\gamma$ , 5, 3 όπου  $\alpha, \beta, \gamma$  φυσικοί αριθμοί με  $\alpha < \beta < \gamma$ . Δίνεται ότι η μέση τιμή, η διάμεσος και το εύρος των παρατηρήσεων είναι  $\bar{x} = 6$ ,  $\delta = 6$ , και  $R = 8$  αντίστοιχα.

Α) Να βρεθούν οι τιμές των  $\alpha, \beta, \gamma$ , έτσι ώστε να ισχύει  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 217$

Β) Για τις τιμές των  $\alpha, \beta, \gamma$  που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα, ναδειχθεί ότι η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι ίση με  $S_x = \sqrt{\frac{58}{11}}$  και να εξετασθεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Γ) Έστω  $y_1, y_2, \dots, y_{11}$  οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{11}$  επί μία θετική σταθερά  $c_1$  και στη συνέχεια προσθέσουμε μια σταθερά  $c_2$ . Αν  $\bar{y} = 9$  και  $S_y = 2S_x$  να βρεθούν οι τιμές των σταθερών  $c_1$  και  $c_2$ . (Δες εφαρμογή 3 και ασκήσεις 18 και 19 βιβλίου) επαν. 2007

**33) ΛΥΣΗ**

Επειδή  $v=11$  η διάμεσος  $\delta=6$  είναι η μεσαία παρατήρηση και θα έχουμε 5 παρατηρήσεις αριστερά της και 5 δεξιά της. Αν γράψουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά θα έχουμε 5 παρατηρήσεις μικρότερες του 6 τις

2, 3, 5, 5, 5 Άρα οι παρατηρήσεις  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 6, δηλαδή  $6 < \alpha < \beta < \gamma$  (δόθηκε  $\alpha < \beta < \gamma$ ) Οι άλλες δύο παρατηρήσεις είναι το 7 και το 8. Αν το 8 είναι η μεγαλύτερη παρατήρηση τότε το εύρος είναι

$$R=8-2=6 \text{ άτοπο διότι δόθηκε ότι } R=8 \text{ οπότε η μεγαλύτερη παρατήρηση θα είναι το } \gamma \text{ και θα ισχύει } \gamma-2=8 \Leftrightarrow \gamma=10$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{11} t_i}{v} \Rightarrow 6 = \frac{2+3+5+5+5+6+\alpha+\beta+7+8+\gamma}{11} \stackrel{\gamma=10}{\Leftrightarrow} 6 = \frac{41+\alpha+\beta+10}{11} \Leftrightarrow 41+\alpha+\beta+10=66 \Leftrightarrow \alpha=66-41-10-\beta \Leftrightarrow \alpha=15-\beta \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Δόθηκε ότι } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 217 \quad \stackrel{\gamma=10 \text{ και (1)}}{\Leftrightarrow} (15-\beta)^2 + \beta^2 + 10^2 = 217 \Leftrightarrow 225 - 30\beta + \beta^2 + \beta^2 + 100 = 217 \\ \Leftrightarrow 225 - 30\beta + \beta^2 + \beta^2 + 100 - 217 &= 0 \Leftrightarrow 2\beta^2 - 30\beta + 108 = 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 15\beta + 54 = 0 \end{aligned}$$

$$\{\text{πρόχειρο: } \Delta = (-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 54 = 225 - 216 = 9 \quad \left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{-(-15)+\sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{15+3}{2} = \frac{18}{2} = 9 \\ \beta_2 &= \frac{-(-15)+\sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{15-3}{2} = \frac{12}{2} = 6 \end{aligned} \right\}$$

$\beta_1 = 9$  και  $\beta_2 = 6$  οι ρίζες Η  $\beta_2 = 6$  απορρίπτεται διότι ισχύει από τα δεδομένα  $6 \leq \alpha < \beta < \gamma = 10$  άρα  $\beta=9$  και από την σχέση (1) έχουμε  $\alpha=15-9=6$  και οι παρατηρήσεις είναι : 2 , 3 , 5 , 5 , 5 , 6 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10

$$S_x^2 = \frac{(2-6)^2 + (3-6)^2 + (5-6)^2 \cdot 3 + (6-6)^2 \cdot 2 + (7-6)^2 + (8-6)^2 + (9-6)^2 + (10-6)^2}{11}$$

$$= \frac{(-4)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 \cdot 3 + (0)^2 \cdot 2 + (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2}{11} = \frac{16+9+3+0+1+4+9+16}{11} = \frac{58}{11} \quad \text{άρα} \quad S_x = \sqrt{\frac{58}{11}}$$

$$CV_x = \frac{S_x}{|\bar{X}|} = \frac{\sqrt{\frac{58}{11}}}{6} = \dots; \quad \{\text{σχόλιο: Το ερωτηματικό μπήκε για να αναρωτηθείτε: Πρέπει να υπολογίσω κατά προσέγγιση τη}$$

ρίζα και μετά να κάνω τη διαίρεση και να υπολογίσω το συντελεστή μεταβολής και να δώ την ομοιογένεια : ή υπάρχει άλλος τρόπος : Αν ήθελε το πρώτο θα μας έδινε μια τιμή για τη ρίζα ώστε όλοι οι μαθητές να βρίσκουν ίδιο αποτέλεσμα, αλλά δεν έδωσαν τιμή. Ο CV είναι θετικός αριθμός διότι ο μεν αριθμητής είναι τετραγωνική ρίζα εξ ορισμού θετική, ο δε παρονομαστής οφείλει να είναι θετικός, όπως σας περιγράφει στο βιβλίο ακριβώς κάτω από τον τύπο του CV. Για να μην το ξεχνάτε μπορείτε να γράφετε τον τύπο όπως παραπάνω.

Αφού ο CV είναι θετικός μπορώ να τον υψώσω στο τετράγωνο. Ακόμη να θυμηθούμε από την Α λυκείου (μη θυμώνετε!!!! Θα χρειασθεί και στην επόμενη άσκηση) σελ 55 την ιδιότητα 4 που λέει : << για θετικούς αριθμούς  $\alpha$ ,  $\beta$  και θετικό ακέραιο  $n$  ισχύει η ισοδυναμία  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n$  >> Για να είναι ομοιογενές το δείγμα πρέπει

$$CV \leq 10\% \Leftrightarrow CV \leq \frac{10}{100} \Leftrightarrow CV \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow CV^2 \leq \left(\frac{1}{10}\right)^2 \Leftrightarrow CV^2 \leq \frac{1}{100} \quad \text{Επομένως: } \}$$

$$CV_x = \frac{S_x}{|\bar{X}|} = \frac{\sqrt{\frac{58}{11}}}{6} \Leftrightarrow CV_x^2 = \left(\frac{\sqrt{\frac{58}{11}}}{6}\right)^2 = \frac{\frac{58}{11}}{36} = \frac{29}{198} > \frac{1}{100} \quad \text{επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.}$$

{σχόλιο: δείτε την εφαρμογή 3 σελ 99 βιβλίο και συγκεντρωτικά συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα}

|    | Μεταβολή τιμών             |                                                           |             | Νέα Μέση τιμή                      | Νέα Διακύμανση           | Νέα Τυπική απόκλιση  |
|----|----------------------------|-----------------------------------------------------------|-------------|------------------------------------|--------------------------|----------------------|
| Av | $y_i = x_i + \beta$        | $i=1,2,3, \dots, n$<br>και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ | Τότε ισχύει | $\bar{y} = \bar{x} + \beta$        | $S_y^2 = S_x^2$          | $S_y = S_x$          |
|    | $y_i = \alpha x_i$         |                                                           |             | $\bar{y} = \alpha \bar{x}$         | $S_y^2 = \alpha^2 S_x^2$ | $S_y =  \alpha  S_x$ |
|    | $y_i = \alpha x_i + \beta$ |                                                           |             | $\bar{y} = \alpha \bar{x} + \beta$ | $S_y^2 = \alpha^2 S_x^2$ | $S_y =  \alpha  S_x$ |

Γ) Η νέα μέση τιμή είναι  $\bar{y} = c_1 \bar{x} + c_2$  και για  $\bar{x} = 6$  και  $\bar{y} = 9$  παίρνουμε  $9 = 6 \cdot c_1 + c_2$  (2)

$$\begin{cases} S_y = c_1 S_x \\ S_y = 2 S_x \end{cases} \Leftrightarrow 2 S_x = c_1 S_x \Leftrightarrow c_1 = 2 \quad \text{και από την (2) για } c_1 = 2 \quad \text{έχουμε } 9 = 6 \cdot 2 + c_2 \Leftrightarrow 9 = 12 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = -3$$

34) Για δύο τύπους μπαταριών Α και Β επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στον επόμενο πίνακα.

| A  | B  |
|----|----|
| 20 | 26 |
| 26 | 32 |
| 24 | 19 |
| 22 | 20 |
| 18 | 23 |

Α) Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α και μιας μπαταρίας τύπου Β.

Β) Αν μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει 38 ευρώ και μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει 40 ευρώ, ποιόν τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε: (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

Γ) Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις  $S_A$  και  $S_B$  της διάρκειας ζωής των δύο μπαταριών.

Δ) Να βρείτε ποιος από τους δύο τύπους μπαταριών Α και Β παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του. Δίνεται ότι  $\sqrt{11} = 3,3$  ΓΕΛ 2008

34) ΛΥΣΗ

$$A) \bar{X}_A = \frac{\sum_{i=1}^5 t_i}{n} = \frac{20 + 26 + 24 + 22 + 18}{5} = \frac{110}{5} = 22 \quad \text{και} \quad \bar{X}_B = \frac{\sum_{i=1}^5 t_i}{n} = \frac{26 + 32 + 19 + 20 + 23}{5} = \frac{120}{5} = 24$$

Β) Κατά μέσο όρο (αυτό σημαίνει κρίνουμε την τιμή με βάση τον μέσο όρο κάθε τύπου μπαταρίας) μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει  $\frac{38}{22} = 1,73$  € ανά 1000 ώρες, ενώ κατά μέσο όρο μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει  $\frac{40}{24} = 1,67$  € ανά 1000 ώρες. Άρα συμφέρει η αγορά μπαταρίας τύπου Β.

Γ)

$$S_A^2 = \frac{(18-22)^2 + (20-22)^2 + (22-22)^2 + (24-22)^2 + (26-22)^2}{5} = \frac{(-4)^2 + (-2)^2 + (0)^2 + (2)^2 + (4)^2}{5} = \frac{16+4+4+16}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

Άρα  $S_A = \sqrt{8}$

$$S_B^2 = \frac{(19-24)^2 + (20-24)^2 + (23-24)^2 + (26-24)^2 + (32-24)^2}{5} = \frac{(-5)^2 + (-4)^2 + (-1)^2 + (2)^2 + (8)^2}{5} = \frac{25+16+1+4+64}{5} = \frac{110}{5} = 22$$

Άρα  $S_B = \sqrt{22}$

Δ) Για να συγκρίνουμε τους δύο τύπους ως προς την ομοιογένεια πρέπει να συγκρίνουμε τους συντελεστές μεταβολής τους.

$$CV_A = \frac{S_A}{\bar{X}_A} = \frac{\sqrt{8}}{22} \quad \text{και} \quad CV_B = \frac{S_B}{\bar{X}_B} = \frac{\sqrt{22}}{24}, \quad CV_A^2 = \left(\frac{\sqrt{8}}{22}\right)^2 = \frac{8}{484} = 0,0165 \quad \text{και} \quad CV_B^2 = \left(\frac{\sqrt{22}}{24}\right)^2 = \frac{22}{576} = 0,038$$

είναι  $CV_A^2 < CV_B^2$  άρα  $CV_A < CV_B$  Δηλαδή η ομάδα Α είναι πιο ομοιογενής από τη Β

35) Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  μιας μεταβλητής  $X$  με αντίστοιχες συχνότητες

$v_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  Η μεταβλητή  $v_2$  που αντιστοιχεί στην τιμή  $x_2 = 3$  είναι άγνωστη. Δίνεται ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι ίση με  $\bar{x} = 4$

| $x_i$ | $v_i$ |
|-------|-------|
| 2     | 6     |
| 3     | :     |
| 5     | 3     |
| 8     | 4     |

Α) Να αποδείξετε ότι  $v_2 = 7$

Β) Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι ίση με 4,9

Γ) Να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών της μεταβλητής  $X$  είναι ομοιογενές. Δίνεται ότι  $\sqrt{4,9} = 2,2$  Γελ 200

35) ΛΥΣΗ

| $x_i$ | $v_i$      | $x_i v_i$   |
|-------|------------|-------------|
| 2     | 6          | 12          |
| 3     | $v_2$      | $3v_2$      |
| 5     | 3          | 15          |
| 8     | 4          | 32          |
| Σύν   | $13 + v_2$ | $59 + 3v_2$ |

$$\text{Α) } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i \times v_i}{v} \Leftrightarrow 4 = \frac{59 + 3v_2}{13 + v_2} \Leftrightarrow 52 + 4v_2 = 59 + 3v_2$$

$$\Leftrightarrow 4v_2 - 3v_2 = 59 - 52 \Leftrightarrow v_2 = 7$$

Β)

| $x_i$ | $v_i$    | $x_i v_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $(x_i - \bar{x})^2 v_i$ |
|-------|----------|-----------|-----------------|---------------------|-------------------------|
| 2     | 6        | 12        | -2              | 4                   | 24                      |
| 3     | 7        | 21        | -1              | 1                   | 7                       |
| 5     | 3        | 15        | 1               | 1                   | 3                       |
| 8     | 4        | 32        | 4               | 16                  | 64                      |
| Σύν   | $v = 20$ | 90        |                 |                     | 98                      |

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{98}{20} = 4,9$$

$$S = \sqrt{4,9} = 2,2$$

Γ)  $CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{2,2}{4} = 0,55 = \frac{55}{100} = 55\% > 10\%$  άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

**36)** Έστω  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$  οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  ενός δείγματος μεγέθους  $n=72$  με αντίστοιχες (απόλυτες) συχνότητες  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$  όπου  $\nu_4 = 3\nu_3$ . Δίνεται επίσης ότι τα τόξα του κυκλικού διαγράμματος συχνοτήτων που αντιστοιχούν στις τιμές  $\chi_1$  και  $\chi_2$  είναι αντίστοιχα  $50^\circ$  και  $30^\circ$ .

A) Να βρεθούν οι συχνότητες  $\nu_i, i = 1, 2, 3, 4$

B) Να βρεθούν τα τόξα που αντιστοιχούν στις τιμές  $\chi_3$  και  $\chi_4$

Γ) Δίνεται ότι  $\chi_1 < -7, \chi_2 = -7, \chi_3 = 3$ , και  $\chi_4 > 3$  Να δειχθεί ότι:  $10R + 72\bar{x} = 52\delta$  όπου

$R, \bar{x}, \delta$  είναι αντίστοιχα το εύρος, η μέση τιμή και η διάμεσος των παρατηρήσεων. Επαν. 2009

### 36) ΛΥΣΗ

$$A) \alpha_1 = \frac{\nu_1}{n} 360^\circ \Leftrightarrow 50^\circ = \frac{\nu_1}{72} 360^\circ \Leftrightarrow 50^\circ = 5^\circ \nu_1 \Leftrightarrow \nu_1 = \frac{50^\circ}{5^\circ} = 10$$

$$\alpha_2 = \frac{\nu_2}{n} 360^\circ \Leftrightarrow 30^\circ = \frac{\nu_2}{72} 360^\circ \Leftrightarrow 30^\circ = 5^\circ \nu_2 \Leftrightarrow \nu_2 = \frac{30^\circ}{5^\circ} = 6$$

$$\begin{cases} \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = n \\ \mu\epsilon \end{cases} \quad \text{οπότε } 10 + 6 + \nu_3 + 3\nu_3 = 72 \Leftrightarrow 4\nu_3 = 72 - 16 \Leftrightarrow 4\nu_3 = 56 \Leftrightarrow \nu_3 = 14 \text{ άρα } \nu_4 = 3 \cdot 14 = 42$$

$$\nu_1 = 10, \nu_2 = 6, \nu_4 = 3\nu_3$$

$$B) \alpha_3 = \frac{\nu_3}{n} 360^\circ = \frac{14}{72} 360^\circ = 14 \cdot 5^\circ = 70^\circ \quad \text{και} \quad \alpha_4 = \frac{\nu_4}{n} 360^\circ = \frac{42}{72} 360^\circ = 42 \cdot 5^\circ = 210^\circ$$

Γ) Με βάση τη σχέση των τιμών που δόθηκε η τιμές διατάσσονται ως  $\chi_1 < \chi_2 < \chi_3 < \chi_4$

{σχόλιο: Δεν γνωρίζουμε τις τιμές της μεταβλητής άρα δεν μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε τη διάμεσο. Όμως όπως γράψαμε και σε άλλη άσκηση η αθροιστική συχνότητα μας δίνει τη διάταξη των τιμών και επειδή το πλήθος είναι ζυγό η

διάμεσος θα είναι  $\delta = \frac{t_{\nu} + t_{\nu+1}}{2} = \frac{t_{\frac{72}{2}} + t_{\frac{72}{2}+1}}{2} = \frac{t_{36} + t_{37}}{2}$ . Άρα είναι το ημίαθροισμα των τιμών που θα βρίσκονται στην 36<sup>η</sup> και 37<sup>η</sup>

θέση όταν ταξινομήσουμε τις τιμές κατά αύξουσα σειρά. Παίρνουμε το Α μέλος και αντικαθιστούμε τα σύμβολα με βάση τις τιμές της μεταβλητής και γιαυτό κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα}

| $\chi_i$      | $\nu_i$ | $N_i$ | $\chi_i \nu_i$                             |
|---------------|---------|-------|--------------------------------------------|
| $\chi_1$      | 10      | 10    | $10\chi_1$                                 |
| $\chi_2$      | 6       | 16    | $6\chi_2$                                  |
| $\chi_3$      | 14      | 30    | $14\chi_3$                                 |
| $\chi_4$      | 42      | 72    | $42\chi_4$                                 |
| <b>Σύνολα</b> | $n=72$  |       | $10\chi_1 + 6\chi_2 + 14\chi_3 + 42\chi_4$ |

$$R = \chi_4 - \chi_1$$

$$\bar{x} = \frac{10\chi_1 + 6\chi_2 + 14\chi_3 + 42\chi_4}{72}$$

Από την αθροιστική συχνότητα προκύπτει ότι στην Τρίτη γραμμή έχω μέχρι την 30<sup>η</sup> θέση, άρα η 36<sup>η</sup> και 37<sup>η</sup> θέση είναι στην τέταρτη γραμμή όπου αντιστοιχεί η τιμή

$$\chi_4 \text{ άρα } \delta = \frac{\chi_4 + \chi_4}{2} = \chi_4$$

$$10R + 72\bar{x} = 10(\chi_4 - \chi_1) + 72 \frac{10\chi_1 + 6\chi_2 + 14\chi_3 + 42\chi_4}{72} = 10\chi_4 - 10\chi_1 + 10\chi_1 + 6\chi_2 + 14\chi_3 + 42\chi_4$$

$$= 6\chi_2 + 14\chi_3 + 52\chi_4 = 6(-7) + 14 \cdot 3 + 52\chi_4 = 52\chi_4 - 42 + 42 = 52\chi_4 = 52\delta$$

**37)** Οι ηλικίες των εργαζομένων σε μια εταιρεία έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων.

| ΗΛΙΚΙΕΣ (χρόνια) | $x_i$ | $\nu_i$ | $f_i\%$    | $N_i$ | $F_i$ | $x_i \nu_i$ |
|------------------|-------|---------|------------|-------|-------|-------------|
| [25, )           |       |         | x          |       |       |             |
| [ , )            |       |         | x + 20     |       |       |             |
| [ , )            |       |         | 2x         |       |       |             |
| [ , )            |       |         | $x^2 - 6x$ | 50    |       |             |
| <b>Σύνολο</b>    |       |         |            |       |       |             |

A) Να βρεθούν οι σχετικές συχνότητες  $f_i\%$   $i = 1, 2, 3, 4$

B) Αν η διάμεσος της κατανομής των ηλικιών είναι  $\delta=50$  χρόνια, να αποδείξετε ότι το πλάτος της κλάσης είναι  $c = 10$

Γ) Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα συμπληρωμένο κατάλληλα, να υπολογίσετε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  των ηλικιών.

Δ) Πόσοι εργαζόμενοι, των οποίων οι ηλικίες ανήκουν στην πρώτη κλάση, πρέπει να προσληφθούν, ώστε η νέα μέση ηλικία να είναι 40 χρόνια; Επαν. 2011

### 37) ΛΥΣΗ



A) Το άθροισμα των εκατοστιαίων σχετικών συχνοτήτων είναι 100  $\sum_{i=1}^4 f_i\% = 100\% \Leftrightarrow x+x+20+2x+x^2 - 6x=100 \Leftrightarrow$

$x^2 - 2x - 80 = 0 \Leftrightarrow x = 10 \quad \text{ή} \quad x = -8$  η αρνητική τιμή απορρίπτεται διότι δεν υπάρχουν αρνητικές συχνότητες. Άρα

$f_1\% = 10\%$  ,  $f_2\%=30\%$  ,  $f_3\%=20\%$  ,  $f_4\%=40\%$

B)

Δίνεται ότι η διάμεσος είναι  $\delta=50$

Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος χωρίζει το δείγμα σε δύο ίσα μέρη και ποιο αναλυτικά είναι η τιμή για την οποία το πολύ το 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν (όταν διαταχθούν ,δηλαδή τοποθετηθούν σε σειρά από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη ) και το πολύ το 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτή. Με τα δεδομένα του πρώτου ερωτήματος κατασκευάζουμε πίνακα σχετικών συχνοτήτων και σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.

| ΚΛΑΣΕΙΣ<br>χρόνια | $f_i\%$ | $F_i\%$ |
|-------------------|---------|---------|
| $[25,25+c)$       | 10      | 10      |
| $[25+c,25+2c)$    | 30      | 40      |
| $[25+2c,25+3c)$   | 20      | 60      |
| $[25+3c,25+4c)$   | 40      | 100     |
| ΣΥΝΟΛΟ            | 100     |         |

$$F_1\% = f_1\% = 10 \quad F_2\% = F_1\% + f_2\% = 10 + 30 = 40 \quad , \quad F_3\% = F_2\% + f_3\% = 40 + 20 = 60 \quad , \quad F_4 = 100$$

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα, κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων. Στο 50% του κατακόρυφου άξονα φέρνουμε ευθεία παράλληλη στον οριζόντιο άξονα μέχρι που θα συναντήσει το πολύγωνο και από εκεί κάθετη στον οριζόντιο άξονα. Το σημείο όπου συναντά τον άξονα ,είναι η διάμεσος  $\delta=50$  . Τα τρίγωνα ABΓ και AΔΕ είναι όμοια ( ορθογώνια και γωνία Α κοινή) οπότε έχουμε την αναλογία:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{B\Gamma}{\Delta E} \Leftrightarrow \frac{50 - 40}{60 - 40} = \frac{50 - (25 + 2c)}{25 + 3c - (25 + 2c)} \Leftrightarrow \frac{50 - 40}{60 - 40} = \frac{50 - 25 - 2c}{25 + 3c - 25 - 2c} \Leftrightarrow \frac{10}{20} = \frac{25 - 2c}{c}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{25-2c}{c} \Leftrightarrow c = 2(25 - 2c) \Leftrightarrow c = 50 - 4c \Leftrightarrow 4c + c = 50 \Leftrightarrow 5c = 50 \Leftrightarrow c = \frac{50}{5} = 10$$

Γ) Από τον πίνακα που μας δόθηκε παίρνουμε ότι  $n=N_4=50$  και οι συχνότητες είναι :  $v_1 = \frac{vf_1\%}{100} = \frac{50 \cdot 10}{100} = 5$  ,

$$v_2 = \frac{vf_2\%}{100} = \frac{50 \cdot 30}{100} = 15 \quad , \quad v_3 = \frac{vf_3\%}{100} = \frac{50 \cdot 20}{100} = 10 \quad , \quad v_4 = \frac{vf_4\%}{100} = \frac{50 \cdot 40}{100} = 20 \quad , \quad \text{και οι κλάσεις είναι:}$$

$$[25,35) \quad , \quad [35,45) \quad , \quad [45,55) \quad , \quad [55,65) \quad \text{και οι κεντρικές τιμές είναι:} \quad \chi_1 = \frac{25+35}{2} = \frac{60}{2} = 30 \quad ,$$

$$\chi_2 = \chi_1 + c = 30 + 10 = 40 \quad , \quad \chi_3 = \chi_2 + c = 40 + 10 = 50 \quad , \quad \chi_4 = \chi_3 + c = 50 + 10 = 60$$

$N_1 = v_1 = 5$  ,  $N_2 = N_1 + v_2 = 5 + 15 = 20$  ,  $N_3 = N_2 + v_3 = 20 + 10 = 30$  ,  $N_4 = N_3 + v_4 = 30 + 20 = 50$  και ο πίνακας που δόθηκε συμπληρωμένος είναι:

| ΗΛΙΚΙΕΣ<br>(χρόνια) | $x_i$ | $v_i$  | $f_i\%$ | $N_i$ | $F_i\%$ | $x_i v_i$ |
|---------------------|-------|--------|---------|-------|---------|-----------|
| $[25, 35)$          | 30    | 5      | 10      | 5     | 10      | 150       |
| $[35, 45)$          | 40    | 15     | 30      | 20    | 40      | 600       |
| $[45, 55)$          | 50    | 10     | 20      | 30    | 60      | 500       |
| $[55, 65)$          | 60    | 20     | 40      | 50    | 100     | 1200      |
| Σύνολο              |       | $n=50$ | 100     |       |         | 2450      |

$$\text{Η μέση τιμή είναι : } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v} = \frac{2450}{50} = 49$$

Δ) Έστω  $v'$  ο αριθμός των εργαζόμενων της πρώτης κλάσης που πρέπει να προσληφθούν ώστε η μέση τιμή να είναι

$\bar{x}' = 40$  οπότε αναλυτικά η μέση τιμή θα είναι :

$$\bar{x}' = \frac{\chi_1(v_1+v') + \chi_2 v_2 + \chi_3 v_3 + \chi_4 v_4}{v+v'} \Leftrightarrow \bar{x}' = \frac{\chi_1 v' + \chi_1 v_1 + \chi_2 v_2 + \chi_3 v_3 + \chi_4 v_4}{v+v'} \Leftrightarrow \bar{x}' = \frac{\chi_1 v' + \sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v+v'} \Leftrightarrow 40 = \frac{30v' + 2450}{50+v'}$$

$$\Leftrightarrow 40(50 + \nu') = 5\nu' + 2450 \Leftrightarrow 2000 + 40\nu' = 30\nu' + 2450 \Leftrightarrow 40\nu' - 30\nu' = 2450 - 2000 \Leftrightarrow 10\nu' = 450 \Leftrightarrow \nu' = \frac{450}{10} = 45$$

Άρα πρέπει να προσληφθούν 45 άτομα στην πρώτη κλάση για να είναι 40 η μέση τιμή.

**38)** Θεωρούμε ένα δείγμα  $n$  παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής  $x$ , τις οποίες ομαδοποιούμε σε 4 ισοπλάτεις κλάσεις. Δίνεται ότι:

- η μικρότερη παρατήρηση είναι 50.
- η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι  $\chi_4 = 85$
- η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τρίτης κλάσης.
- η διάμεσος των παρατηρήσεων του δείγματος είναι  $\delta = 75$  και
- η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι  $\bar{x} = 74$

**A)** Να αποδείξετε ότι το πλάτος είναι  $c = 10$

**B)** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο σωστά.

| κλάσεις | Κεντρικές τιμές $\chi_i$ | Σχετική συχνότητα $f_i$ |
|---------|--------------------------|-------------------------|
| [ , )   |                          |                         |
| [ , )   |                          |                         |
| [ , )   |                          |                         |
| [ , )   |                          |                         |
| Σύνολο  |                          |                         |

**Γ)** Δίνεται ότι  $f_1 = 0,1$  ,  $f_2 = 0,3$  ,  $f_3 = 0,2$  ,  $f_4 = 0,4$

Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων , που είναι μικρότερες του 80, είναι  $\frac{200}{3}$

**Δ)** Επιλέγουμε  $k$  παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος με  $k < n$  οι οποίες ακολουθούν την κανονική κατανομή με

- Το 2,5% των παρατηρήσεων αυτών να είναι τουλάχιστον 74
- Το 16% των παρατηρήσεων αυτών να είναι το πολύ 68

Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων αυτών καθώς και να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

ΓΕΛ 2013

### 38) ΛΥΣΗ

Δεδομένα:  $k=4$  ,  $\chi_4 = 85$  ,  $f_4 = 2f_3$  ,  $\delta=75$  ,  $\bar{x} = 74$  ,  $\chi_{\text{ελάχιστο}} = 50$  και συμβολικά οι κλάσεις γράφονται:

**A)**  $[\alpha , \alpha+c)$  ,  $[\alpha +c, \alpha+2c)$  ,  $[\alpha+2c, \alpha+3c)$  ,  $[\alpha+3c, \alpha+4c)$  και επειδή  $\chi_{\text{ελάχιστο}} = 50$  άρα

$[50, 50+c)$  ,  $[50+c, 50+2c)$  ,  $[50+2c, 50+3c)$  ,  $[50+3c, 50+4c)$  είναι :  $\chi_4 = \frac{50+3c+50+4c}{2} = 85 \Leftrightarrow 100 + 7c = 170 \Leftrightarrow c = \frac{170}{7} = 10$  οπότε  $[50, 60)$  ,  $[60, 70)$  ,  $[70, 80)$  ,  $[80, 90)$

**B)** { θεωρώ ότι αν κάποιος συμπλήρωνε τις σχετικές συχνότητες από το τρίτο ερώτημα θα ήταν σωστό, γιατί οι υπολογισμοί κάνουν την άσκηση πιο σύνθετη και χρονοβόρα. Αν ήθελε υπολογισμούς θα το ζητούσε όπως σε άλλες ασκήσεις. Παρά ταύτα θα κάνουμε τους υπολογισμούς }

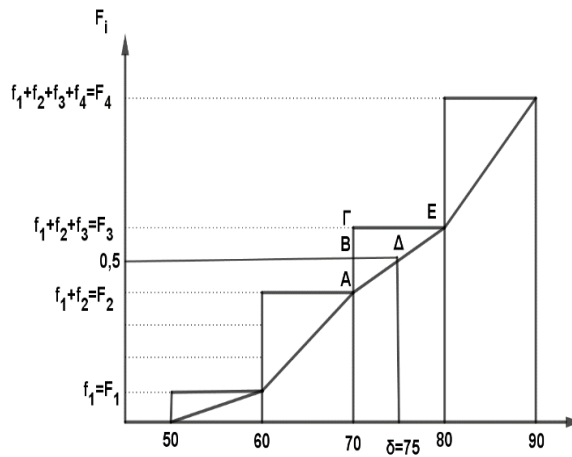
➤ Γνωρίζουμε ότι:  $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + f_3 + 2f_3 = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + 3f_3 = 1$  (1)

➤  $\bar{x} = \sum_{i=1}^4 x_i f_i = 74 \Leftrightarrow x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 = 74 \Leftrightarrow 55 f_1 + 65 f_2 + 75 f_3 + 85 f_4 = 74 \Leftrightarrow$

$55 f_1 + 65 f_2 + 75 f_3 + 85(2f_3) = 74 \Leftrightarrow 55 f_1 + 65 f_2 + 75 f_3 + 170 f_3 = 74 \Leftrightarrow 55 f_1 + 65 f_2 + 245 f_3 = 74$  (2)

➤  $\delta = 75 \quad f_1 + f_2 + \frac{f_3}{2} = \frac{50}{100} \Leftrightarrow f_1 + f_2 + \frac{f_3}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f_1 + 2f_2 + f_3 = 1$  (3)

➤ Λύνουμε το σύστημα των (1) , (2) , (3)



$$\begin{cases} f_1 + f_2 + 3f_3 = 1 \\ 55f_1 + 65f_2 + 245f_3 = 74 \\ 2f_1 + 2f_2 + f_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 + f_2 = 1 - 3f_3 \\ 55f_1 + 65f_2 + 245f_3 = 74 \\ 2(f_1 + f_2) + f_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1 + f_2 = 1 - 3f_3 \\ 55f_1 + 65f_2 + 245f_3 = 74 \\ 2(1 - 3f_3) + f_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 + f_2 = 1 - 3f_3 \\ 55f_1 + 65f_2 + 245f_3 = 74 \\ 2 - 6f_3 + f_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 + f_2 = 1 - 3f_3 \\ 55f_1 + 65f_2 + 245f_3 = 74 \\ -5f_3 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1 + f_2 = 1 - 3f_3 \\ 55f_1 + 65f_2 + 245f_3 = 74 \\ f_3 = \frac{1}{5} = 0,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 + f_2 = 1 - 3 \cdot 0,2 \\ 55f_1 + 65f_2 + 245 \cdot 0,2 = 74 \\ f_3 = \frac{1}{5} = 0,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 + f_2 = 0,4 \\ 55f_1 + 65f_2 + 49 = 74 \\ f_3 = \frac{1}{5} = 0,2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1 + f_2 = 0,4 \\ 55f_1 + 65f_2 = 25 \\ f_3 = \frac{1}{5} = 0,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 + f_2 = 0,4 \\ 11f_1 + 13f_2 = 5 \\ f_3 = \frac{1}{5} = 0,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 + f_2 = 0,4 \\ -11f_1 - 11f_2 = -4,4 \\ 11f_1 + 13f_2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1 + f_2 = 0,4 \\ 2f_2 = 0,6 \\ f_3 = \frac{1}{5} = 0,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 + f_2 = 0,4 \\ f_2 = 0,3 \\ f_3 = \frac{1}{5} = 0,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 + 0,3 = 0,4 \\ f_2 = 0,3 \\ f_3 = \frac{1}{5} = 0,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = 0,1 \\ f_2 = 0,3 \\ f_3 = 0,2 \end{cases}$$

οπότε  $f_4 = 1 - f_1 - f_2 - f_3 = 1 - 0,1 - 0,3 - 0,2 = 0,4$

| ΚΛΑΣΕΙΣ | $\chi_i$ | $f_i$ |
|---------|----------|-------|
| [50,60) | 55       | 0,1   |
| [60,70) | 65       | 0,3   |
| [70,80) | 75       | 0,2   |
| [80,90) | 85       | 0,4   |
| Συνολο  |          | 1     |

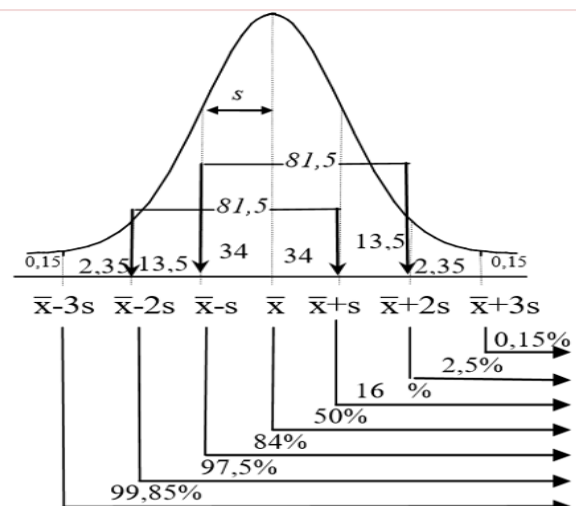
| ΚΛΑΣΕΙΣ | $\chi_i$ | $f_i$  | $F_i$              | $\chi_i f_i$             |
|---------|----------|--------|--------------------|--------------------------|
| [50,60) | 55       | $f_1$  | $f_1$              | $55f_1$                  |
| [60,70) | 65       | $f_2$  | $f_1 + f_2$        | $65f_2$                  |
| [70,80) | 75       | $f_3$  | $f_1 + f_2 + f_3$  | $75f_3$                  |
| [80,90) | 85       | $2f_3$ | $f_1 + f_2 + 3f_3$ | $170f_3$                 |
| Συνολο  |          | 1      |                    | $55f_1 + 65f_2 + 245f_3$ |

Γ)  $f_1 = \frac{v_1}{v} \Rightarrow v_1 = v f_1 \Rightarrow v_1 = 0,1v \Rightarrow$  όμοια  $v_2 = 0,3v$   $v_3 = 0,2v$

$$\bar{\chi} = \frac{\chi_1 v_1 + \chi_2 v_2 + \chi_3 v_3}{v_1 + v_2 + v_3} \Leftrightarrow \bar{\chi} = \frac{55v_1 + 65v_2 + 75v_3}{v_1 + v_2 + v_3} \Leftrightarrow \bar{\chi} = \frac{55 \cdot 0,1v + 65 \cdot 0,3v + 75 \cdot 0,2v}{0,1v + 0,3v + 0,2v} \Leftrightarrow$$

$$\bar{\chi} = \frac{5,5v + 19,5v + 15v}{0,6v} = \frac{40v}{0,6v} = \frac{40 \cdot 10}{0,6 \cdot 10} = \frac{400 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{200}{3}$$

Δ) {σχόλιο: σχεδιάζουμε πρόχειρα την καμπύλη της κανονικής κατανομής και γνωρίζοντας τα αριθμητικά δεδομένα των ποσοστών για κάθε διάστημα αθροίζουμε τα επί μέρους ποσοστά ανάλογα με τη διατύπωση του ερωτήματος της άσκησης. Στο διπλανό σχήμα τα βέλη απαντούν στο <<τουλάχιστον>> . Να κάνετε ένα αντίστοιχο δικό σας με τα βέλη αριστερά αλλάζοντας τα ποσοστά . Στη θέση του 0,15 το 99,85 κ.λ.π. και απαντάμε στο <<το πολύ>> }



- Το 2,5% των παρατηρήσεων αυτών να είναι τουλάχιστον 74 (αυτό στο γράφημα συμβολικά)
- Το 2,5% των παρατηρήσεων αυτών να είναι τουλάχιστον  $\bar{X} + 2S$  άρα

$$\bar{X} + 2S = 74 \quad (1)$$

- Το 16% των παρατηρήσεων αυτών να είναι το πολύ 68
- Το 16% των παρατηρήσεων αυτών να είναι το πολύ  $\bar{X} - S$  άρα

$$\bar{X} - S = 68 \quad (2) \quad \text{Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2)}$$

$$\begin{cases} \bar{X} + 2S = 74 \\ \bar{X} - S = 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{X} + 2S = 74 \\ -\bar{X} + S = -68 \end{cases} \Leftrightarrow 3S = 6 \Leftrightarrow$$

$$S = \frac{6}{3} = 2 \text{ οπότε } \bar{X} - S = 68 \Rightarrow \bar{X} - 2 = 68 \Leftrightarrow \bar{X} = 70 \text{ και ο συντελεστής μεταβολής είναι}$$

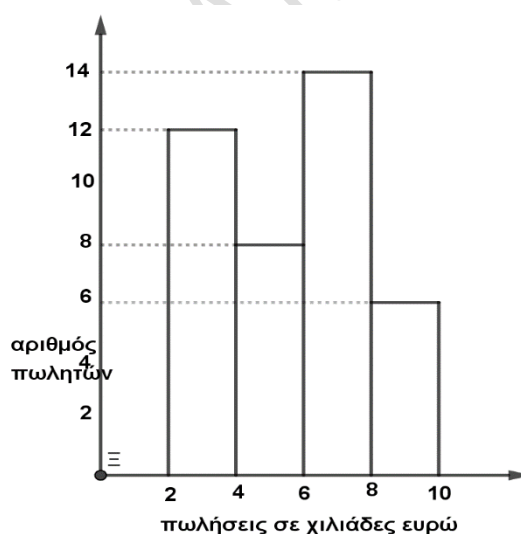
$$CV = \frac{S}{|\bar{X}|} = \frac{2}{70} = 0,02857 = \frac{2,86}{100} = 2,86\% \leq 10\% \quad , \text{ άρα είναι ομοιογενές το δείγμα.}$$

**39)** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων το οποίο παριστάνει τις πωλήσεις σε χιλιάδες ευρώ που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους

**A)** Να βρείτε το πλήθος των πωλητών της εταιρείας.

**B)** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων κατάλληλα συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τη στήλη με τις σχετικές συχνότητες  $f_i \quad i = 1, 2, 3, 4$

| κλάσεις | Κεντρ.τιμές<br>$\chi_i$ | $v_i$ | $f_i$ |
|---------|-------------------------|-------|-------|
| [ , )   |                         |       |       |
| [ , )   |                         |       |       |
| [ , )   |                         |       |       |
| [ , )   |                         |       |       |
| Σύνολα  |                         |       |       |



**Γ) α)** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των πωλήσεων του έτους.

**β)** Να βρείτε το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδων ευρώ (θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες). ΓΕΛ 2014

### 39) ΛΥΣΕΙΣ

**A)** Από το ιστόγραμμα, γνωρίζοντας ότι το ορθογώνιο κάθε κλάσης υψώνεται μέχρι την αντίστοιχη συχνότητα της κλάσης, έχουμε:  $v_1 = 12$  ,  $v_2 = 8$  ,  $v_3 = 14$  ,  $v_4 = 6$  άρα  $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 12 + 8 + 14 + 6 = 40$  πωλητές.

| κλάσεις    | Κεντρ.τιμές<br>$\chi_i$ | $v_i$  | $f_i$ | $\chi_i v_i$ | $\chi_i f_i$ |
|------------|-------------------------|--------|-------|--------------|--------------|
| [ 2 , 4 )  | 3                       | 12     | 0,3   | 36           | 0,9          |
| [ 4 , 6 )  | 5                       | 8      | 0,2   | 40           | 1,0          |
| [ 6 , 8 )  | 7                       | 14     | 0,35  | 98           | 2,45         |
| [ 8 , 10 ) | 9                       | 6      | 0,15  | 54           | 1,35         |
| Σύνολα     |                         | $v=40$ | 1     | 228          | <b>5,7</b>   |

**B)**

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{12}{40} = 0,3 \quad , \quad f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{8}{40} = 0,2$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{14}{40} = 0,35 \quad , \quad f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{6}{40} = 0,15$$

Γ) Μέση τιμή: α τρόπος  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v} = \frac{228}{40} = 5,7$  β τρόπος:  $\bar{x} = \sum_{i=1}^4 x_i f_i = 0,9 + 1 + 2,45 + 1,35 = 5,7$

Δ) Τουλάχιστον 4,5 χιλιάδες ευρώ πωλήσεις έκαναν οι πωλητές που ανήκουν στις κλάσεις [4.5,6) , [6 , 8) και [8,10)  
Υπολογίζουμε τους πωλητές της κλάσης [4.5,6)

Στην κλάση [4,6) πλάτους  $c=6-4=2$  αντιστοιχούν  $v_2 = 8$  πωλητές

Στην κλάση [4.5 , 6) πλάτους  $c=6-4,5=1.5$  αντιστοιχούν  $v'_2 = x$  πωλητές (τα ποσά είναι ανάλογα άρα)

$\frac{2}{1,5} = \frac{8}{x} \Leftrightarrow 2x = 8 \cdot 1,5 \Leftrightarrow 2x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{2} = 6$  Συνεπώς οι πωλητές που έκαναν Τουλάχιστον 4,5 χιλιάδες ευρώ πωλήσεις είναι:  $v'_2 + v_3 + v_4 = 6 + 14 + 6 = 26$  πωλητές

40) Η βαθμολογία 60 μαθητών ενός λυκείου σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών βρίσκεται στο διάστημα [10,20) και έχει ομαδοποιηθεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους. Γνωρίζουμε , επίσης, ότι έξι μαθητές έχουν πάρει βαθμό μικρότερο από 12, δεκαοκτώ μαθητές μικρότερο από 14, έξι μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του 18 και δεκαοκτώ μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του 16.

Α) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων κατάλληλα συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

| κλάσεις | Κεντρικές Τιμές $x_i$ | Συχνότητα $v_i$ | Σχετική συχνότητα % $f_i\%$ | Αθροιστική συχνότητα $N_i$ | Αθροιστική σχετική συχνότητα % $F_i\%$ |
|---------|-----------------------|-----------------|-----------------------------|----------------------------|----------------------------------------|
| [10 , ) |                       |                 |                             |                            |                                        |
| [ , )   |                       |                 |                             |                            |                                        |
| [ , )   |                       |                 |                             |                            |                                        |
| [ , )   |                       |                 |                             |                            |                                        |
| [ ,20)  |                       |                 |                             |                            |                                        |
| Σύνολο  |                       |                 |                             |                            |                                        |

Β) Να βρείτε τη μέση βαθμολογία  $\bar{x}$  και τη διάμεσο  $\delta$  των βαθμολογιών τους. Γ) Στο 5% των μαθητών με την καλύτερη επίδοση πρόκειται να δοθεί έπαινος. Από ποιόν βαθμό και πάνω πρέπει να έχει γράψει κάποιος μαθητής για να πάρει έπαινο; (θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες.) επαν.2014

#### 40) ΛΥΣΗ

Δίνεται ότι το μέγεθος του δείγματος είναι  $n=60$  Έστω  $c$  το πλάτος. Τότε οι κλάσεις γράφονται συμβολικά:

[10,10+c) , [10+c,10+2c) , [10+2c,10+3c) , [10+3c,10+4c) , [10+4c,10+5c) . άρα  $10+5c=20 \Leftrightarrow 5c=20-10 \Leftrightarrow 5c=10 \Leftrightarrow$

$c = \frac{10}{5} = 2$  {σχόλιο: Δεν βρήκα τις ενδεικτικές λύσεις της επιτροπής εξετάσεων, αλλά οι φροντιστηριακοί οργανισμοί έδωσαν ως λύση την παρακάτω. Θεωρούν το 20 τη μεγαλύτερη παρατήρηση ,παρά το ότι δεν ανήκει στην πέμπτη κλάση αφού το διάστημα δόθηκε ανοικτό και αφού ο αριθμός των κλάσεων είναι  $k=5$  βρίσκω το εύρος  $R=20-10=10$  και κατά τα γνωστά το πλάτος είναι  $c = \frac{R}{k} = \frac{10}{5} = 2$  }

- έξι μαθητές έχουν πάρει βαθμό μικρότερο από 12 άρα  $v_1 = 6$  και  $f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{6}{60} = 0,1$
- 18 μαθητές μικρότερο από 14 άρα  $N_2 = 18 = v_1 + v_2 \Leftrightarrow v_2 = 18 - v_1 \Leftrightarrow v_2 = 18 - 6 = 12$  συνεπώς

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{12}{60} = 0,2$$

- 6 μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του 18 άρα  $v_5 = 6$  συνεπώς  $f_5 = \frac{v_5}{v} = \frac{6}{60} = 0,1$
- δεκαοκτώ μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του 16 άρα  $v_4 + v_5 = 18 \Leftrightarrow v_4 + 6 = 18 \Leftrightarrow v_4 = 18 - 6 = 12$

$$\text{συνεπώς } f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{12}{60} = 0,2$$

$$\text{Αλλά ισχύει } v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 \text{ ή } 60 = 6 + 12 + v_3 + 12 + 6 \Leftrightarrow v_3 = 60 - 36 = 24 \text{ και } f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{24}{60} = 0,4$$

| κλάσεις  | Κεντρικές Τιμές $\chi_i$ | Συχνότητα $v_i$ | Σχετική συχνότητα % $f_i\%$ | Αθροιστική συχνότητα $N_i$ | Αθροιστική σχετική συχνότητα % $F_i\%$ | $\chi_i v_i$ |
|----------|--------------------------|-----------------|-----------------------------|----------------------------|----------------------------------------|--------------|
| [10, 12) | 11                       | 6               | 10                          | 6                          | 10                                     | 66           |
| [12, 14) | 13                       | 12              | 20                          | 18                         | 30                                     | 156          |
| [14, 16) | 15                       | 24              | 40                          | 42                         | 70                                     | 360          |
| [16, 18) | 17                       | 12              | 20                          | 54                         | 90                                     | 204          |
| [18, 20) | 19                       | 6               | 10                          | 60                         | 100                                    | 114          |
| Σύνολα   |                          | $v=60$          | 100                         |                            |                                        | 900          |

$$\bar{\chi} = \frac{\sum_{i=1}^5 \chi_i v_i}{v} = \frac{900}{60} = 15 \quad \text{Για τη διάμεσο : από την εκατοστιαία σχετική συχνότητα}$$

$$f_1\% + f_2\% + \frac{f_3\%}{2} = \frac{f_3\%}{2} + f_4\% + f_5\% \text{ ή } 10\% + 20\% + 20\% = 20\% + 20\% + 10\% = 50\%$$

Άρα διάμεσος είναι η κεντρική τιμή της τρίτης κλάσης  $\delta=15$

**Γ)** Το 10% των μαθητών με την μεγαλύτερη επίδοση βρίσκεται στην κλάση [18,20) .Επειδή θα δώσουμε έπαινο μόνο στο 5% των μαθητών με την υψηλότερη βαθμολογία αυτοί θα ανήκουν στην κλάση  $[\chi, 20)$

Στην κλάση [18,20) πλάτους  $c=20-18=2$  αντιστοιχεί ποσοστό  $f_2\% = 10$

Στην κλάση  $[\chi, 20)$  πλάτους  $c=20-\chi$  αντιστοιχεί ποσοστό  $f_2'\%=5$  (τα ποσά ανάλογα)

$$\frac{20-\chi}{2} = \frac{5}{10} \Leftrightarrow \frac{20-\chi}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 20-\chi = 1 \Leftrightarrow -\chi = 1-20 \Leftrightarrow -\chi = -19 \Leftrightarrow \chi = 19 \text{ και η κλάση είναι } [19,20) \text{ Συνεπώς οι μαθητές πρέπει να έχουν βαθμολογία από 19 και πάνω.}$$

**41)** Θεωρούμε ένα δείγμα  $n$  παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής  $X$ , τις οποίες ομαδοποιούμε σε 5 ισοπλάτεις κλάσεις, όπως παρουσιάζονται στον πίνακα Ι, όπου  $f_i\%$   $i=1, 2, 3, 4, 5$  είναι οι σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό των αντιστοίχων κλάσεων. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Δίνεται ότι

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην 3<sup>η</sup> κλάση είναι  $108^\circ$ .
- Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι  $\bar{\chi} = 14$

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

| Κλάσεις | $f_i\%$ |
|---------|---------|
| [8,10)  |         |
| [10,12) |         |
| [12,14) |         |
| [14,16) |         |
| [16,18) |         |

**Α)** Να αποδείξετε ότι  $f_1\% = 10$  ,  $f_2\% = 10$   $f_3\% = 30$   $f_4\% = 20$   $f_5\% = 30$   
Δεν είναι απαραίτητο να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον Πίνακα Ι συμπληρωμένο.

**Β)** Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές. Δίνεται ότι  $\sqrt{6,6}=2,57$

**Γ)** Έστω  $X_1$  ,  $X_2$  ,  $X_3$  και  $X_4$  τα κέντρα της 1<sup>ης</sup> , 2<sup>ης</sup> , 3<sup>ης</sup> και 4<sup>ης</sup> κλάσης αντίστοιχα και  $\nu_1$  ,  $\nu_2$  ,  $\nu_3$  και  $\nu_4$  οι συχνότητες της 1<sup>ης</sup> , 2<sup>ης</sup> , 3<sup>ης</sup> και 4<sup>ης</sup> κλάσης αντίστοιχα. Αν

$$\sum_{i=1}^4 \chi_i \nu_i = 1780 \quad \text{να βρείτε το πλήθος } n \text{ των παρατηρήσεων του δείγματος.}$$

**Δ)** Έστω  $\alpha_1$  ,  $\alpha_2$  ,  $\alpha_3$  ,  $\alpha_4$  ,  $\alpha_5$  πέντε τυχαία επιλεγμένες παρατηρήσεις διαφορετικές μεταξύ τους από το παραπάνω δείγμα  $n$  παρατηρήσεων. Ορίζουμε ως  $\bar{\alpha}$  τη μέση τιμή των πέντε αυτών παρατηρήσεων και  $S_{\alpha}$  την τυπική τους απόκλιση. Εάν  $\beta_i = \frac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_{\alpha}}$  για  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  να δείξετε ότι η μέση τιμή  $\bar{\beta}$  του δείγματος  $\beta_i$  με  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  είναι ίση με μηδέν και η τυπική απόκλιση  $S_{\beta}$  είναι ίση με ένα. ΓΕΛ 2015

**41) ΛΥΣΗ**

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10% άρα  $f_1\% = 10$   
άρα  $f_1 = 0,1$
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30% άρα  $f_5\% = 30$  άρα  $f_5 = 0,3$
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην 3<sup>η</sup> κλάση είναι  $\alpha_3 = 108^\circ$  άρα  $f_3 360^\circ = 108^\circ \Leftrightarrow f_3 = \frac{108^\circ}{360^\circ} = 0,3$  και  $f_3\% = 30$
- Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι  $\bar{x} = 14 = \chi_1 f_1 + \chi_2 f_2 + \chi_3 f_3 + \chi_4 f_4 + \chi_5 f_5$  ή

$$14 = 9 \cdot 0,1 + 11f_2 + 13 \cdot 0,3 + 15f_4 + 17 \cdot 0,3 \Leftrightarrow 14 = 0,9 + 11f_2 + 3,9 + 15f_4 + 5,1 \Leftrightarrow 11f_2 + 15f_4 = 14 - 0,9 - 3,9 - 5,1 \Leftrightarrow 11f_2 + 15f_4 = 4,1 \quad (1) \text{ Ισχύει: } f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Leftrightarrow 0,1 + f_2 + 0,3 + f_4 + 0,3 = 1$$

$$\Leftrightarrow f_2 + f_4 = 1 - 0,1 - 0,3 - 0,3 \Leftrightarrow f_2 + f_4 = 0,3 \quad (2) \text{ Λύνουμε το σύστημα των (1) και}$$

$$(2) \begin{cases} 11f_2 + 15f_4 = 4,1 \\ f_2 + f_4 = 0,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11f_2 + 15f_4 = 4,1 \\ -11f_2 - 11f_4 = -3,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_2 + f_4 = 0,3 \\ 4f_4 = 0,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_2 + f_4 = 0,3 \\ f_4 = \frac{0,8}{4} = 0,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_2 + 0,2 = 0,3 \\ f_4 = 0,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_2 = 0,3 - 0,2 = 0,1 \\ f_4 = 0,2 \end{cases} \text{ οπότε } \begin{cases} f_2\% = 10 \\ f_4\% = 20 \end{cases}$$

$$\text{Β) } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \nu_i}{n} = \sum_{i=1}^5 (\chi_i - \bar{x})^2 f_i = (9 - 14)^2 0,1 + (11 - 14)^2 0,1 + (13 - 14)^2 0,3 + (15 - 14)^2 0,2 + (17 - 14)^2 0,1 = (-5)^2 0,1 + (-3)^2 0,1 + (-1)^2 0,3 + (1)^2 0,2 + (3)^2 0,3$$

$$= 25 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,2 + 9 \cdot 0,3 = 2,5 + 0,9 + 0,3 + 0,2 + 2,7 = 6,6 \text{ οπότε } S = \sqrt{S^2} = \sqrt{6,6} = 2,57 \text{ και}$$

$$CV = \frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{2,57}{14} = 0,1835 = \frac{18,35}{100} = 18,35\% > 10\% \text{ άρα ανομοιογενές το δείγμα}$$

**Γ) {σχόλιο: προσέξτε αυτή την ερώτηση}** γνωρίζουμε ότι  $f_1 = \frac{\nu_1}{n}$  και  $f_1 = 0,1$  άρα  $0,1 = \frac{\nu_1}{n} \Leftrightarrow \nu_1 = 0,1n$ . Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να εκφράσουμε κάθε συχνότητα (αυτό κρατάμε στο νου μας ως μεθοδολογία) και επειδή γνωρίζουμε τη μέση τιμή όταν θα γράψουμε τον τύπο της μέσης τιμής αναλυτικά ο μόνος άγνωστος θα είναι το  $n$

$$0,1 = \frac{\nu_1}{n} \Leftrightarrow \nu_1 = 0,1n \text{ με όμοιο τρόπο } \nu_2 = 0,1n, \nu_3 = 0,3n, \nu_4 = 0,2n, \nu_5 = 0,3n \text{ Έχουμε}$$

$$\bar{x} = \frac{\chi_1 \nu_1 + \chi_2 \nu_2 + \chi_3 \nu_3 + \chi_4 \nu_4 + \chi_5 \nu_5}{n} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 \chi_i \nu_i + \chi_5 \nu_5}{n} \text{ με } \sum_{i=1}^4 \chi_i \nu_i = 1780 \text{ και } \chi_5 = 17, \nu_5 = 0,3n, \bar{x} = 14$$

$$\text{Παίρνουμε: } \frac{1780 + 17 \cdot 0,3n}{n} = 14 \Leftrightarrow \frac{1780 + 5,1n}{n} = 14 \Leftrightarrow 1780 + 5,1n = 14n \Leftrightarrow 14n - 5,1n = 1780 \Leftrightarrow 8,9n = 1780 \Leftrightarrow n = \frac{1780}{8,9} = 200$$

Άλλος τρόπος: Χρησιμοποιώντας το άθροισμα που μας δίνει και αντικαθιστώντας τις συχνότητες όπως παραπάνω

$$\sum_{i=1}^4 \chi_i v_i = 1780 \Leftrightarrow \chi_1 v_1 + \chi_2 v_2 + \chi_3 v_3 + \chi_4 v_4 = 1780 \Leftrightarrow 9v_1 + 11v_2 + 13v_3 + 15v_4 = 1780 \text{ αλλά}$$

$$v_1 = 0,1v \quad , \quad v_2 = 0,1v \quad , \quad v_3 = 0,3v \quad , \quad v_4 = 0,2v \quad \text{οπότε } 9 \cdot 0,1v + 11 \cdot 0,1v + 13 \cdot 0,3v + 15 \cdot 0,2v = 1780 \Leftrightarrow 0,9v + 1,1v + 3,9v + 3v = 1780 \Leftrightarrow 8,9v = 1780 \Leftrightarrow v = \frac{1780}{8,9} = 200$$

Δ)  $\beta_i = \frac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_a} = \frac{\alpha_i}{S_a} - \frac{\bar{\alpha}}{S_a} = \frac{1}{S_a} \alpha_i - \frac{\bar{\alpha}}{S_a}$  οι τιμές  $\beta_i$  πολλαπλασιάζονται με  $\frac{1}{S_a}$  και από κάθε τιμή αφαιρείται η  $\frac{\bar{\alpha}}{S_a}$  άρα η μέση τιμή που προκύπτει θα είναι η παλαιά πολλαπλασιασμένη με  $\frac{1}{S_a}$  και θα αφαιρείται η  $\frac{\bar{\alpha}}{S_a}$

(δες σχόλιο άσκησης 33 και εφαρμογή 3 βιβλίου) η δε τυπική απόκλιση θα πολλαπλασιάζεται με  $\frac{1}{S_a}$  οπότε

$$\bar{\beta} = \frac{1}{S_a} \bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{S_a} = \frac{\bar{\alpha}}{S_a} - \frac{\bar{\alpha}}{S_a} = 0 \quad \text{και} \quad S_{\beta} = \frac{1}{S_a} S_a = 1$$

$$\text{Αναλυτικά: ισχύει ότι } \bar{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^5 \alpha_i}{5} \quad S_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (\alpha_i - \bar{\alpha})^2}{5}$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^5 \beta_i}{5} = \frac{\sum_{i=1}^5 \frac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_a}}{5} = \frac{1}{S_a} \frac{\sum_{i=1}^5 (\alpha_i - \bar{\alpha})}{5} = \frac{1}{5S_a} \sum_{i=1}^5 (\alpha_i - \bar{\alpha}) = \frac{1}{5S_a} [(a_1 - \bar{\alpha}) + (a_2 - \bar{\alpha}) + (a_3 - \bar{\alpha}) + (a_4 - \bar{\alpha}) + (a_5 - \bar{\alpha})] \\ &= \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) - 5\bar{\alpha}}{5S_a} = \frac{1}{S_a} \left[ \frac{\sum_{i=1}^5 \alpha_i}{5} - \bar{\alpha} \right] = \frac{1}{S_a} [\bar{\alpha} - \bar{\alpha}] = \frac{1}{S_a} 0 = 0 \quad S_{\beta}^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (\beta_i - \bar{\beta})^2}{5} \stackrel{\bar{\beta}=0}{=} \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \beta_i^2 = \\ &= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \frac{(\alpha_i - \bar{\alpha})^2}{S_a^2} = \frac{1}{S_a^2} \frac{\sum_{i=1}^5 (\alpha_i - \bar{\alpha})^2}{5} = \frac{S_a^2}{S_a^2} = 1 \quad S_{\beta} = \sqrt{S_{\beta}^2} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

**42)** Θεωρούμε ένα δείγμα  $n$  συνδρομητών μιας εταιρείας κινητής τηλεφωνίας. Για τον μήνα Μάιο, οι χρόνοι ομιλίας (σε ώρες) που έχουν χρεωθεί οι συνδρομητές του δείγματος έχουν χωριστεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανομημένες.

Δίνεται ότι:

- Η μικρότερη διάρκεια χρόνου ομιλίας που παρατηρήθηκε στο δείγμα είναι μηδέν.
- Το κέντρο της πέμπτης κλάσης είναι 18.
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην πέμπτη κλάση ισούται με  $36^\circ$ .
- $\frac{N_1}{4} = \frac{N_2}{9} = \frac{N_3}{15} = \frac{N_4}{18}$ , όπου  $N_1, N_2, N_3, N_4$  είναι οι αθροιστικές συχνότητες της 1<sup>ης</sup>, 2<sup>ης</sup>, 3<sup>ης</sup> και 4<sup>ης</sup> κλάσης αντίστοιχα.

**A)** Να αποδείξετε ότι το πλάτος κάθε κλάσης είναι 4

**B)** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα I συμπληρωμένο, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

**Πίνακας I**

| Κλάσεις<br>(σε<br>ώρες) | Κεντρικές<br>Τιμές<br>$\chi_i$ | Σχετικές<br>Συχνότητες<br>$f_i\%$ |
|-------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|
| [ , )                   |                                |                                   |
| [ , )                   |                                |                                   |
| [ , )                   |                                |                                   |
| [ , )                   |                                |                                   |
| [ , )                   |                                |                                   |
| Σύνολο                  |                                |                                   |

Για τα ερωτήματα Γ και Δ δίνεται ότι

$$f_1\% = 20 \quad , \quad f_2\% = 25 \quad , \quad f_3\% = 30 \quad , \quad f_4\% = 15 \quad , \quad f_5\% = 10$$

**Γ)** Να βρείτε το ποσοστό των συνδρομητών του δείγματος οι οποίοι έχουν χρεωθεί τουλάχιστον 3 ώρες και λιγότερες από 10 ώρες ομιλίας.

**Δ)** Υποθέτουμε ότι οι συνδρομητές της εταιρείας δικαιούνται κάθε μήνα μέχρι και 4 ώρες δωρεάν χρόνο ομιλίας. Έτσι, πληρώνουν μόνο για το χρόνο ομιλίας που τους έχει χρεωθεί επιπλέον των 4 ωρών. Αφαιρούμε από το δείγμα τους συνδρομητές που χρεώθηκαν λιγότερες από 4 ώρες. Να



υπολογίσετε τη μέση τιμή του χρόνου (σε ώρες) που πλήρωσαν οι υπόλοιποι συνδρομητές του δείγματος το μήνα Μάιο.  
Επαν. 2015

#### 42) ΛΥΣΗ

**A)** Έστω  $c$  το πλάτος. Αφού η ελάχιστη τιμή είναι μηδεν οι κλάσεις συμβολικά γράφονται:  $[0, c)$ ,  $[c, 2c)$ ,  $[2c, 3c)$ ,  $[3c, 4c)$ ,  $[4c, 5c)$ . Το κέντρο της πέμπτης κλάσης είναι 18 άρα ισχύει  $\frac{4c+5c}{2} = 18 \Leftrightarrow 9c = 36 \Leftrightarrow c = 4$

**B)**

| κλάσεις    | $\chi_i$ | $f_i\%$ | $f_i$ | $\nu_i$ |
|------------|----------|---------|-------|---------|
| $[0, 4)$   | 2        | 20      | 0,2   | 0,2ν    |
| $[4, 8)$   | 6        | 25      | 0,25  | 0,25ν   |
| $[8, 12)$  | 10       | 30      | 0,3   | 0,3ν    |
| $[12, 16)$ | 14       | 15      | 0,15  | 0,15ν   |
| $[16, 20)$ | 18       | 10      | 0,1   | 0,1ν    |
| Σύνολο     |          | 100     | 1     | ν       |

$$\alpha_5 = 360^0 f_5 \Leftrightarrow 360^0 = 360^0 f_5 \Leftrightarrow f_5 = \frac{360^0}{360^0} = 0,1 \quad f_5 = \frac{\nu_1}{\nu} = 0,1 \Leftrightarrow \nu_1 = 0,1\nu$$

$$\frac{N_1}{4} = \frac{N_2}{9} = \frac{N_3}{15} = \frac{N_4}{18} \Leftrightarrow \frac{\nu_1}{4} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{9} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}{15} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4}{18} = \frac{\nu - \nu_5}{18} = \frac{\nu - 0,1\nu}{18} = \frac{0,9\nu}{18} = \frac{9\nu}{180} = \frac{\nu}{20} \quad (N_1 = \nu_1)$$

$$\frac{\nu_1}{4} = \frac{\nu}{20} \Leftrightarrow \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{4}{20} \Leftrightarrow f_1 = 0,2$$

$$\frac{N_2}{9} = \frac{\nu}{20} \Leftrightarrow \frac{N_2}{\nu} = \frac{9}{20} \Leftrightarrow \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu} = \frac{9}{20} \Leftrightarrow \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{9}{20} \Leftrightarrow f_1 + f_2 = \frac{9}{20} \Leftrightarrow f_2 = 0,45 - f_1 \Leftrightarrow f_2 = 0,45 - 0,2 = 0,25$$

$$\frac{N_3}{15} = \frac{\nu}{20} \Leftrightarrow \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}{15} = \frac{\nu}{20} \Leftrightarrow \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}{\nu} = \frac{15}{20} \Leftrightarrow \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + \frac{\nu_3}{\nu} = 0,75 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + f_3 = 0,75 \Leftrightarrow 0,2 + 0,25 + f_3 = 0,75 \Leftrightarrow f_3 = 0,75 - 0,45 = 0,3$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Leftrightarrow 0,2 + 0,25 + 0,3 + f_4 + 0,1 = 1 \Leftrightarrow f_4 = 1 - 0,2 - 0,25 - 0,3 - 0,1 = 0,15$$

**Γ)** οι παρατηρήσεις θεωρείται ότι είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Οι συνδρομητές που έχουν χρεωθεί τουλάχιστον 3 ώρες και λιγότερες από 10 ώρες ομιλίας ανήκουν στις κλάσεις  $[3, 4)$ ,  $[4, 8)$ ,  $[8, 10)$

{Στην κλάση  $[0, 4)$  πλάτους  $c = 4 - 0 = 4$  το ποσοστό είναι  $f_1\% = 20$   
{Στην κλάση  $[3, 4)$  πλάτους  $c = 4 - 3 = 1$  το ποσοστό είναι  $f'_1\% = \chi$ ; άρα  $\frac{4}{1} = \frac{20}{f'_1\%} \Leftrightarrow f'_1\% = \frac{20}{4} = 5\%$

Στην κλάση  $[4, 8)$  το ποσοστό είναι  $f_2\% = 25\%$

{Στην κλάση  $[8, 12)$  πλάτους  $c = 12 - 8 = 4$  το ποσοστό είναι  $f_3\% = 30$   
{Στην κλάση  $[8, 10)$  πλάτους  $c = 10 - 8 = 2$  το ποσοστό είναι  $f'_3\% = \chi$ ; άρα  $\frac{4}{2} = \frac{30}{f'_3\%} \Leftrightarrow f'_3\% = \frac{30}{2} = 15\%$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι  $5\% + 25\% + 15\% = 45\%$

**Δ)** Οι συνδρομητές της πρώτης κλάσης εξαιρούνται και οι κλάσεις που απομένουν είναι  $[4, 8)$ ,  $[8, 12)$ ,  $[12, 16)$ ,  $[16, 22)$

και αφαιρουμένων των 4 ωρών οι κλάσεις είναι:  $[0, 4)$ ,  $[4, 8)$ ,  $[8, 12)$ ,  $[12, 16)$

| κλάσεις    | $\chi_i$ | $\nu_i$ | $\chi_i \nu_i$ |
|------------|----------|---------|----------------|
| $[0, 4)$   | 2        | 0,25ν   | 0,5ν           |
| $[4, 8)$   | 6        | 0,3ν    | 1,8ν           |
| $[8, 12)$  | 10       | 0,15ν   | 1,5ν           |
| $[12, 16)$ | 14       | 0,1ν    | 1,4ν           |
| Σύνολο     |          | 0,8ν    | 5,2ν           |

$$\bar{\chi} = \frac{\sum_{i=1}^4 \chi_i \nu_i}{\nu} \Rightarrow \bar{\chi} = \frac{5,2\nu}{0,8\nu} = 6,5 \text{ ώρες}$$

**43)** Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν  $n$  υπολογιστές για να τρέξουν ένα πρόγραμμα, έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 ισοπλάτεις κλάσεις πλάτους  $c$ , όπως στον παρακάτω πίνακα:

| Χρόνος<br>(σε λεπτά) | Κεντρική<br>τιμή<br>$\chi_i$ | Συχνότητα<br>$v_i$ |
|----------------------|------------------------------|--------------------|
| $[8, \quad)$         |                              | 20                 |
| $[\quad, \quad)$     | 14                           | 15                 |
| $[\quad, \quad)$     |                              | 10                 |
| $[\quad, \quad)$     |                              | $v_4$              |
| Σύνολο               |                              | $n=.....$          |

**A)** Να αποδείξετε ότι  $c = 4$

**B)** Αν η μέση τιμή των χρόνων είναι  $\bar{\chi} = 14$ , να αποδείξετε ότι  $v_4 = 5$  και στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο.

**Γ)** Αν οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες σε κάθε κλάση, να βρείτε πόσοι υπολογιστές χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά για να τρέξουν το πρόγραμμα. **Δ)** Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση των

χρόνων είναι  $S = 4$  και να εξετάσετε αν το δείγμα των χρόνων είναι ομοιογενές.

**Ε)** Αντικαθιστούμε τον επεξεργαστή κάθε υπολογιστή με έναν ταχύτερο και βρίσκουμε ότι κάθε υπολογιστής τρέχει τώρα το πρόγραμμα στο 80% του χρόνου που χρειαζόταν πριν. Να εξετάσετε ως προς την ομοιογένεια το καινούργιο δείγμα χρόνων.

ΓΕΛ 2016

#### 43) ΛΥΣΗ

**A)** Οι κλάσεις συμβολικά είναι:  $[8, 8+c)$ ,  $[8+c, 8+2c)$ ,  $[8+2c, 8+3c)$ ,  $[8+3c, 8+4c)$   $x_2 = \frac{8+c+8+2c}{2} \Leftrightarrow \frac{16+3c}{2} = 14$   
 $\Leftrightarrow 16+3c=28 \Leftrightarrow 3c=12 \Leftrightarrow c=\frac{12}{3} = \Leftrightarrow c = 4$  και οι κλάσεις είναι:  $[8, 12)$ ,  $[12, 16)$ ,  $[16, 20)$ ,  $[20, 24)$

| Χρόνος<br>(σε λεπτά) | Κεντρική<br>τιμή<br>$\chi_i$ | Συχνότητα<br>$v_i$ | $\chi_i v_i$  |
|----------------------|------------------------------|--------------------|---------------|
| $[8, 12)$            | 10                           | 20                 | 200           |
| $[12, 16)$           | 14                           | 15                 | 210           |
| $[16, 20)$           | 18                           | 10                 | 180           |
| $[20, 24)$           | 22                           | $v_4$              | $22v_4$       |
| Σύνολο               |                              | $n=v_4 + 45$       | $22v_4 + 590$ |

**B)**  $\bar{\chi} = \frac{\sum_{i=1}^4 \chi_i v_i}{n} \Leftrightarrow 14 = \frac{22v_4 + 590}{v_4 + 45} \Leftrightarrow 22v_4 + 590 = 14v_4 + 630 \Leftrightarrow 8v_4 = 40 \Leftrightarrow v_4 = 5$

**Γ)**  $n = 50$  Βρίσκουμε τη συχνότητα της κλάσης  $[8, 9)$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{κλάση } [8, 12) \text{ με } c = 12 - 8 = 4 \text{ έχει συχνότητα } v_1 = 20 \\ \text{κλάση } [8, 9) \text{ με } c = 9 - 8 = 1 \text{ έχει συχνότητα } v'_1 = ; \end{array} \right.$

$$\frac{4}{1} = \frac{20}{v'_1} \Leftrightarrow v'_1 = \frac{20}{4} = 5$$

Κάτω από 9 λεπτά χρειάστηκαν 5 υπολογιστές. Άρα πάνω από 9 λεπτά χρειάστηκαν  $n-5 = 50-5 = 45$  υπολογιστές.

**Δ)**

| Χρόνος<br>(σε λεπτά) | Κεντρική<br>τιμή<br>$\chi_i$ | Συχνότητα<br>$v_i$ | $\chi_i v_i$ | $\chi_i - \bar{\chi}$ | $(\chi_i - \bar{\chi})^2$ | $(\chi_i - \bar{\chi})^2 v_i$ |
|----------------------|------------------------------|--------------------|--------------|-----------------------|---------------------------|-------------------------------|
| $[8, 12)$            | 10                           | 20                 | 200          | -4                    | 16                        | 320                           |
| $[12, 16)$           | 14                           | 15                 | 210          | 0                     | 0                         | 0                             |
| $[16, 20)$           | 18                           | 10                 | 180          | 4                     | 16                        | 160                           |
| $[20, 24)$           | 22                           | 5                  | 110          | 8                     | 64                        | 320                           |
| Σύνολο               |                              | $n=50$             | 700          |                       |                           | 800                           |

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 (\chi_i - \bar{\chi})^2 v_i}{n} = \frac{800}{50} = 16$$

$$S = \sqrt{16} = 4$$

$$CV = \frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{4}{14} 0,2857 = \frac{28,57}{100}$$

=28,57% άρα δεν είναι

ομοιογενές

**Ε)** Τρέχει στο  $80\% = \frac{80}{100} = 0,8$  δηλαδή η νέα τιμή  $\chi'_i = 0,8 \chi_i$ . Οι τιμές πολλαπλασιάζονται με 0,8 και σύμφωνα με την εφαρμογή 3 του βιβλίου και η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση πολλαπλασιάζονται με την ίδια τιμή. Έτσι

$$CV' = \frac{s'}{\bar{x}'} = \frac{0,8s}{0,8\bar{x}} = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{7} = 0,2857 = 28,57\% > 10\% \text{ άρα μη ομοιογενές το δείγμα}$$

**44)** Ρωτήσαμε τις οικογένειες μιας πολυκατοικίας να μας πουν πόσα παιδιά έχει η καθεμιά. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

| Αριθμός Παιδιών | Οικογένειες $\nu_i$ |
|-----------------|---------------------|
| $\chi_1$        |                     |
| 0               | 1                   |
| 1               | 3                   |
| 2               | 1                   |
| 3               | 2                   |
| 4               | $\nu_5$             |
| $\chi_6$        | 1                   |
| Σύνολο          | $\nu$               |

**A)** Αν η διάμεσος του αριθμού των παιδιών είναι  $\delta=3$ , να βρείτε τις δυνατές τιμές του μεγέθους  $\nu$  του δείγματος.

**B)** Αν  $\nu=12$  και η μέση τιμή του αριθμού των παιδιών είναι  $\bar{\chi} = \frac{8}{3}$ , τότε

α. Να βρείτε την τιμή  $\chi_6$  συχνοτήτων

β. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων και το πολύγωνο. Τα διαγράμματα να γίνουν με στυλό.

**Γ)** Μετά από ένα χρόνο ξαναρωτήσαμε τις ίδιες οικογένειες για το πλήθος των παιδιών της καθεμιάς. Η οικογένεια που δεν είχε παιδιά απέκτησε δίδυμα και μια

από τις οικογένειες που είχε ένα παιδί απέκτησε και δεύτερο. Στις υπόλοιπες οικογένειες ο αριθμός των παιδιών δεν μεταβλήθηκε. Να βρείτε τη μέση τιμή του αριθμού των παιδιών που προκύπτει από τις νέες παρατηρήσεις.

ΓΕΛ 2016

#### 44) ΛΥΣΕΙΣ

{σχόλιο: Τοποθετώντας τις παρατηρήσεις κατά αύξουσα σειρά 0, 1, 1, 1, 2, 3, 3,  $\underbrace{4, \dots, 4}_{\nu_5 \text{ φορές}}$ ,  $\chi_6$  βλέπουμε ότι

αφού η τιμή 4 υπάρχει  $\nu_5$  φορές (άγνωστο) δεν γνωρίζουμε αν το  $\nu$  είναι άρτιος ή περιττός. Γιαυτό πρέπει να πάρουμε περιπτώσεις. Η διάμεσος είναι  $\delta=3$  και το τρία υπάρχει δύο φορές. Αν το πλήθος είναι περιττό μπορεί να είναι διάμεσος το πρώτο 3, όπως είναι γραμμένα στη σειρά ή μπορεί να είναι το δεύτερο 3. Αν το πλήθος είναι ζυγό τότε, τότε το μισό πλήθος τελειώνει στο 3 και το άλλο μισό αρχίζει από το 3, αφού τότε, διάμεσος είναι το ημίθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων. Ελπίζω να έγινα κατανοητός}

A)  $\nu = 1+3+1+2+\nu_5+1=8+\nu_5$  (1) Διακρίνουμε περιπτώσεις

1<sup>η</sup> περίπτωση :  $\underbrace{0, 1, 1, 1, 2}_{5 \text{ παρατηρήσεις}}, \underbrace{3}_{\substack{\text{μεσαία} \\ \text{παρατήρηση}}}, \underbrace{3, 4, \dots, 4, \chi_6}_{2+\nu_5 \text{ παρατηρήσεις}}$

Το πλήθος είναι περιττό και το πλήθος των παρατηρήσεων αριστερά του 3 ισούται με το πλήθος δεξιά δηλαδή

$$5 = 2 + \nu_5 \Leftrightarrow \nu_5 = 3 \text{ άρα από την (1) } \nu = 8 + 3 = 11$$

2<sup>η</sup> περίπτωση :  $\underbrace{0, 1, 1, 1, 2, 3}_{6 \text{ παρατηρήσεις}}, \underbrace{3}_{\substack{\text{μεσαία} \\ \text{παρατήρηση}}}, \underbrace{4, \dots, 4, \chi_6}_{1+\nu_5 \text{ παρατηρήσεις}}$

Το πλήθος είναι περιττό και το πλήθος των παρατηρήσεων αριστερά του 3 ισούται με το πλήθος δεξιά δηλαδή

$$6 = 1 + \nu_5 \Leftrightarrow \nu_5 = 5 \text{ άρα από την (1) } \nu = 8 + 5 = 13$$

3<sup>η</sup> περίπτωση :  $\underbrace{0, 1, 1, 1, 2}_{5 \text{ παρατηρήσεις}}, \underbrace{3, 3}_{2 \text{ μεσαίες παρατηρήσεις}}, \underbrace{4, \dots, 4, \chi_6}_{1+\nu_5 \text{ παρατηρήσεις}}$

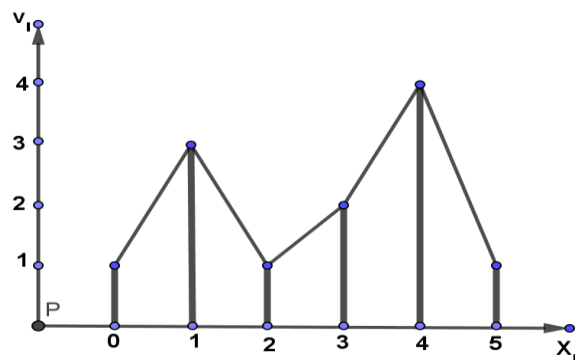
Το πλήθος είναι ζυγό και το πλήθος των παρατηρήσεων αριστερά του 3 ισούται με το πλήθος δεξιά δηλαδή

$$5 = 1 + \nu_5 \Leftrightarrow \nu_5 = 4 \text{ άρα από την (1) } \nu = 8 + 4 = 12 \text{ Επομένως } \nu = 11 \text{ ή } \nu = 12 \text{ ή } \nu = 13$$

**B)** Για  $\nu=12$  το  $\nu_5 = 4$  και ο πίνακας διαμορφώνεται

| Αριθμός<br>Παιδιών<br>$\chi_i$ | Οικογένειες<br>$\nu_i$ | $\chi_i \nu_i$ |
|--------------------------------|------------------------|----------------|
| 0                              | 1                      | 0              |
| 1                              | 3                      | 3              |
| 2                              | 1                      | 2              |
| 3                              | 2                      | 6              |
| 4                              | 4                      | 16             |
| $\chi_6$                       | 1                      | $\chi_6$       |
| Σύνολο                         | $\nu=12$               | $\chi_6 + 27$  |

Δίνεται ότι  $\bar{\chi} = \frac{8}{3}$  όμως  $\bar{\chi} = \frac{\sum_{i=1}^6 \chi_i \nu_i}{\nu} \Leftrightarrow \frac{8}{3} = \frac{\chi_6 + 27}{12} \Leftrightarrow 96 = 3\chi_6 + 81$   
 $\Leftrightarrow 3\chi_6 = 96 - 81 \Leftrightarrow 3\chi_6 = 15 \Leftrightarrow \chi_6 = \frac{15}{3} = 5$



Γ) Ο πίνακας διαμορφώνεται όπως παρακάτω:

| Αριθμός<br>Παιδιών<br>$\chi_i$ | Οικογένειες<br>$\nu_i$ | $\chi_i \nu_i$ |
|--------------------------------|------------------------|----------------|
| 1                              | 2                      | 2              |
| 2                              | 3                      | 6              |
| 3                              | 2                      | 6              |
| 4                              | 4                      | 16             |
| 5                              | 1                      | 5              |
| Σύνολο                         | $\nu=12$               | 35             |

$$\bar{\chi}' = \frac{\sum_{i=1}^5 \chi_i \nu'_i}{\nu} = \frac{35}{12}$$

2<sup>η</sup> λύση χωρίς πίνακα: Ο αριθμός των παιδιών αυξήθηκε κατά 3

$$\text{Άρα } \bar{\chi}' = \frac{\sum_{i=1}^5 \chi_i \nu_i + 3}{\nu} = \frac{32 + 3}{12} = \frac{35}{12}$$

## ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΠΑΛ

45) Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των πιστωτικών καρτών που έχουν 20 υπάλληλοι μιας επιχείρησης.

| Αριθμός<br>πιστωτικών<br>καρτών<br>$\chi_i$ | Αριθμός<br>Υπαλλήλων<br>$\nu_i$ | Αθροιστική<br>Συχνότητα<br>$N_i$ | Σχετική<br>συχνότητα<br>$f_i\%$ | $\chi_i \nu_i$ |
|---------------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|----------------|
| 0                                           | 5                               |                                  |                                 |                |
| 1                                           |                                 | 9                                |                                 |                |
| 2                                           |                                 |                                  | 10                              |                |
| 3                                           |                                 |                                  |                                 |                |
| 4                                           |                                 |                                  |                                 |                |
| Σύνολο                                      |                                 |                                  |                                 |                |

B1. Αν γνωρίζετε ότι η 5<sup>η</sup> συχνότητα ( $\nu_5$ ) ισούται με την 1<sup>η</sup> συχνότητα ( $\nu_1$ ), να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

B2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή  $\bar{\chi}$  των πιστωτικών καρτών των υπαλλήλων.

B3. Να υπολογίσετε τον αριθμό των υπαλλήλων που έχουν το πολύ 3 πιστωτικές κάρτες.

B4. Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων

που έχουν τουλάχιστον 2 πιστωτικές κάρτες.

ΕΠΑΛ 2016

45) ΛΥΣΗ

| Αριθμός πιστωτικών καρτών<br>$\chi_i$ | Αριθμός Υπαλλήλων<br>$\nu_i$ | Αθροιστική Συχνότητα<br>$N_i$ | Σχετική συχνότητα<br>$f_i\%$ | $\chi_i \nu_i$ |
|---------------------------------------|------------------------------|-------------------------------|------------------------------|----------------|
| 0                                     | 5                            | 5                             | 25                           | 0              |
| 1                                     | 4                            | 9                             | 20                           | 4              |
| 2                                     | 2                            | 11                            | 10                           | 4              |
| 3                                     | 4                            | 15                            | 20                           | 12             |
| 4                                     | 5                            | 20                            | 25                           | 20             |
| Σύνολο                                | 20                           |                               | 100                          | 40             |

$$\text{B1. } v=20, \nu_1 = \nu_5 = 5, f_1 = \frac{\nu_1}{v} = \frac{5}{20} = 0,25 = f_5, \quad f_1\% = f_5\% = 25\%$$

$$\nu_2 = N_2 - N_1 = 9 - 5 = 4$$

$$f_2 = \frac{\nu_2}{v} = \frac{4}{20} = 0,20 \quad \text{και } f_2\% = 20$$

$$f_3\% = 10 \text{ ή } f_3 = 0,10 \text{ και } \nu_3 = \nu f_3 = 20 \cdot 0,10 = 2$$

$$\nu_4 = v - (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_5) = 20 -$$

$$(5 - 4 - 2 - 5) = 20 - 16 = 4 \text{ οπότε } f_4 = \frac{\nu_4}{v} = \frac{4}{20} = 0,20 \quad \text{και } f_4\% = 20$$

$$\text{B2. } \bar{\chi} = \frac{\sum_{i=1}^5 \chi_i \nu_i}{v} = \frac{40}{20} = 2$$

$$\text{B3. Αριθμός υπαλλήλων που χρησιμοποιούν το πολύ τρεις κάρτες } \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = N_4 = 15$$

$$\text{B4. Το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν τουλάχιστον 2 κάρτες είναι: } f_3\% + f_4\% + f_5\% = 10\% + 20\% + 25\% = 55\%$$

46) Επτά διαδοχικοί περιττοί αριθμοί έχουν διάμεσο 13.

B1. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί αυτοί είναι 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19

B2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή  $\bar{\chi}$  των παραπάνω αριθμών.

B3. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση S των παραπάνω αριθμών.

B4. Αν προσθέσουμε σε καθέναν από τους παραπάνω αριθμούς τον αριθμό 3, να βρεθεί ο συντελεστής μεταβολής CV των νέων αριθμών που θα προκύψουν. ΕΠΑΝ. ΕΠΑΛ 2016

46 ΛΥΣΗ B1. {σχόλιο: περιττοί 1, 3, 5, 7 αν  $\chi=1$  τότε  $3=\chi+2$   $5=3+2=\chi+2+2=\chi+4$  } Έστω  $\chi$  ο πρώτος περιττός. Τότε οι 7 περιττοί γράφονται:  $\chi, \chi+2, \chi+4, \chi+6, \chi+8, \chi+10, \chi+12$  Η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση αφού το πλήθος είναι περιττό άρα  $\delta = \chi+6 = 13 \Leftrightarrow \chi = 13 - 6 = 7$  και οι αριθμοί είναι 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19

$$\text{B2. } \bar{\chi} = \frac{\sum_{i=1}^7 \chi_i}{v} = \frac{7+9+11+13+15+17+19}{7} = \frac{91}{7} = 13$$

$$\text{B3. } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{v} = \frac{(7-13)^2 + (9-13)^2 + (11-13)^2 + (13-13)^2 + (15-13)^2 + (17-13)^2 + (19-13)^2}{7} =$$

$$\frac{(-6)^2 + (-4)^2 + (-2)^2 + (0)^2 + (2)^2 + (4)^2 + (6)^2}{7} = \frac{36+16+4+0+4+16+36}{7} = \frac{112}{7} = 16 \quad \text{άρα } S = \sqrt{S^2} = \sqrt{16} = 4$$

B4. 1ος τρόπος

Από την εφαρμογή 3 του βιβλίου είναι γνωστό ότι η νέα μέση τιμή θα είναι η παλαιά αυξημένη κατά 3 και η νέα μέση τιμή είναι ίση με την παλαιά. Δηλαδή  $\bar{\chi}' = \bar{\chi} + 3 = 13 + 3 = 16$  και  $S' = S = 4$

2ος τρόπος

Αν σε κάθε τιμή προσθέσουμε το 3 οι νέες τιμές είναι 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 οπότε

$$\bar{\chi} = \frac{10+12+14+16+18+20+22}{7} = \frac{112}{7} = 16 \quad \text{και } S' = \sqrt{\frac{(10-16)^2 + (12-16)^2 + (14-16)^2 + (16-16)^2 + (18-16)^2 + (20-16)^2 + (22-16)^2}{7}} =$$

$$\sqrt{\frac{(-6)^2 + (-4)^2 + (-2)^2 + (0)^2 + (2)^2 + (4)^2 + (6)^2}{7}} = \sqrt{\frac{36+16+4+0+4+16+36}{7}} = \sqrt{\frac{112}{7}} = \sqrt{16} = 4$$

$$CV' = \frac{s'}{\bar{x}} = \frac{4}{16} = 0,25 = \frac{25}{100} = 25\%$$

47) Οι ηλικίες των εργαζομένων σε μια επιχείρηση ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή. Εάν το 50% των εργαζομένων έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 40 ετών και το 16% των εργαζομένων έχουν ηλικία μικρότερη των 35 ετών, να αποδείξετε ότι:

Γ1. Η μέση τιμή των ηλικιών των εργαζομένων είναι  $\bar{x}=40$ .

Γ2. Η τυπική απόκλιση είναι  $S = 5$ . Εάν οι εργαζόμενοι της επιχείρησης είναι 400, να βρείτε:

Γ3. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 45 ετών.

Γ4. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 30 ετών και μικρότερη των 45 ετών. ΕΠΑΛ2017

#### 47) ΛΥΣΗ

Γ1. Εφόσον οι ηλικίες ακολουθούν την κανονική κατανομή γνωρίζουμε ότι  $\bar{x} = \delta$  και αφού το 50% των εργαζομένων έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 40 ετών  $\bar{x} = \delta = 40$  (1)

Γ2. Το 16% έχει ηλικία μικρότερη των 35 άρα  $\bar{x} - S = 35$  (2) από (1) και (2) έχουμε  $40 - S = 35 \Leftrightarrow S = 5$  και τα διαστήματα γίνονται  $\bar{x} - 3S = 40 - 3 \cdot 5 = 40 - 15 = 25$ ,  $\bar{x} - 2S = 40 - 2 \cdot 5 = 40 - 10 = 30$ ,

$\bar{x} - S = 40 - 5 = 35$ ,  $\bar{x} = 40$ ,  $\bar{x} + S = 40 + 5 = 45$ ,  $\bar{x} + 2S = 40 + 2 \cdot 5 = 40 + 10 = 50$ ,

$\bar{x} + 3S = 40 + 3 \cdot 5 = 40 + 15 = 55$

Γ3. Τοποθετώντας στο διπλανό γράφημα της κανονικής κατανομής τις τιμές  $\bar{x} - 3S = 25$ ,  $\bar{x} - 2S = 30$ ,  $\bar{x} - S = 35$ ,  $\bar{x} = 40$ ,  $\bar{x} + S = 45$ ,  $\bar{x} + 2S = 50$ ,  $\bar{x} + 3S = 55$

Οι εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 45 ετών είναι όσοι βρίσκονται πάνω (δεξιά) από  $\bar{x} + S = 45$  και τα ποσοστά είναι

$13,5\% + 2,35\% + 0,15\% = 16\%$  οπότε το πλήθος είναι

$$16\% \cdot n = \frac{16}{100} \cdot 400 = 64 \text{ εργαζόμενοι}$$

Γ4. Οι εργαζόμενοι που έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 30 ετών και μικρότερη των 45 ετών είναι αυτοί που ανήκουν στο διάστημα  $(\bar{x} - 2S = 30, \bar{x} + S = 45)$  και το ποσοστό είναι  $13,5\% + 68\% = 81,5\%$  και το πλήθος είναι το  $81,5\% \cdot n = \frac{81,5}{100} \cdot 400 = 326$  εργαζόμενοι.

48) Οι μέγιστες θερμοκρασίες σε 6 πόλεις μια ημέρα του χειμώνα είναι: 7, 8, 10, 5, 11, 7

Β1. Για τις παρατηρήσεις αυτές, να υπολογίσετε: α. τη μέση τιμή  $\bar{x}$  β. τη διάμεσο  $\delta$  γ. τη διακύμανση  $S^2$

Β2. Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παραπάνω παρατηρήσεων δεν είναι ομοιογενές.

Β3. Να βρείτε τον μικρότερο θετικό αριθμό τον οποίο πρέπει να προσθέσουμε σε καθεμιά από τις παραπάνω παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα που θα προκύψει να είναι ομοιογενές. ΕΠΑΛ ΕΠΑΝ 2017

#### 48) ΛΥΣΗ

Β1. α)  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 t_i}{n} = \frac{5+7+7+8+10+11}{6} = \frac{48}{6} = 8$  β) Γράφουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά και επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι ζυγός αριθμός διάμεσος θα είναι το ημίαθροισμα των δύο μεσαίων

παρατηρήσεων: **5, 7, 7, 8, 10, 11**  $\delta = \frac{7+8}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$  {σχόλιο: οι θέσεις των μεσαίων παρατηρήσεων που έχουν τοποθετηθεί σε αύξουσα σειρά και κατ' επέκταση η διάμεσος, δίνεται από τον τύπο  $\delta = \frac{t_{\frac{n}{2}} + t_{\frac{n}{2}+1}}{2}$  όταν το μέγεθος  $n$  του δείγματος είναι άρτιος (ζυγός) αριθμός. Στην άσκηση  $n=6$  άρα  $\frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3$  και  $\frac{n}{2} + 1 = \frac{6}{2} + 1 = 3 + 1 = 4$  συνεπώς οι παρατηρήσεις που βρίσκονται στην 3<sup>η</sup> θέση το  $t_3=7$  και 4<sup>η</sup> θέση το  $t_4=8$ . Αν το πλήθος είναι περιττό (μονός αριθμός) τότε η θέση της μεσαίας παρατήρησης δίνεται από τον τύπο  $\delta = \frac{t_{\frac{n+1}{2}}}{2}$ }

$$v) S^2 = \frac{\sum_{i=1}^6 (t_i - \bar{x})^2}{6} = \frac{(5-8)^2 + (7-8)^2 + (8-8)^2 + (10-8)^2 + (11-8)^2}{6} = \frac{(-3)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2}{6} = \frac{9+1+0+4+9}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$$B3. S = \sqrt{S^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{2}{8} = 0,25 = \frac{25}{100} = 25\% \geq 10\% \quad \text{άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.}$$

**B3.** Έστω  $c$  ο μικρότερος αριθμός που πρέπει να προσθέσουμε σε κάθε τιμή. Από την εφαρμογή 3 του σχολικού βιβλίου γνωρίζουμε ότι τότε η νέα μέση τιμή είναι  $\bar{x}' = \bar{x} + c$  ενώ η νέα διακύμανση  $S' = S$  οπότε

$$CV' = \frac{S'}{\bar{x}'} \cdot 100\% = \frac{2}{8+c} \cdot 100\% \leq 10\% \Leftrightarrow \frac{2}{8+c} \cdot 100 \leq \frac{10}{100} \Leftrightarrow \frac{2}{8+c} \cdot 10 \cdot \frac{10}{100} \leq \frac{10}{100} \Leftrightarrow \frac{20}{8+c} \leq 1 \Leftrightarrow 20 \leq 8+c \Leftrightarrow 12 \leq c \Leftrightarrow c \geq 12$$

άρα ο μικρότερος θετικός αριθμός που πρέπει να προσθέσουμε σε κάθε παρατήρηση ώστε το δείγμα που θα προκύψει να είναι ομοιογενές είναι το 12.

**49)** Δίνονται οι αριθμοί : **14, 12, 18, 4α - 1, 16** με  $\alpha \in \mathbb{R}$

**B1.** Αν η διάμεσος των παραπάνω αριθμών είναι ίση με 15, να υπολογίσετε την τιμή του  $\alpha$ .

**B2.** Για  $\alpha = 4$  να υπολογίσετε τη διακύμανση. ( $S^2$ )

**B3.** Για  $\alpha = 4$  να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω αριθμών είναι ομοιογενές.

**B4.** Για  $\alpha = 4$  να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής των αριθμών που θα προκύψουν, αν ο καθένας από τους παραπάνω αριθμούς πολλαπλασιαστεί με το -2 και στη συνέχεια αυξηθεί κατά 5. ΕΠΑΛ 2018

#### 49) ΛΥΣΗ

**B1.** Τοποθετώντας τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά και επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό έχουμε : 12, 14, διάμεσος, 16, 18. Επειδή η διάμεσος είναι  $\delta=15$  άρα η παρατήρηση  $4\alpha - 1$  είναι η διάμεσος άρα  $4\alpha - 1 = 15 \Leftrightarrow 4\alpha = 16 \Leftrightarrow \alpha = 4$

$$B2. \text{ Για } \alpha=4 \text{ οι παρατηρήσεις είναι } 12, 14, 15, 16, 18 \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 t_i}{5} = \frac{12+14+15+16+18}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{x})^2}{5} = \frac{(12-15)^2 + (14-15)^2 + (15-15)^2 + (16-15)^2 + (18-15)^2}{5} = \frac{(-3)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 3^2}{5} = \frac{9+1+0+1+9}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$B3. S = \sqrt{S^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{2}{15} = 0,1333 = \frac{13,33}{100} = 13,33\% \geq 10\% \quad \text{άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.}$$

**B4.** Αν ο κάθε αριθμός πολλαπλασιαστεί με το -2 και στη συνέχεια αυξηθεί κατά 5 τότε από την εφαρμογή 3 του βιβλίου γνωρίζουμε ότι θα ισχύει για τη νέα μέση τιμή  $\bar{x}' = -2\bar{x} + 5 = -2 \cdot 15 + 5 = -30 + 5 = -25$

Και η νέα τυπική απόκλιση είναι  $S' = |-2|S = 2 \cdot 2 = 4$  και ο συντελεστής μεταβολής  $CV' = \frac{S'}{|\bar{x}'|} = \frac{4}{|-25|} = \frac{4}{25} = 0,16 = \frac{16}{100} = 16\%$

**50)** Ο χρόνος σε λεπτά που χρειάστηκαν 20 υποψήφιοι για να απαντήσουν σε μια ερώτηση φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

| Χρόνος σε Λεπτά | Αριθμός Υποψηφίων $n_i$ | Σχετική Συχνότητα $f_i\%$ |
|-----------------|-------------------------|---------------------------|
| [0,2)           | 1                       |                           |
| [2,4)           | 7                       |                           |
| [4,6)           | 4                       |                           |
| [6,8)           |                         |                           |
| [8,10)          | 1                       |                           |
| Σύνολα          | 20                      | 100                       |

**B1.** Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά, αφού υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές.

**B2.** Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  του χρόνου που χρειάστηκαν οι υποψήφιοι για να απαντήσουν στην ερώτηση.

**B3.** Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον τέσσερα λεπτά για να απαντήσουν στην ερώτηση;

**B4.** Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό ( $f_i\%$ )

**B5.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό ( $f_i\%$ ) και τον οριζόντιο άξονα.

ΕΠΑΝ ΕΠΑΛ 2018

### 50) ΛΥΣΗ

$$\mathbf{B1.} \quad n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = n \Leftrightarrow 1 + 7 + 4 + n_4 + 1 = 20 \Leftrightarrow 13 + n_4 = 20 \Leftrightarrow n_4 = 20 - 13 = 7$$

$$f_1\% = \frac{n_1}{n} 100\% = \frac{1}{20} 100\% = 0,05 \frac{100}{100} = \frac{5}{100} = 5\% \quad , \quad f_2\% = \frac{n_2}{n} 100\% = \frac{7}{20} 100\% = 0,35 \frac{100}{100} = \frac{35}{100} = 35\%$$

$$f_3\% = \frac{n_3}{n} 100\% = \frac{4}{20} 100\% = 0,20 \frac{100}{100} = \frac{20}{100} = 20\% \quad , \quad f_4\% = \frac{n_4}{n} 100\% = \frac{7}{20} 100\% = 0,35 \frac{100}{100} = \frac{35}{100} = 35\%$$

$$f_5\% = \frac{n_5}{n} 100\% = \frac{1}{20} 100\% = 0,05 \frac{100}{100} = \frac{5}{100} = 5\%$$

| Χρόνος σε Λεπτά | Αριθμός Υποψηφίων $n_i$ | Σχετική Συχνότητα $f_i\%$ |
|-----------------|-------------------------|---------------------------|
| [0,2)           | 1                       | 5                         |
| [2,4)           | 7                       | 35                        |
| [4,6)           | 4                       | 20                        |
| [6,8)           | 7                       | 35                        |
| [8,10)          | 1                       | 5                         |
| Σύνολα          | 20                      | 100                       |

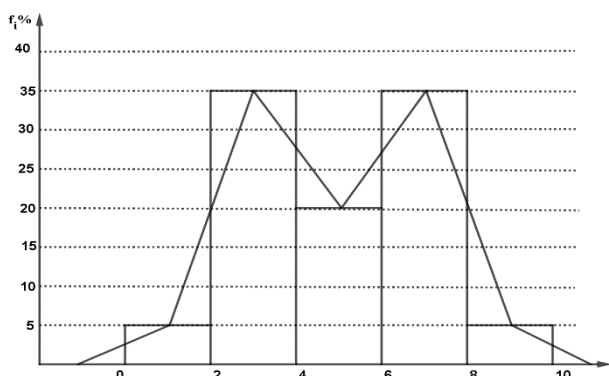
**B2.**

| Χρόνος σε Λεπτά | $X_i$ | Αριθμός Υποψηφίων $n_i$ | $X_i n_i$ | Σχετική Συχνότητα $f_i\%$ |
|-----------------|-------|-------------------------|-----------|---------------------------|
| [0,2)           | 1     | 1                       | 1         | 5                         |
| [2,4)           | 3     | 7                       | 21        | 35                        |
| [4,6)           | 5     | 4                       | 20        | 20                        |
| [6,8)           | 7     | 7                       | 49        | 35                        |
| [8,10)          | 9     | 1                       | 9         | 5                         |
| Σύνολα          |       | 20                      | 100       | 100                       |

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i n_i}{n} = \frac{100}{20} = 5$$

**B3.** Τουλάχιστον 4 λεπτά χρειάστηκαν οι μαθητές που ανήκουν στις κλάσεις: [4,6), [6,8), [8,10) και το ποσοστό τους είναι  $f_3\% + f_4\% + f_5\% = 20\% + 35\% + 5\% = 60\%$

**B4.** Ιστόγραμμα και πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων



**B5.** Κάθε ορθογώνιο έχει εμβαδό ίσο με την αντίστοιχη εκατοστιαία σχετική συχνότητα και το άθροισμα των εμβαδών των ορθογώνιων ισούται με 100. Το εμβαδό της πολυγωνικής επιφάνειας είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των πολυγώνων, δηλαδή ίσο με 100.



51) Οι τιμές ενός δείγματος είναι: **11, 7, κ, 13, 11, 10** όπου  $\kappa > 0$ . Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι **CV = 20%** και η διακύμανσή του είναι  **$S^2 = 4$**

**B1.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  του παραπάνω δείγματος.

**B2.** Αν  $\bar{x} = 10$ , να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού  $\kappa$ .

**B3.** Αν  $\kappa = 8$  να υπολογίσετε τη διάμεσο ( $\delta$ ) και το εύρος ( $R$ ) του παραπάνω δείγματος.

**B4.** Αν από κάθε τιμή του παραπάνω δείγματος αφαιρεθεί ο αριθμός 2, να εξετάσετε αν το δείγμα των νέων τιμών είναι ομοιογενές και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. ΕΠΑΛ 2019

### 51) ΛΥΣΗ

**B1.** Αφού οι παρατηρήσεις είναι θετικές η μέση τιμή είναι θετική,  $\bar{x} > 0$  άρα  $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{4} = 2$   $CV = \frac{S}{\bar{x}} 100\% \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{S}{CV} 100\% = \frac{2}{20\%} 100\% = 10$

**B2.**  $\bar{x} = \frac{\sum t_i}{n} \Leftrightarrow 10 = \frac{11+7+\kappa+13+11+10}{6} \Leftrightarrow 60 = 52 + \kappa \Leftrightarrow \kappa = 60 - 52 = 8$

**B3.** Για  $\kappa=8$  τοποθετούμε τις τιμές σε αύξουσα σειρά και επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο, διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των μεσαίων παρατηρήσεων  $7, 8, 10, 11, 11, 13$

$\delta = \frac{10+11}{2} = \frac{21}{2} = 10,5$  και το εύρος είναι  $R = x_{\max} - x_{\min} = 13 - 7 = 6$

**B4.** Όταν από κάθε τιμή μιας μεταβλητής αφαιρείται το 2 τότε η νέα μέση τιμή θα είναι η μέση τιμή των αρχικών τιμών μειωμένη κατά 2, ενώ η τυπική απόκλιση δεν μεταβάλλεται, σύμφωνα με εφαρμογή 3 του βιβλίου. Οπότε

$\bar{x}' = \bar{x} - 2 = 10 - 2 = 8$  και η νέα τυπική απόκλιση είναι  $S' = S = 2$  οπότε  $CV = \frac{S'}{|\bar{x}'|} 100\% = \frac{2}{8} 100\% = 25\% > 10\%$  άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

52) Δίνονται οι τιμές 10 διαφορετικών προϊόντων ενός καταστήματος: **13, 12, λ+5, 9, 14, 15, κ, 12, 17, 13**

όπου:  $\lambda = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x}$  **B1.** Να δείξετε ότι  $\lambda=2$

**B2.** Για  $\lambda=2$  να υπολογίσετε την τιμή του  $\kappa$ , αν η μέση τιμή ( $\bar{x}$ ) των προϊόντων είναι 12.

**B3.** Για  $\lambda=2$  και  $\kappa = 8$  να δείξετε ότι η τυπική απόκλιση ( $S$ ) των τιμών των προϊόντων είναι 3.

**B4.** Για  $\lambda=2$  και  $\kappa = 8$  να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών των προϊόντων είναι ομοιογενές. ΕΠΑΛ ΕΠΑΝ 2019

### 52) ΛΥΣΗ

**B1.**  $\lambda = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x} = \frac{3+3}{3} = \frac{6}{3} = 2$

**B2.** Για  $\lambda=2$ , οι παρατηρήσεις γίνονται: 13, 12, 7, 9, 14, 15, κ, 12, 17, 13. Επειδή  $\bar{x} = 12 \Leftrightarrow$

$$\frac{7+9+12+12+13+13+14+15+17+\kappa}{10} = 12 \Leftrightarrow \frac{112+\kappa}{10} = 12 \Leftrightarrow 112+\kappa = 120 \Leftrightarrow \kappa = 120-112 = 8$$

**B3.** Για  $\kappa=8$  οι παρατηρήσεις γίνονται: 7, 8, 9, 12, 12, 13, 13, 14, 15, 17

$$S^2 = \frac{(7-12)^2 + (8-12)^2 + (9-12)^2 + (12-12)^2 \cdot 2 + (13-12)^2 \cdot 2 + (14-12)^2 + (15-12)^2 + (17-12)^2}{10}$$

$$= \frac{25+16+9+0+2+4+9+25}{10} = \frac{90}{10} = 9 \quad \text{άρα } S = \sqrt{S^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\mathbf{B4.} \quad CV = \frac{S}{\bar{x}} 100\% = \frac{3}{12} 100\% = 25\% > 10\% \quad \text{άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές}$$

**53).** Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές ενός σχολείου κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών:

| $\chi_i$ | $\nu_i$ | $f_i\%$ | $N_i$ | $F_i\%$ |
|----------|---------|---------|-------|---------|
| 0        |         |         |       |         |
| 1        |         |         |       | 70      |
| 2        | 10      |         |       | 90      |
| 3        |         | 10      |       | 100     |
| Σύνολο   |         | 100     |       |         |

Δίνεται ότι το 40% των μαθητών δεν διάβασαν κανένα βιβλίο.

**B1** Να μεταφέρετε τον πίνακα στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά.

**B2.** Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που έχουν διαβάσει τρία βιβλία.

**B3.** Πόσοι μαθητές διάβασαν τουλάχιστον ένα βιβλίο;

**B4.** Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που διάβασαν το πολύ δύο βιβλία;

ΕΠΑΛ 2020

### 53) ΛΥΣΗ

Το 40% των μαθητών δεν διάβασαν κανένα βιβλίο (ή διάβασαν 0 βιβλία) άρα  $f_1\% = 40\% = F_1\%$

$$f_2\% = F_2\% - F_1\% = 70 - 40 = 30, \quad f_3\% = F_3\% - F_2\% = 90 - 70 = 20, \quad f_3 = 0,2 \quad \nu_3 = 10 \quad \text{άρα } \nu = \frac{\nu_3}{f_3} = \frac{10}{0,2} = \frac{10}{\frac{2}{10}} = \frac{100}{2} = 50, \quad \nu_1 = \nu f_1 = 50 \cdot 0,4 = 20, \quad \nu_2 = \nu f_2 = 50 \cdot 0,3 = 15, \quad \nu_4 = \nu f_4 = 50 \cdot 0,1 = 5$$

$$N_1 = \nu_1 = 20, \quad N_2 = N_1 + \nu_2 = 20 + 15 = 35, \quad N_3 = N_2 + \nu_3 = 35 + 10 = 45, \quad N_4 = N_3 + \nu_4 = 45 + 5 = 50$$

| $\chi_i$ | $\nu_i$ | $f_i\%$ | $N_i$ | $F_i\%$ |
|----------|---------|---------|-------|---------|
| 0        | 20      | 40      | 20    | 40      |
| 1        | 15      | 30      | 35    | 70      |
| 2        | 10      | 20      | 45    | 90      |
| 3        | 5       | 10      | 50    | 100     |
| Σύνολο   | 50      | 100     |       |         |

**B2.**  $f_4\% = 10$  άρα το 10% διάβασε τρία βιβλία.

**B3.**  $\nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 15 + 10 + 5 = 30$  μαθητές διάβασαν τουλάχιστον ένα βιβλίο (με άλλο τρόπο:  $N_4 - N_1 = 50 - 20 = 30$ )

**B4.**  $f_1\% + f_2\% + f_3\% = F_3\% = 90$  άρα το 90% διάβασαν το πολύ δύο βιβλία.

**54)** Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ο χρόνος σε ώρες που αφιερώνουν 20 μαθητές σε αθλητικές δραστηριότητες κατά τη διάρκεια μίας ημέρας.

| $\chi_i$ | $\nu_i$    | $f_i\%$ | $N_i$ |
|----------|------------|---------|-------|
| 0        | 1          |         |       |
| 1        | $\kappa^2$ |         |       |
| 2        | 8          |         |       |
| 3        | $\kappa-1$ |         |       |
| Σύνολο   | 20         | 100     |       |

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $\kappa=3$

**B2.** Για  $\kappa=3$  να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε με αριθμητικές τιμές.

**B3.** Πόσοι από τους παραπάνω μαθητές αφιερώνουν χρόνο σε αθλητικές δραστηριότητες κατά τη διάρκεια μίας ημέρας;

**B4.** Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που αφιερώνουν τουλάχιστον 2 ώρες σε αθλητικές δραστηριότητες;

ΕΠΑΛ ΕΠΑΝ 2020

### 54) ΛΥΣΗ

$$\mathbf{B1.} \quad \text{Ισχύει } 1+\kappa^2+8+\kappa-1=20 \Leftrightarrow \kappa^2+\kappa-12=0 \quad \{ \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 - 48 = 49 \} \quad \left\{ \begin{array}{l} \kappa_1 = \frac{-1+\sqrt{49}}{2} = \frac{-1+7}{2} = 3 \\ \kappa_2 = \frac{-1-\sqrt{49}}{2} = \frac{-1-7}{2} = -4 \end{array} \right\}$$

Η τιμή  $\kappa_2 = -4$  απορρίπτεται διότι  $\kappa > 1$  άρα  $\kappa = 3$

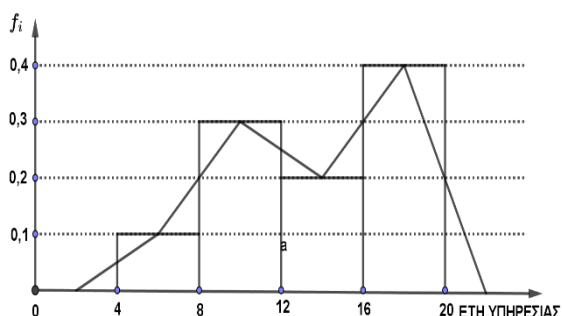
**B2.**

| $\chi_i$ | $\nu_i$ | $f_i\%$ | $N_i$ |
|----------|---------|---------|-------|
| 0        | 1       | 5       | 1     |
| 1        | 9       | 45      | 10    |
| 2        | 8       | 40      | 18    |
| 3        | 2       | 10      | 20    |
| Σύνολο   | 20      | 100     |       |

**B3.**  $\nu - \nu_1 = 20 - 1 = 19$  μαθητές αφιερώνουν χρόνο για αθλητικές δραστηριότητες

**B4.**  $f_3\% + f_4\% = 40\% + 10\% = 50\%$  Το 50% των μαθητών αφιερώνει τουλάχιστον δυο ώρες για αθλητισμό.

**55)** Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα και το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων  $f_i$  που αφορούν τα έτη υπηρεσίας 50 εκπαιδευτικών.



| Έτη υπηρεσίας<br>[ , ) | Κεντρική τιμή<br>$X_i$ | Συχνότητα<br>$\nu_i$ | Σχετική συχνότητα<br>$f_i$ | $\alpha_i$ |
|------------------------|------------------------|----------------------|----------------------------|------------|
| [4 , 8)                | 6                      | 5                    | 0,1                        | $36^0$     |
| [8 , 12)               | 10                     | 15                   | 0,3                        |            |
| [12 , 16)              | 14                     | 10                   | 0,2                        |            |
| [16 , 20)              | 18                     | 20                   | 0,4                        | $144^0$    |
| Σύνολο                 |                        | 50                   | 1,0                        | $360^0$    |

**Γ1.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα που ακολουθεί και να τον συμπληρώσετε με βάση το ιστόγραμμα

Όπου  $\alpha_i$  το αντίστοιχο τόξο του κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων.

**Γ2.** Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν συμπληρώσει τουλάχιστον 8 έτη υπηρεσίας ;

**Γ3.** Να βρείτε το ποσοστό των εκπαιδευτικών που έχουν συμπληρώσει υπηρεσία λιγότερη από 16 έτη.

**Γ4.** Πόσο είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα;

ΕΠΑΛ 2021

**55) ΛΥΣΗ**

**Γ1.**  $X_1 = \frac{4+8}{2} = \frac{12}{2} = 6$  πλάτος  $c=8-4=4$   $X_2 = X_1 + c = 6 + 4 = 10$  ,  $X_3 = 14$  ,  $X_4 = X_3 + c = 14 + 4 = 18$

Από το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων έχουμε:  $f_1 = 0,1 = \frac{\nu_1}{\nu} \Leftrightarrow \nu_1 = \nu \cdot f_1 = 50 \cdot 0,1 = 5$  ,  $f_2 = 0,3 = \frac{\nu_2}{\nu} \Leftrightarrow \nu_2 = \nu \cdot f_2 = 50 \cdot 0,3 = 15$  ,  $f_3 = 0,2 = \frac{\nu_3}{\nu} \Leftrightarrow \nu_3 = \nu \cdot f_3 = 50 \cdot 0,2 = 10$  ,  $f_4 = 0,4$

$\alpha_2 = f_2 360^0 = 0,3 \cdot 360^0 = 108^0$  ,  $\alpha_3 = f_3 360^0 = 0,2 \cdot 360^0 = 72^0$

**Γ2.** Οι εκπαιδευτικοί που έχουν συμπληρώσει τουλάχιστον 8 έτη υπηρεσίας είναι  $\nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 15 + 10 + 20 = 45$

**Γ3.** Το ποσοστό των εκπαιδευτικών που έχουν συμπληρώσει υπηρεσία λιγότερη από 16 έτη  $f_1\% + f_2\% + f_3\% = 10\% + 30\% + 20\% = 60\%$  {Άλλος τρόπος:  $\frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}{\nu} = \frac{5 + 15 + 10}{50} = \frac{30}{50} = \frac{60}{100} = 60\%$  }

**Γ4.** Επειδή το εμβαδό κάθε ορθογώνιου είναι ίσο με την αντίστοιχη σχετική συχνότητα και ως γνωστόν, το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων ισούται με ένα , το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα, που είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών όλων των πολυγώνων, θα είναι ίσο με ένα.

**56)** Οι χρόνοι σε λεπτά που χρειάστηκαν 50 μαθητές/μαθήτριες ενός ΕΠΑΛ για να μεταβούν από το σπίτι στο σχολείο τους, έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους  $c$ , όπου  $\frac{2}{c} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$  όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

| Χρόνος<br>Σε λεπτά | Συχνότητα<br>$n_i$ | Σχετική<br>Συχνότητα<br>$f_i\%$ | Αθροιστική<br>Συχνότητα<br>$N_i$ |
|--------------------|--------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| [14,...)           | 15                 | 30                              | 15                               |
| [...,...)          | 20                 | 40                              | ...                              |
| [...,...)          | ...                | ...                             | ...                              |
| [...,...)          | 5                  | ...                             | 50                               |
| Σύνολο             | 50                 | 100                             |                                  |

**Γ1.** Να υπολογίσετε την τιμή του πλάτους  $c$

**Γ2.** Για  $c=8$  να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

**Γ3.** Για  $c=8$  να βρείτε το ποσοστό των μαθητών/μαθητριών που χρειάστηκαν τουλάχιστον μισή ώρα για να μεταβούν στο σχολείο τους.  
ΕΠΑΛ ΕΠΑΝ 2021

### 56) ΛΥΣΗ

$$\Gamma 1. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x})^2-2^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

**Άρα**  $\frac{2}{c} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow c = 8$

**Γ2.**

| Χρόνος<br>Σε λεπτά | Συχνότητα<br>$n_i$ | Σχετική<br>Συχνότητα<br>$f_i\%$ | Αθροιστική<br>Συχνότητα<br>$N_i$ |
|--------------------|--------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| [14, <b>22</b> )   | 15                 | 30                              | 15                               |
| [ <b>22</b> , 30)  | 20                 | 40                              | <b>35</b>                        |
| [ <b>30</b> , 38)  | <b>10</b>          | <b>20</b>                       | <b>45</b>                        |
| [ <b>38</b> , 46)  | 5                  | <b>10</b>                       | 50                               |
| Σύνολο             | 50                 | 100                             |                                  |

**Γ3.** Οι μαθητές/μαθήτριες που χρειάστηκαν τουλάχιστον μισή ώρα για να μεταβούν στο σχολείο τους, ανήκουν στις κλάσεις [30,38) και [38,46)  $f_3\% + f_4\% = 20\% + 10\% = 30\%$