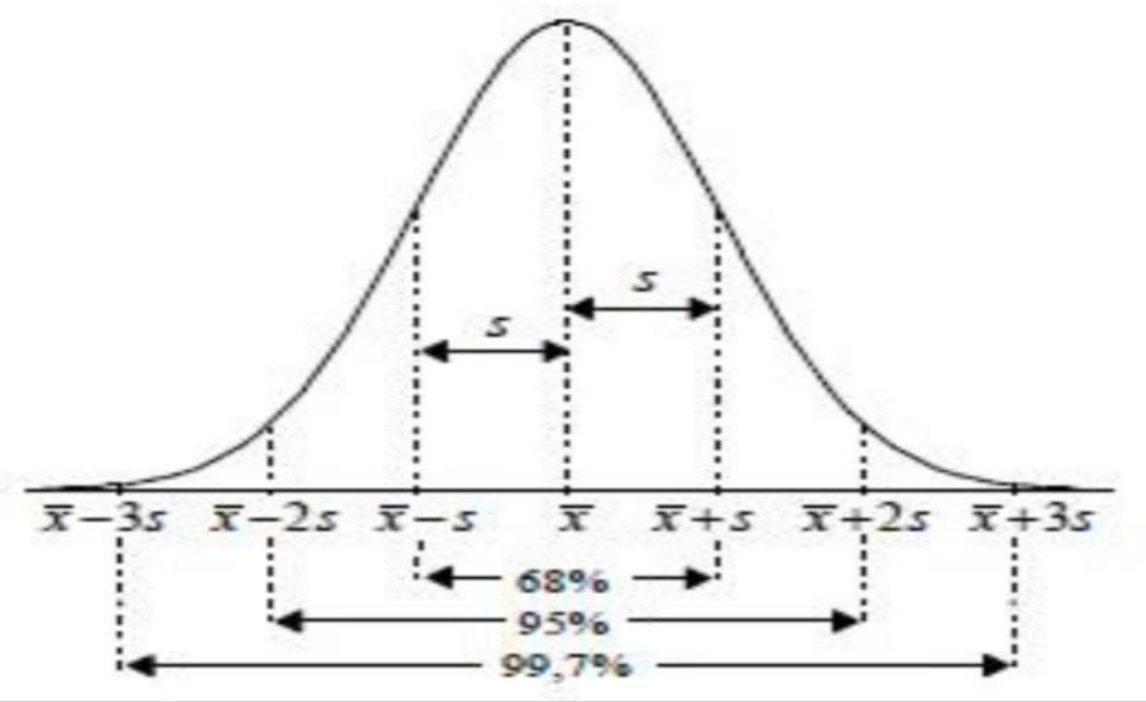
Κ Α Ν Ο Ν Ι Κ Η Κ Α Τ Α Ν Ο Μ Η

Όταν η κατανομή είναι κανονική ή περίπου κανονική τότε ισχύουν τα παρακάτω:

- Η **μέση τιμή** είναι **ίση** με τη **διάμεσο** $\bar{\chi}$ **= δ .**
- Στο διάστημα $(\bar{\chi} - \boldsymbol{S}, \bar{\chi} + \boldsymbol{S})$ βρίσκεται το **68%** των παρατηρήσεων.
- Στο διάστημα $(\bar{\chi} - \boldsymbol{2S}, \bar{\chi} + \boldsymbol{2S})$ βρίσκεται το **95%** των παρατηρήσεων.
- Στο διάστημα $(\bar{\chi} - \boldsymbol{2S}, \bar{\chi} + \boldsymbol{2S})$ βρίσκεται το **99,7%** των παρατηρήσεων.
- Το **εύρος** ισούται περίπου με **έξι τυπικές αποκλίσεις** **R ≅ 6·S**

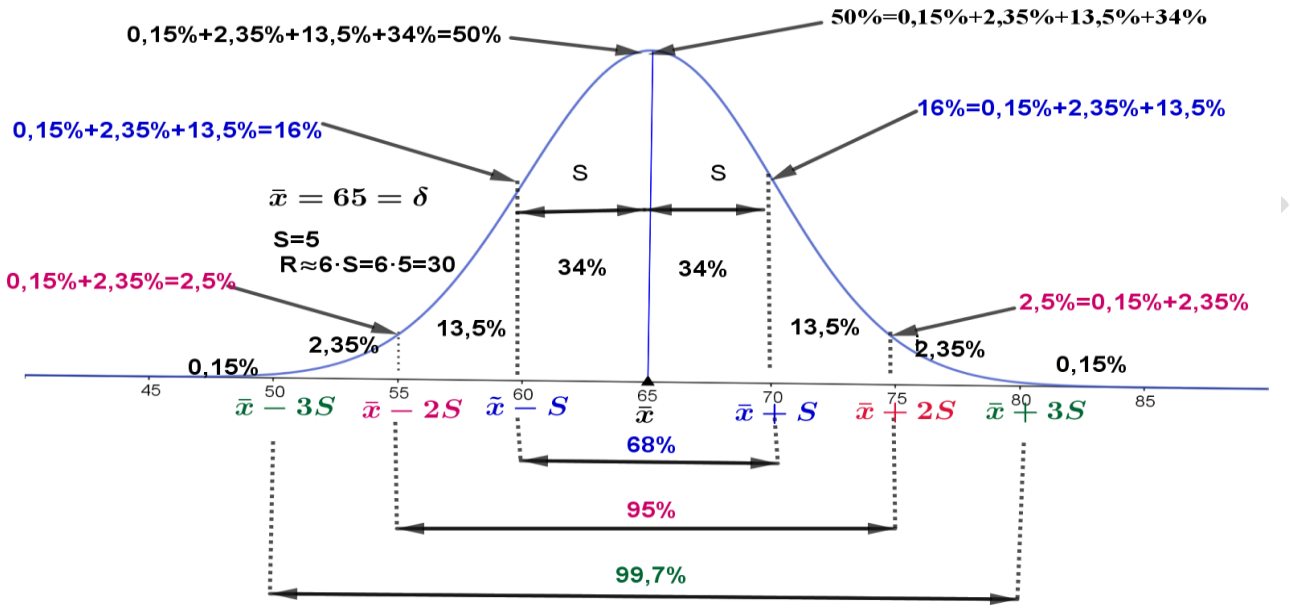


Η καμπύλη είναι συμμετρική με άξονα συμμετρίας τη μέση τιμή (όπως λέγατε στο γυμνάσιο αν διπλώσω το σχήμα γύρω από την ευθεία της μέσης τιμής το $\bar{\chi} + S$ συμπίπτει με το $\bar{\chi} - S$) και όσες παρατηρήσεις υπάρχουν στο διάστημα $(\bar{\chi} - S, \bar{\chi})$, τόσες θα υπάρχουν και στο διάστημα $(\bar{\chi}, \bar{\chi} + S)$. Άρα

- Το ποσοστό σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\bar{\chi} - \boldsymbol{S}, \bar{\chi})$ **και** $(\bar{\chi}, \bar{\chi} + \boldsymbol{S})$ θα είναι $\frac{68\%}{2} = \boldsymbol{34\%}$
- Το ποσοστό σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\bar{\chi} - \boldsymbol{2S}, \bar{\chi} - \boldsymbol{S})$ **και** $(\bar{\chi} + \boldsymbol{S}, \bar{\chi} + \boldsymbol{2S})$ θα είναι $\frac{95\% - 68\%}{2} = \frac{27}{2} = \boldsymbol{13,5\%}$
- Το ποσοστό σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\bar{\chi} - \boldsymbol{3S}, \bar{\chi} - \boldsymbol{2S})$ **και** $(\bar{\chi} + \boldsymbol{2S}, \bar{\chi} + \boldsymbol{3S})$ θα είναι $\frac{99,7\% - 95\%}{2} = \frac{4,7}{2} = \boldsymbol{2,35\%}$
- Στα εναπομείναντα διαστήματα το ποσοστό θα είναι $\frac{100\% - 99,7\%}{2} = \frac{0,3}{2} = \boldsymbol{0,15\%}$

Γνωρίζοντας τα ποσοστά αυτών των διαστημάτων μπορούμε να υπολογίσουμε το ποσοστό κάθε άλλου διαστήματος αθροίζοντας τα επιμέρους ποσοστά.(στις ασκήσεις η ερώτηση είναι <<από ως και>> π.χ.

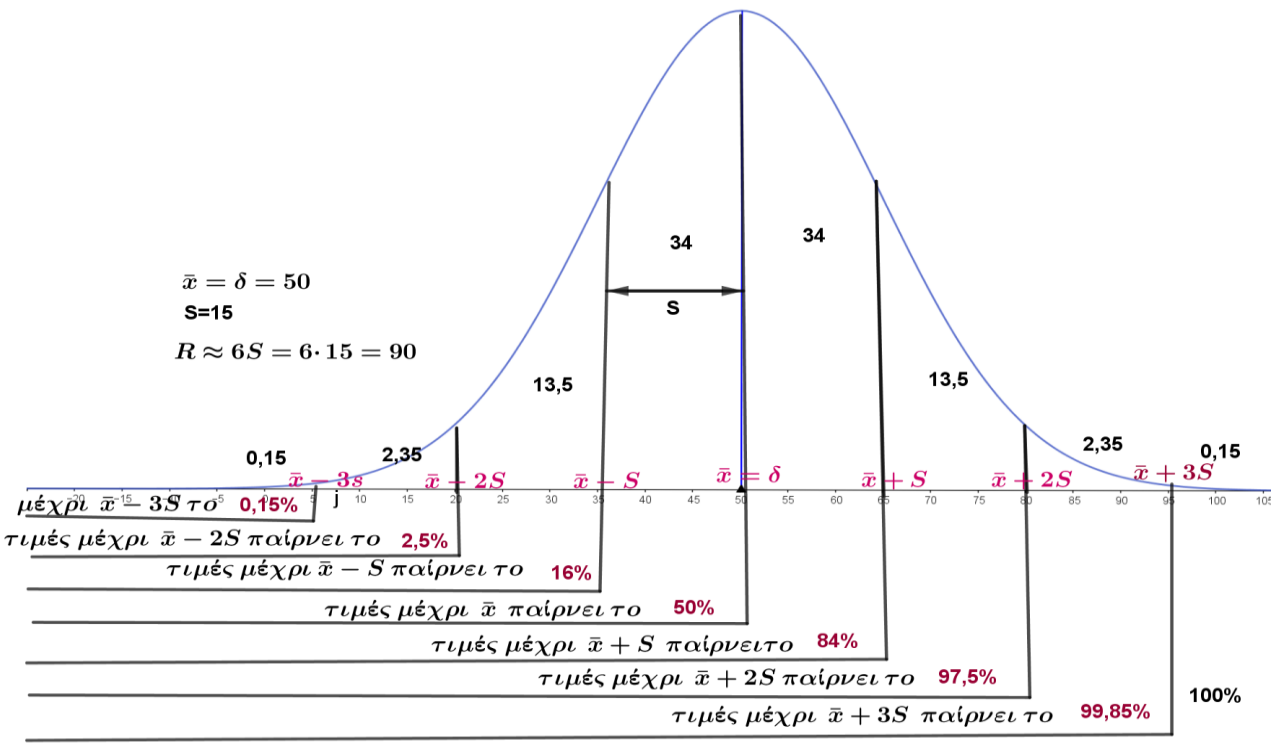
- στα διαστήματα $(\bar{\chi} - \boldsymbol{2S}, \bar{\chi})$ **και** $(\bar{\chi}, \bar{\chi} + \boldsymbol{2S})$ το ποσοστό είναι **13,5%+34% =** $\frac{95\%}{2}$ **= 47,5%**
- στα διαστήματα $(\bar{\chi} - \boldsymbol{2S}, \bar{\chi} + \boldsymbol{S})$ **και** $(\bar{\chi} - \boldsymbol{S}, \bar{\chi} + \boldsymbol{2S})$ το ποσοστό είναι **13,5%+34% +34%= 81,5%**
  ή με άλλο τρόπο $\boldsymbol{68\%} + \frac{95\% - 68\%}{2} = \boldsymbol{81,5}$
- στα διαστήματα $(\bar{\chi} - \boldsymbol{3S}, \bar{\chi})$ **και** $(\bar{\chi}, \bar{\chi} + \boldsymbol{3S})$ το ποσοστό είναι **2,35+13,5%+34% =** $\frac{99,7\%}{2}$**= 49,85%**



Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα ποσοστά ,όταν έχουμε εκφράσεις όπως :<<τιμές μέχρι>> ή <<τιμές το πολύ>> ή <<τιμές λιγότερο από>>

- ✓ Τιμές μέχρι $\bar{\chi} - 3S$ παίρνει το 50%-(13,5%+34%)=50%-47,5% = **0,15%** των παρατηρήσεων.
  ή με άλλο τρόπο υπολογισμού: $\frac{100\%-99{,}7\%}{2} = \frac{0{,}3\%}{2} = 0,15\%$
- ✓ Τιμές μέχρι $\bar{\chi} - 2S$ παίρνει το **50%-(2,35%+13,5%+34%)=**50%-49,85% = **2,5%** των παρατηρήσεων.
  ή με άλλο τρόπο υπολογισμού: $\frac{100\%-95\%}{2} = \frac{5\%}{2} = 2,5\%$
- ✓ Τιμές μέχρι $\bar{\chi} - S$ παίρνει το 50%-34% = **16%** των παρατηρήσεων.
  ή με άλλο τρόπο υπολογισμού: $\frac{100\%-68\%}{2} = \frac{32\%}{2} = 16\%$
- ✓ Τιμές μέχρι $\bar{\chi}$ παίρνει το **50%** των παρατηρήσεων.
  ή με άλλο τρόπο υπολογισμού: $\frac{100\%}{2} = 50\%$
- ✓ Τιμές μέχρι $\bar{\chi} + S$ παίρνει το 50%+34% = **84%** των παρατηρήσεων.
  ή με άλλο τρόπο υπολογισμού: $100\% - \frac{100\%-68\%}{2} = 100\% - 16\% = 84\%$
- ✓ Τιμές μέχρι $\bar{\chi} + 2S$ παίρνει το 50%+34%+13,5%=50%+47,5% = **97,5%** των παρατηρήσεων.
  ή με άλλο τρόπο υπολογισμού: $100\% - \frac{100\%-95\%}{2} = 100\% - 2{,}5\% = 97,5\%$
- ✓ Τιμές μέχρι $\bar{\chi} + 3S$ παίρνει το **50%+34%+13,5%+2,35=**50%+49,85% = **99,85%** των παρατηρήσεων.
  ή με άλλο τρόπο υπολογισμού: $100\% - \frac{100\%-99{,}7\%}{2} = 100\% - 0{,}15 = 99,85\%$

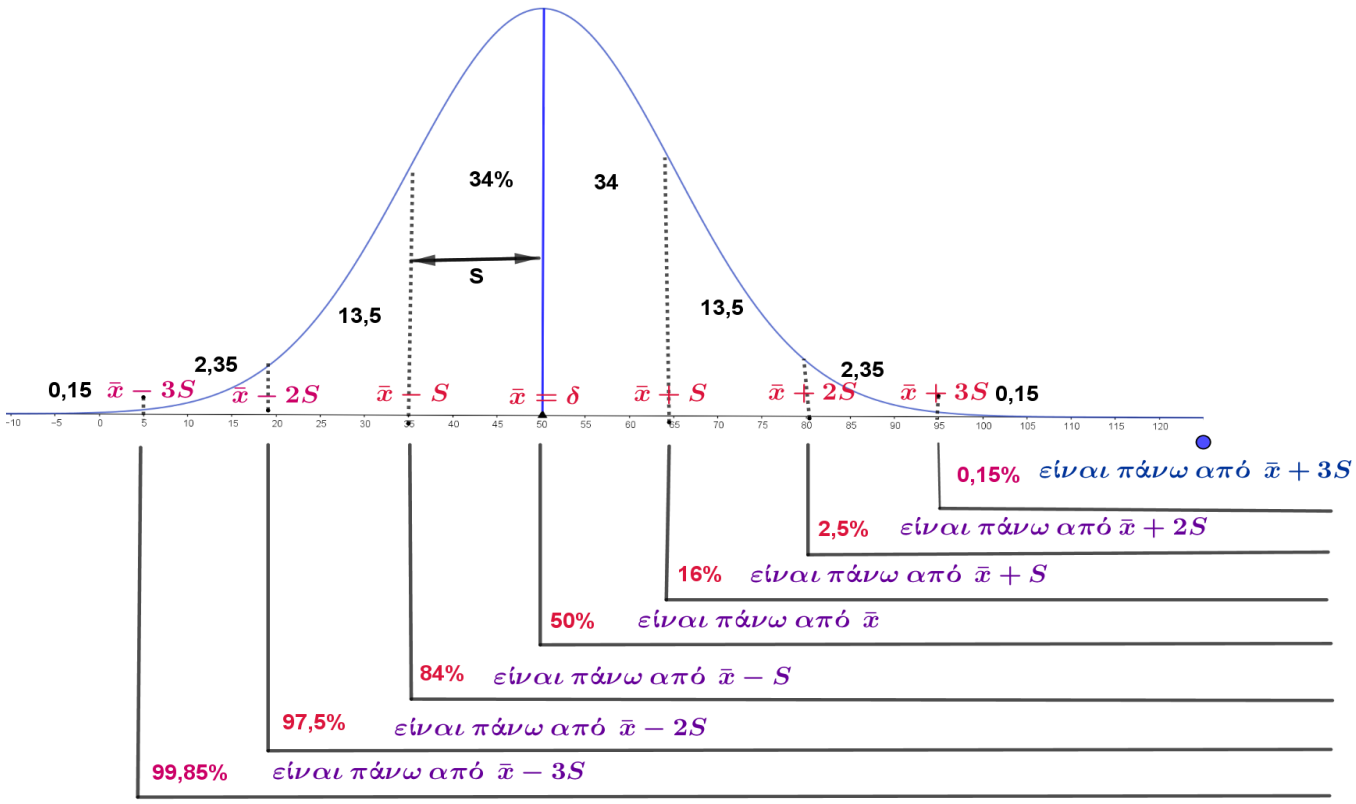
10ΕΠΑΛΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ



Αντίστοιχα, στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα ποσοστά ,όταν έχουμε εκφράσεις <<τιμές μεγαλύτερες ή ίσες>> ή <<τιμές τουλάχιστον >> ή <<τιμές περισσότερο από>>ή <<πάνω από>>

- ✓ Τιμές μεγαλύτερες ή ίσες από $\bar{\chi} + 3S$ παίρνει το **0,15%** των παρατηρήσεων.
  ή με άλλο τρόπο υπολογισμού: $\frac{100\% - 99{,}7\%}{2} = \frac{0{,}3\%}{2} = \mathbf{0,15\%}$
- ✓ Τιμές μεγαλύτερες ή ίσες από $\bar{\chi} + 2S$ παίρνει το **2,5%** των παρατηρήσεων.
  ή με άλλο τρόπο υπολογισμού: $\frac{100\% - 95\%}{2} = \frac{5\%}{2} = \mathbf{2,5\%}$
- ✓ Τιμές μεγαλύτερες ή ίσες από $\bar{\chi} + S$ παίρνει το **16%** των παρατηρήσεων.
  ή με άλλο τρόπο υπολογισμού: $\frac{100\% - 68\%}{2} = \frac{32\%}{2} = \mathbf{16\%}$
- ✓ Τιμές μεγαλύτερες ή ίσες από $\bar{\chi}$ παίρνει το **50%** των παρατηρήσεων.
  ή με άλλο τρόπο υπολογισμού: $\frac{100\%}{2} = \mathbf{50\%}$
- ✓ Τιμές μεγαλύτερες ή ίσες από $\bar{\chi} - S$ παίρνει το **84%** των παρατηρήσεων.
  ή με άλλο τρόπο υπολογισμού: $\mathbf{100\%} - \frac{100\% - 68\%}{2} = 100\% - 16\% = \mathbf{84\%}$
- ✓ Τιμές μεγαλύτερες ή ίσες από $\bar{\chi} - 2S$ παίρνει το **97,5%** των παρατηρήσεων.
  ή με άλλο τρόπο υπολογισμού: $\mathbf{100\%} - \frac{100\% - 95\%}{2} = 100\% - 2{,}5\% = \mathbf{97,5\%}$
- ✓ Τιμές μεγαλύτερες ή ίσες από $\bar{\chi} - 3S$ παίρνει το **99,85%** των παρατηρήσεων.
  $\mathbf{100\%} - \frac{100\% - 99{,}7\%}{2} = 100\% - 0{,}15 = \mathbf{99,85\%}$

10ΕΠΑΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ Α.



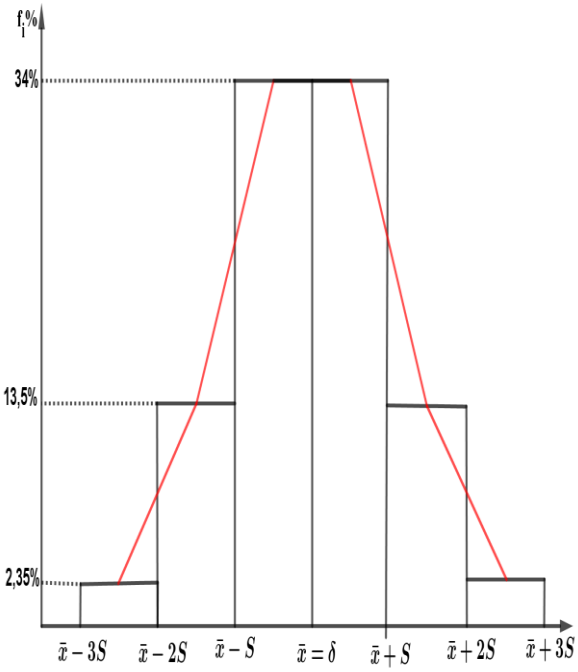
Ανάλογα με τα στοιχεία που έχουμε για τις παρατηρήσεις που παίρνουν τιμές μικρότερες από $\bar{\chi}-3S$ και μεγαλύτερες από $\bar{\chi}+3S$ μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τις παρατηρήσεις σε κλάσεις ίσου πλάτους και συνεπώς να σχεδιάσουμε το ιστόγραμμα των σχετικών % συχνοτήτων $f_i\%$,καθώς και το ιστόγραμμα αθροιστικών % σχετικών συχνοτήτων $F_i\%$.

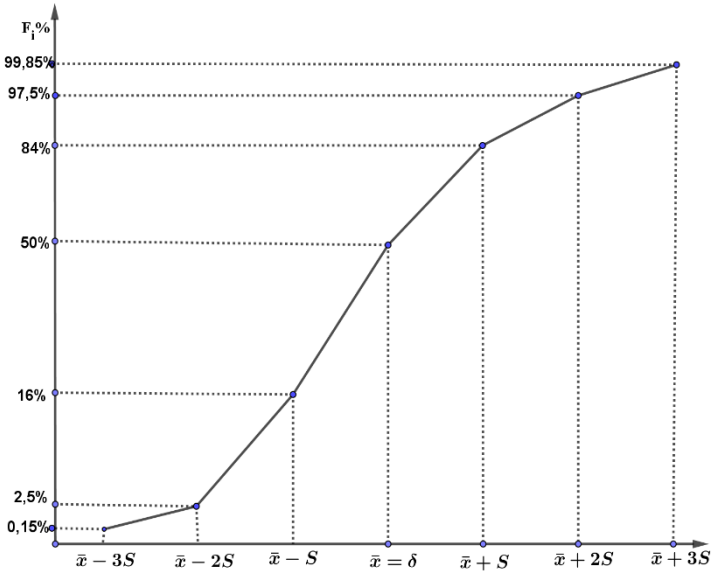
ΚΛΑΣΕΙΣ	$f_I\%$	$F_I\%$
[, $\bar{\chi}-3S$)	0,15	0,15
[$\bar{\chi}-3S$, $\bar{\chi}-2S$)	2,35	2,5
[$\bar{\chi}-2S$, $\bar{\chi}-S$)	13,5	16
[$\bar{\chi}-S$, $\bar{\chi}$)	34	50
[$\bar{\chi}$, $\bar{\chi}+S$)	34	84
[$\bar{\chi}+S$, $\bar{\chi}+2S$)	13,5	97,5
[$\bar{\chi}+2S$, $\bar{\chi}+3S$)	2,35	99,85
[$\bar{\chi}+3S$,)	0,15	100
ΣΥΝΟΛΟ	100	

{{{Σχόλιο: Πρακτικά για τις ασκήσεις τα παραπάνω σημαίνουν ότι : Γνωρίζοντας ότι:

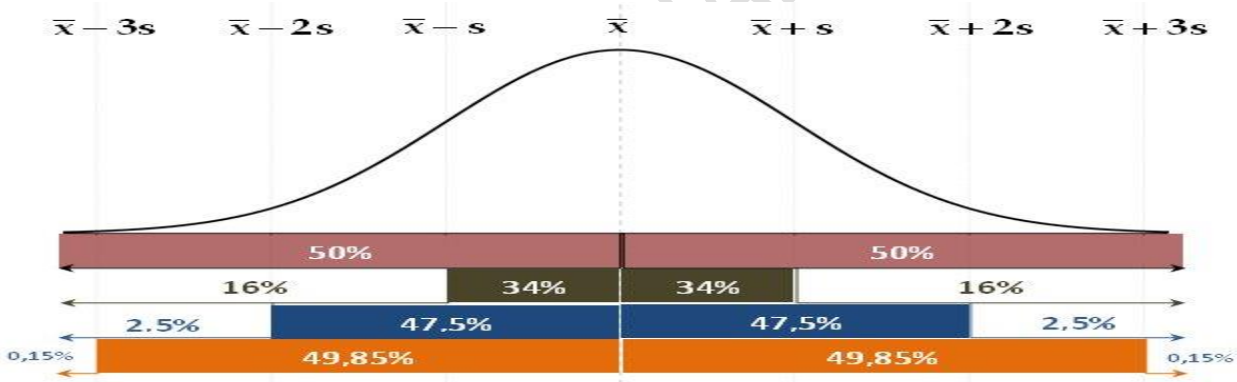
$f_I=\frac{\nu_\iota}{\nu} \Leftrightarrow \nu_\iota=\nu\cdot f_I \Leftrightarrow \quad \nu=\frac{\nu_\iota}{f_I}$ **όταν μας δίνουν το ποσοστό μιας κλάσης, δηλαδή το $f_I\%$ της κλάσης, το διαιρούμε με 100 ,παίρνουμε τη σχετική συχνότητα f_I και αν μας δίνουν τις παρατηρήσεις ν_ι της κλάσης υπολογίζουμε το μέγεθος του δείγματος ν , ενώ αν μας δίνουν το μέγεθος ν του δείγματος , υπολογίζουμε τις παρατηρήσεις ν_ι της κλάσης . (στις ασκήσεις δεν μιλάμε για κλάση αλλά για διάστημα}}}**

1ΟΣ ΕΠΑΛ ΑΘΗΝΩΝ





Εναλλακτικό σχεδιάγραμμα για την παρουσίαση των δεδομένων της κανονικής κατανομής



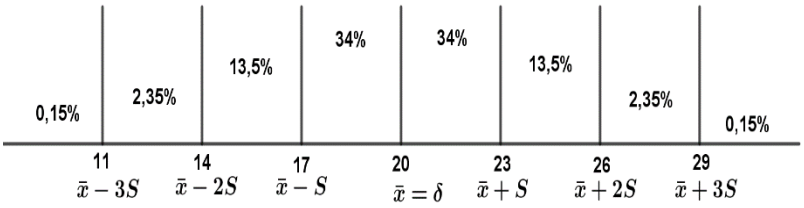
Υπόμνημα:

$34\% = \frac{68}{2}\%$ $\qquad$ $16\% = \frac{100-68}{2}\%$

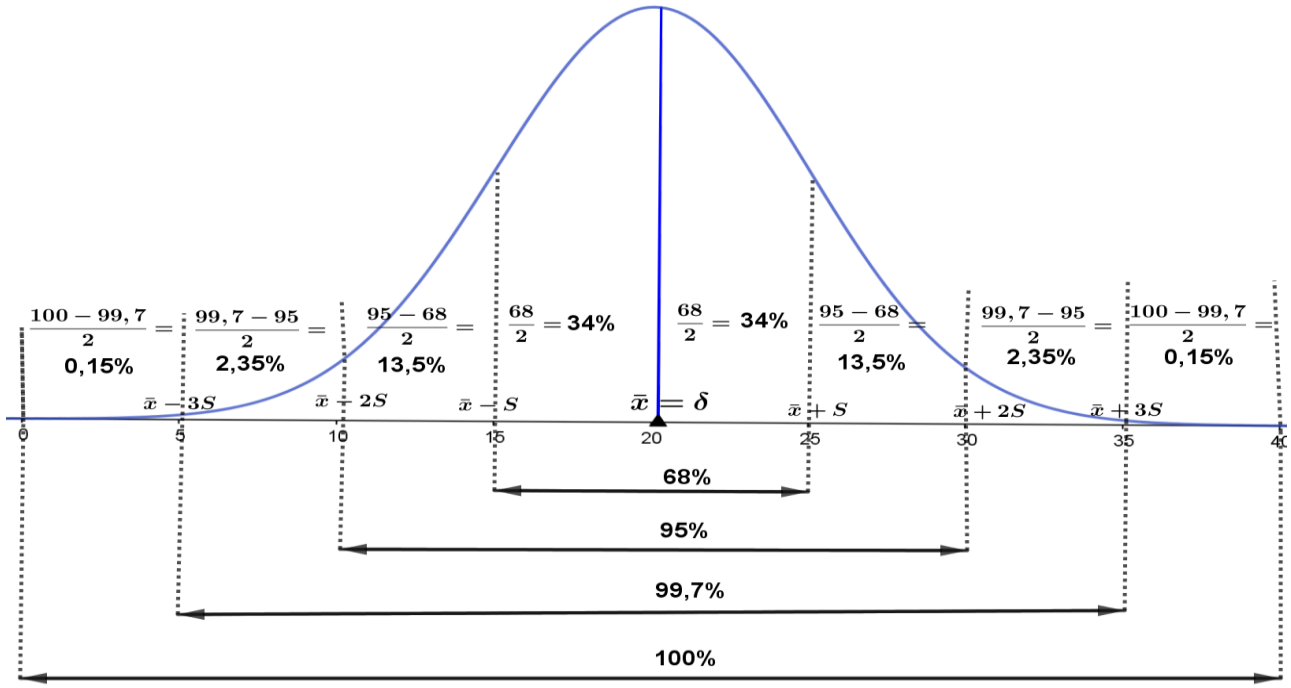
$47,5\% = \frac{95}{2}\%$ $\qquad$ $2,5\% = \frac{100-95}{2}\%$

$49,85\% = \frac{99,7}{2}\%$ $\qquad$ $0,15\% = \frac{100-99,7}{2}\%$

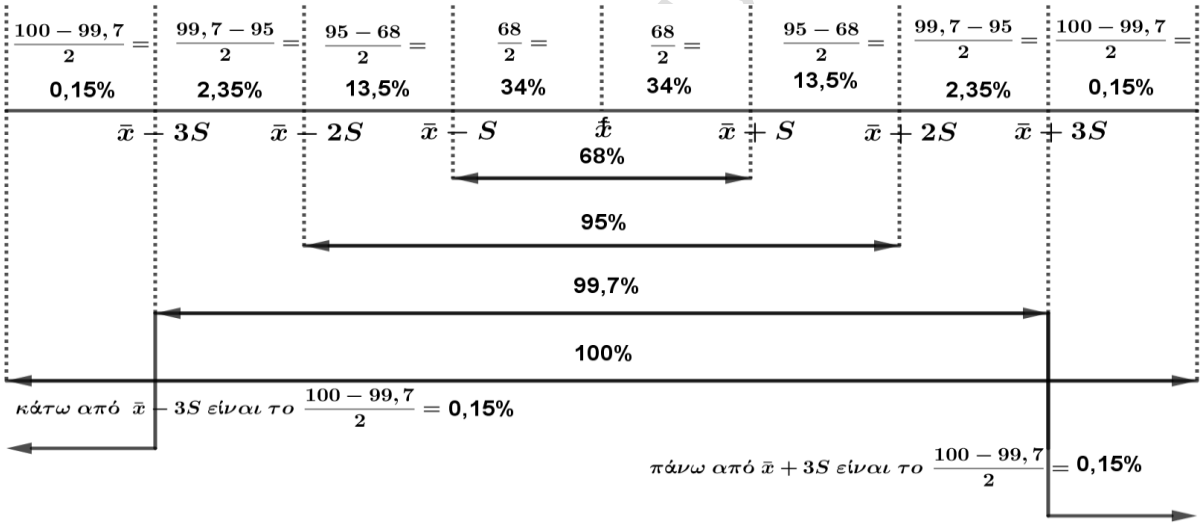
Όταν υπολογίσουμε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση βάζουμε τα νούμερα σε μια πρόχειρη κατασκευή στο πρόχειρο σαν την διπλανή ($\bar{\chi} = 20$,S=3) για να μας βοηθήσει στους υπολογισμούς.



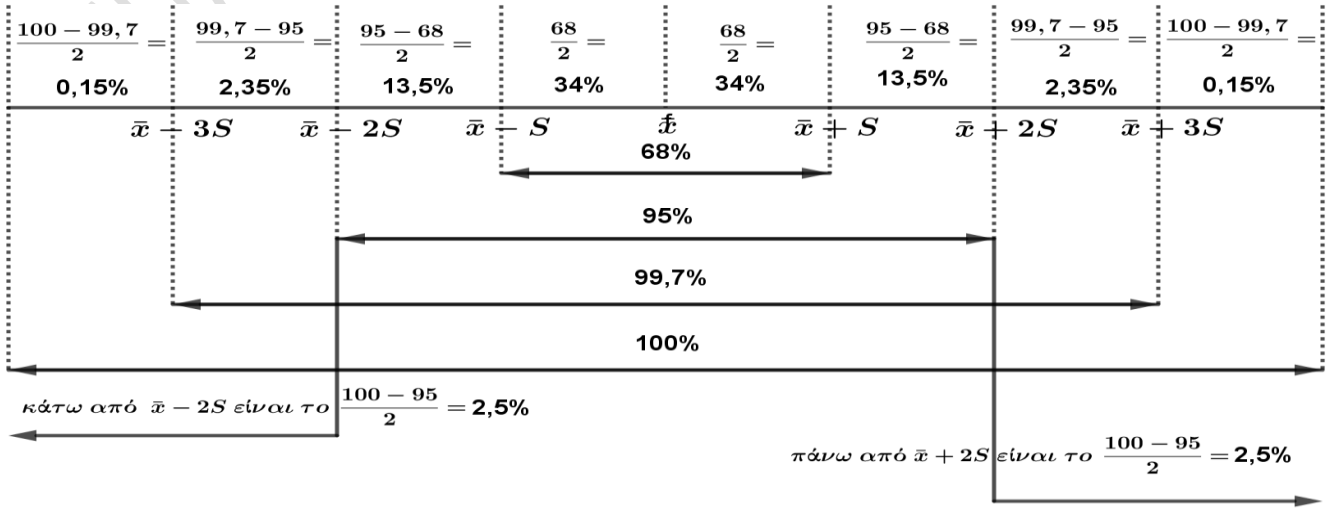
1)


$\frac{100-99,7}{2} =$ 0,15%
$\frac{99,7-95}{2} =$ 2,35%
$\frac{95-68}{2} =$ 13,5%
$\frac{68}{2} =$ 34%
$\frac{68}{2} =$ 34%
$\frac{95-68}{2} =$ 13,5%
$\frac{99,7-95}{2} =$ 2,35%
$\frac{100-99,7}{2} =$ 0,15%
$\bar{x}-3S$
$\bar{x}-2S$
$\bar{x}-S$
$\bar{x}=\delta$
$\bar{x}+S$
$\bar{x}+2S$
$\bar{x}+3S$
0
5
10
15
20
25
30
35
40
68%
95%
99,7%
100%

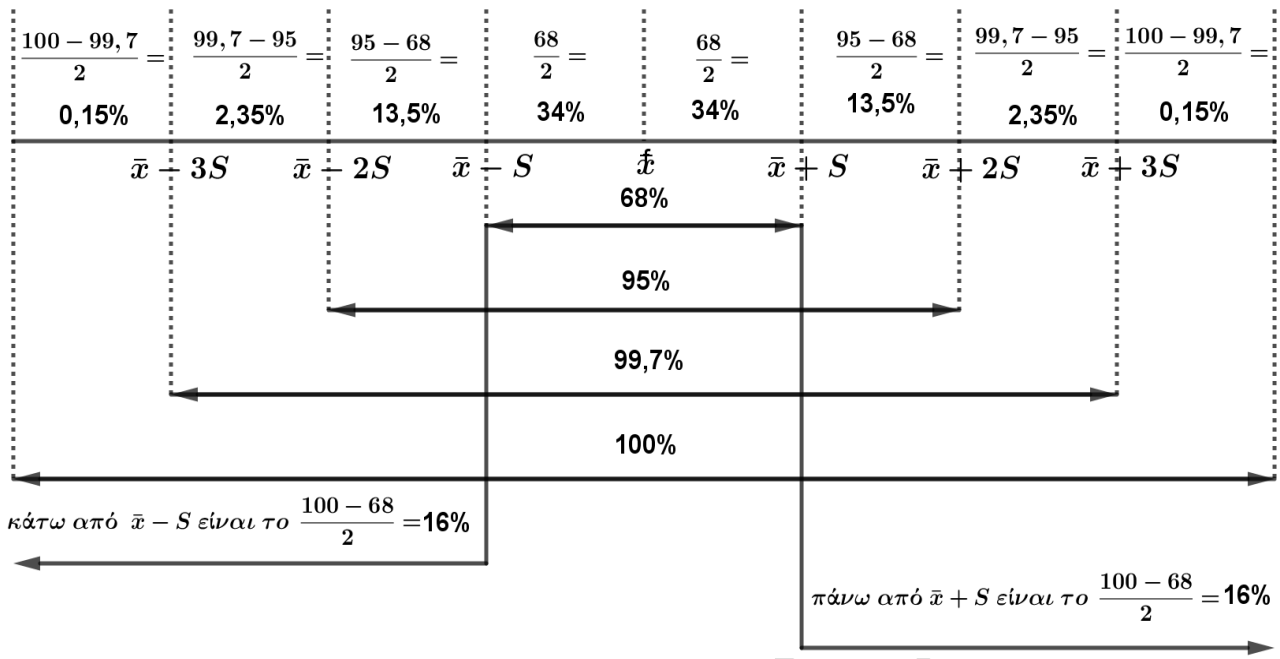
2)


$\frac{100-99,7}{2} =$ 0,15%
$\frac{99,7-95}{2} =$ 2,35%
$\frac{95-68}{2} =$ 13,5%
$\frac{68}{2} =$ 34%
$\frac{68}{2} =$ 34%
$\frac{95-68}{2} =$ 13,5%
$\frac{99,7-95}{2} =$ 2,35%
$\frac{100-99,7}{2} =$ 0,15%
$\bar{x}-3S$
$\bar{x}-2S$
$\bar{x}-S$
$\bar{x}$
$\bar{x}+S$
$\bar{x}+2S$
$\bar{x}+3S$
68%
95%
99,7%
100%
κάτω από $\bar{x}-3S$ είναι το $\frac{100-99,7}{2} =$ 0,15%
πάνω από $\bar{x}+3S$ είναι το $\frac{100-99,7}{2} =$ 0,15%

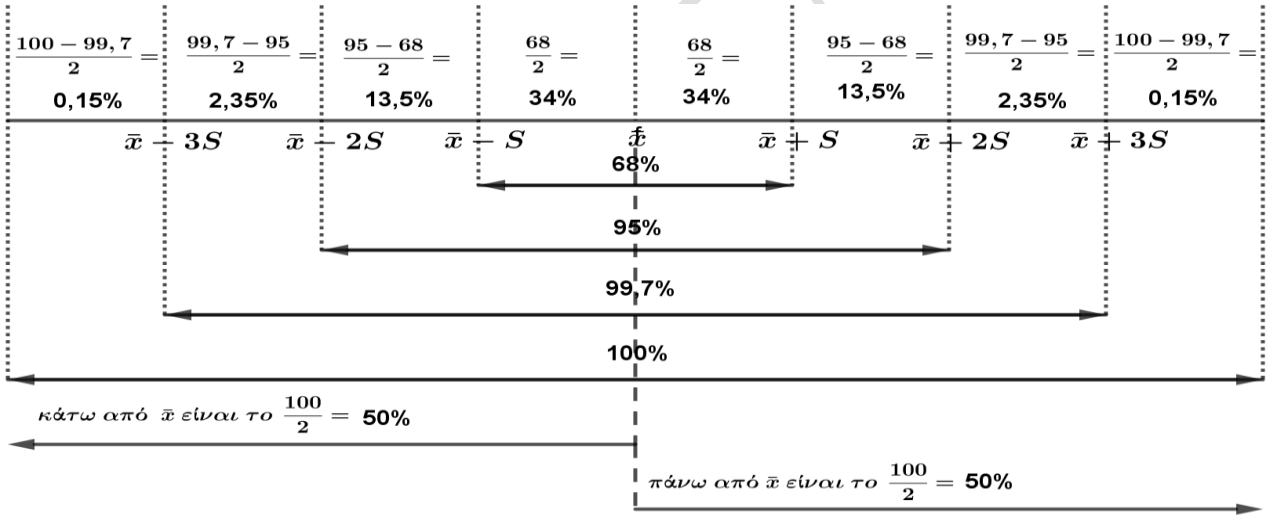
3)


$\frac{100-99,7}{2} =$ 0,15%
$\frac{99,7-95}{2} =$ 2,35%
$\frac{95-68}{2} =$ 13,5%
$\frac{68}{2} =$ 34%
$\frac{68}{2} =$ 34%
$\frac{95-68}{2} =$ 13,5%
$\frac{99,7-95}{2} =$ 2,35%
$\frac{100-99,7}{2} =$ 0,15%
$\bar{x}-3S$
$\bar{x}-2S$
$\bar{x}-S$
$\bar{x}$
$\bar{x}+S$
$\bar{x}+2S$
$\bar{x}+3S$
68%
95%
99,7%
100%
κάτω από $\bar{x}-2S$ είναι το $\frac{100-95}{2} =$ 2,5%
πάνω από $\bar{x}+2S$ είναι το $\frac{100-95}{2} =$ 2,5%

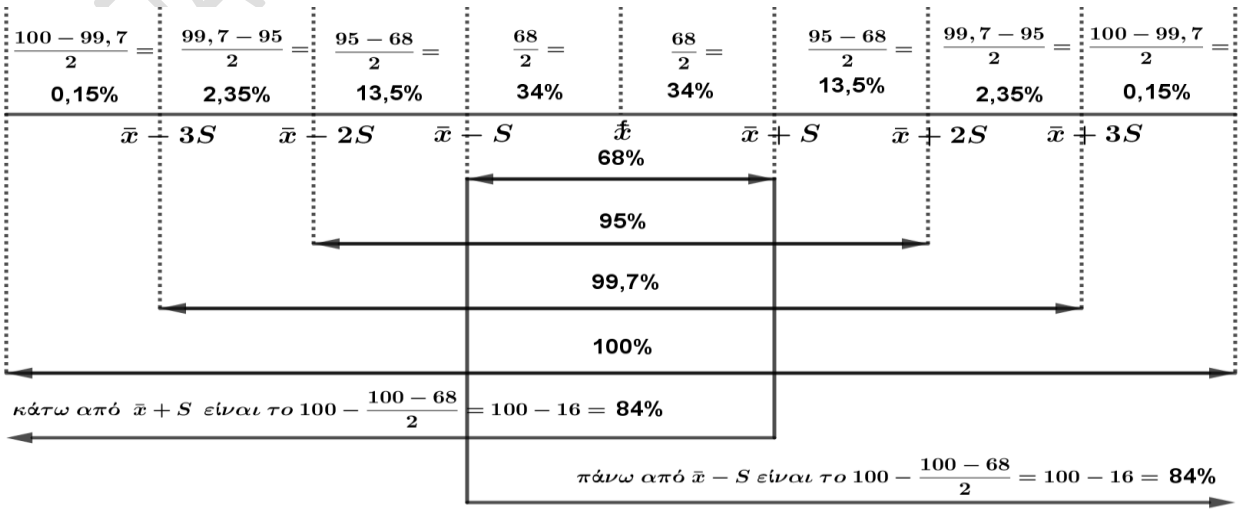
4)


$\frac{100-99,7}{2}=$ 0,15%
$\frac{99,7-95}{2}=$ 2,35%
$\frac{95-68}{2}=$ 13,5%
$\frac{68}{2}=$ 34%
$\frac{68}{2}=$ 34%
$\frac{95-68}{2}=$ 13,5%
$\frac{99,7-95}{2}=$ 2,35%
$\frac{100-99,7}{2}=$ 0,15%
$\bar{x}-3S$
$\bar{x}-2S$
$\bar{x}-S$
$\bar{x}$
$\bar{x}+S$
$\bar{x}+2S$
$\bar{x}+3S$
68%
95%
99,7%
100%
κάτω από $\bar{x}-S$ είναι το $\frac{100-68}{2}=$16%
πάνω από $\bar{x}+S$ είναι το $\frac{100-68}{2}=$16%

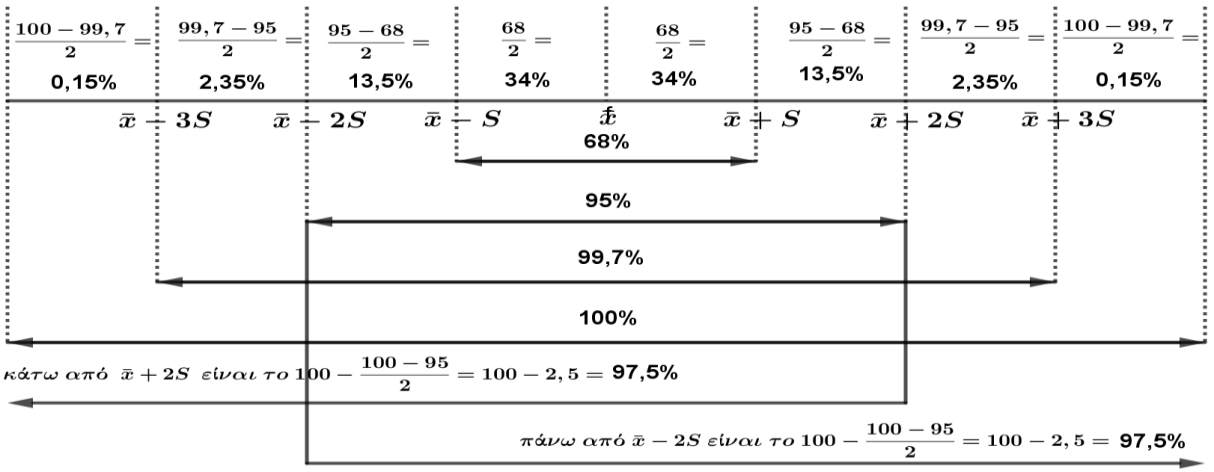
5)


$\frac{100-99,7}{2}=$ 0,15%
$\frac{99,7-95}{2}=$ 2,35%
$\frac{95-68}{2}=$ 13,5%
$\frac{68}{2}=$ 34%
$\frac{68}{2}=$ 34%
$\frac{95-68}{2}=$ 13,5%
$\frac{99,7-95}{2}=$ 2,35%
$\frac{100-99,7}{2}=$ 0,15%
$\bar{x}-3S$
$\bar{x}-2S$
$\bar{x}-S$
$\bar{x}$
$\bar{x}+S$
$\bar{x}+2S$
$\bar{x}+3S$
68%
95%
99,7%
100%
κάτω από $\bar{x}$ είναι το $\frac{100}{2}=$ 50%
πάνω από $\bar{x}$ είναι το $\frac{100}{2}=$ 50%

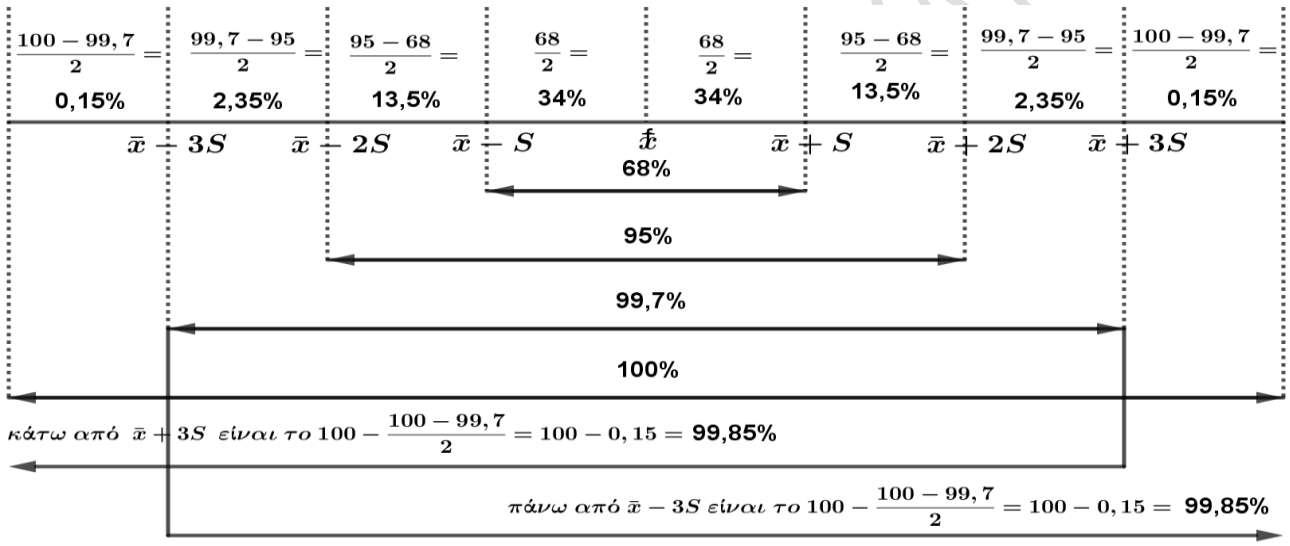
6)


$\frac{100-99,7}{2}=$ 0,15%
$\frac{99,7-95}{2}=$ 2,35%
$\frac{95-68}{2}=$ 13,5%
$\frac{68}{2}=$ 34%
$\frac{68}{2}=$ 34%
$\frac{95-68}{2}=$ 13,5%
$\frac{99,7-95}{2}=$ 2,35%
$\frac{100-99,7}{2}=$ 0,15%
$\bar{x}-3S$
$\bar{x}-2S$
$\bar{x}-S$
$\bar{x}$
$\bar{x}+S$
$\bar{x}+2S$
$\bar{x}+3S$
68%
95%
99,7%
100%
κάτω από $\bar{x}+S$ είναι το $100-\frac{100-68}{2}=100-16=$ 84%
πάνω από $\bar{x}-S$ είναι το $100-\frac{100-68}{2}=100-16=$ 84%

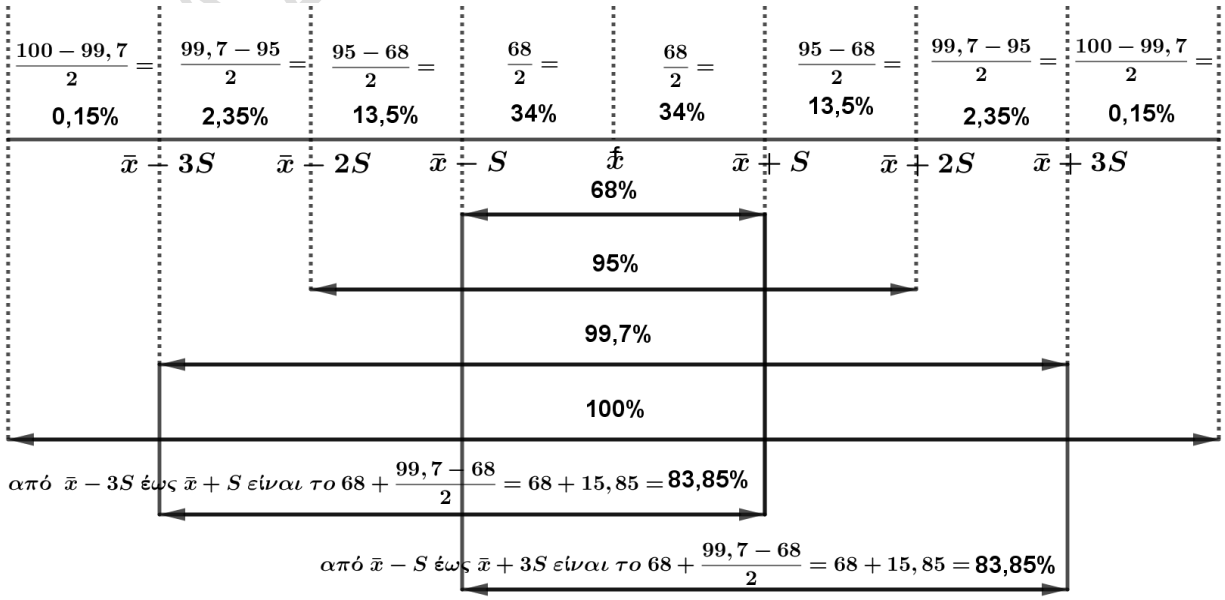
7)


$\frac{100-99,7}{2}=$ 0,15%
$\frac{99,7-95}{2}=$ 2,35%
$\frac{95-68}{2}=$ 13,5%
$\frac{68}{2}=$ 34%
$\frac{68}{2}=$ 34%
$\frac{95-68}{2}=$ 13,5%
$\frac{99,7-95}{2}=$ 2,35%
$\frac{100-99,7}{2}=$ 0,15%
$\bar{x}-3S$ $\bar{x}-2S$ $\bar{x}-S$ $\bar{x}$ $\bar{x}+S$ $\bar{x}+2S$ $\bar{x}+3S$
68%
95%
99,7%
100%
κάτω από $\bar{x}+2S$ είναι το $100-\frac{100-95}{2}=100-2,5=$ 97,5%
πάνω από $\bar{x}-2S$ είναι το $100-\frac{100-95}{2}=100-2,5=$ 97,5%

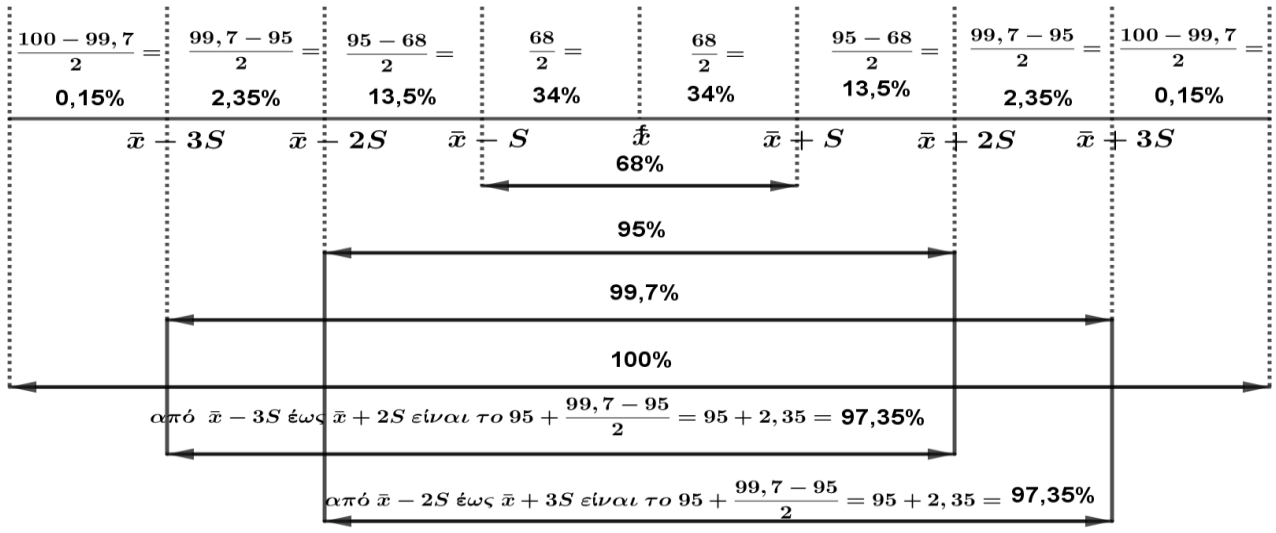
8)


$\frac{100-99,7}{2}=$ 0,15%
$\frac{99,7-95}{2}=$ 2,35%
$\frac{95-68}{2}=$ 13,5%
$\frac{68}{2}=$ 34%
$\frac{68}{2}=$ 34%
$\frac{95-68}{2}=$ 13,5%
$\frac{99,7-95}{2}=$ 2,35%
$\frac{100-99,7}{2}=$ 0,15%
$\bar{x}-3S$ $\bar{x}-2S$ $\bar{x}-S$ $\bar{x}$ $\bar{x}+S$ $\bar{x}+2S$ $\bar{x}+3S$
68%
95%
99,7%
100%
κάτω από $\bar{x}+3S$ είναι το $100-\frac{100-99,7}{2}=100-0,15=$ 99,85%
πάνω από $\bar{x}-3S$ είναι το $100-\frac{100-99,7}{2}=100-0,15=$ 99,85%

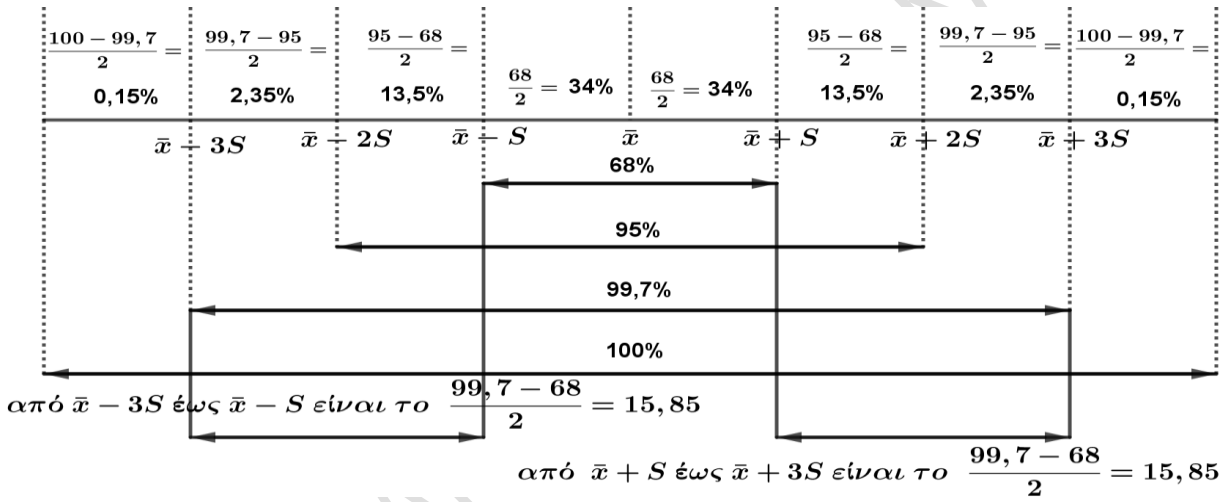
9)


$\frac{100-99,7}{2}=$ 0,15%
$\frac{99,7-95}{2}=$ 2,35%
$\frac{95-68}{2}=$ 13,5%
$\frac{68}{2}=$ 34%
$\frac{68}{2}=$ 34%
$\frac{95-68}{2}=$ 13,5%
$\frac{99,7-95}{2}=$ 2,35%
$\frac{100-99,7}{2}=$ 0,15%
$\bar{x}-3S$ $\bar{x}-2S$ $\bar{x}-S$ $\bar{x}$ $\bar{x}+S$ $\bar{x}+2S$ $\bar{x}+3S$
68%
95%
99,7%
100%
από $\bar{x}-3S$ έως $\bar{x}+S$ είναι το $68+\frac{99,7-68}{2}=68+15,85=$ 83,85%
από $\bar{x}-S$ έως $\bar{x}+3S$ είναι το $68+\frac{99,7-68}{2}=68+15,85=$ 83,85%

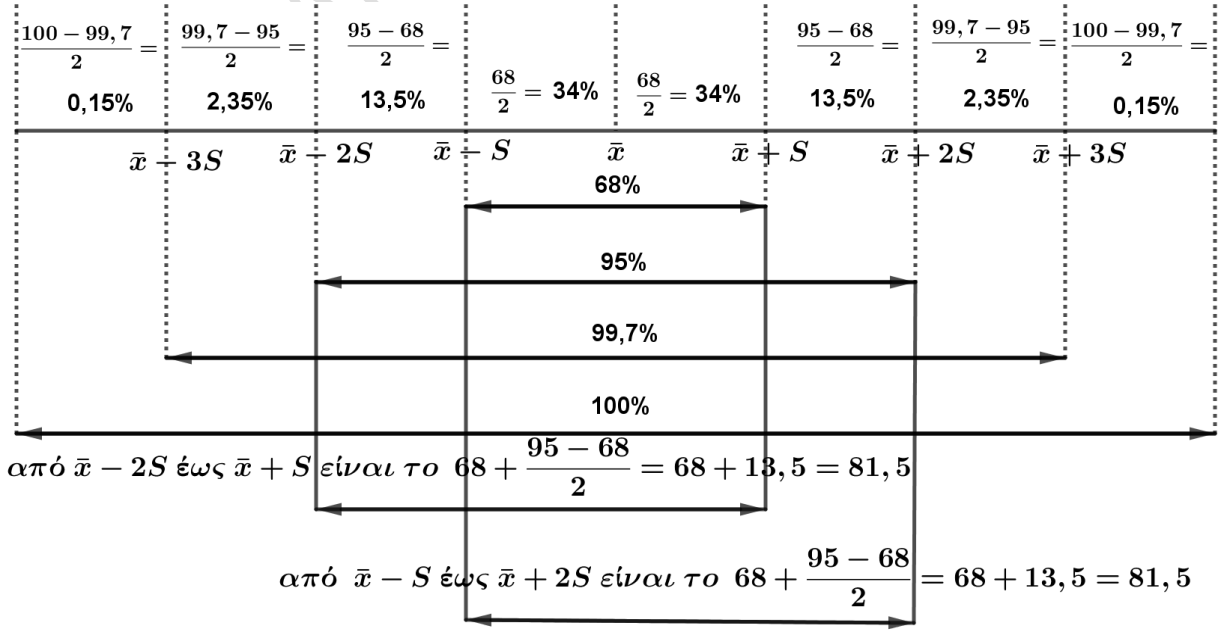
10)


$\frac{100-99,7}{2}=$ 0,15%
$\frac{99,7-95}{2}=$ 2,35%
$\frac{95-68}{2}=$ 13,5%
$\frac{68}{2}=$ 34%
$\frac{68}{2}=$ 34%
$\frac{95-68}{2}=$ 13,5%
$\frac{99,7-95}{2}=$ 2,35%
$\frac{100-99,7}{2}=$ 0,15%
$\bar{x}-3S$
$\bar{x}-2S$
$\bar{x}-S$
$\bar{x}$
$\bar{x}+S$
$\bar{x}+2S$
$\bar{x}+3S$
68%
95%
99,7%
100%
από $\bar{x}-3S$ έως $\bar{x}+2S$ είναι το $95+\frac{99,7-95}{2}=95+2,35=$ 97,35%
από $\bar{x}-2S$ έως $\bar{x}+3S$ είναι το $95+\frac{99,7-95}{2}=95+2,35=$ 97,35%

11)


$\frac{100-99,7}{2}=$ 0,15%
$\frac{99,7-95}{2}=$ 2,35%
$\frac{95-68}{2}=$ 13,5%
$\frac{68}{2}=$ 34%
$\frac{68}{2}=$ 34%
$\frac{95-68}{2}=$ 13,5%
$\frac{99,7-95}{2}=$ 2,35%
$\frac{100-99,7}{2}=$ 0,15%
$\bar{x}-3S$
$\bar{x}-2S$
$\bar{x}-S$
$\bar{x}$
$\bar{x}+S$
$\bar{x}+2S$
$\bar{x}+3S$
68%
95%
99,7%
100%
από $\bar{x}-3S$ έως $\bar{x}-S$ είναι το $\frac{99,7-68}{2}=15,85$
από $\bar{x}+S$ έως $\bar{x}+3S$ είναι το $\frac{99,7-68}{2}=15,85$

12)


$\frac{100-99,7}{2}=$ 0,15%
$\frac{99,7-95}{2}=$ 2,35%
$\frac{95-68}{2}=$ 13,5%
$\frac{68}{2}=$ 34%
$\frac{68}{2}=$ 34%
$\frac{95-68}{2}=$ 13,5%
$\frac{99,7-95}{2}=$ 2,35%
$\frac{100-99,7}{2}=$ 0,15%
$\bar{x}-3S$
$\bar{x}-2S$
$\bar{x}-S$
$\bar{x}$
$\bar{x}+S$
$\bar{x}+2S$
$\bar{x}+3S$
68%
95%
99,7%
100%
από $\bar{x}-2S$ έως $\bar{x}+S$ είναι το $68+\frac{95-68}{2}=68+13,5=81,5$
από $\bar{x}-S$ έως $\bar{x}+2S$ είναι το $68+\frac{95-68}{2}=68+13,5=81,5$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

{{{Διευκρινήσεις: Στη λύση των ασκήσεων οι υπολογισμοί των ποσοστών έγιναν με πρόσθεση αναλυτικά των επιμέρους ποσοστών για να είναι κατανοητό και σε όσους δεν έχουν ιδιαίτερη εξοικείωση με τον υπολογισμό συναρτήσει των σταθερών ποσοστών 68% , 95% , 99,7% , 100% και σε παρένθεση μπήκε ο υπολογισμός με βάση τα παραπάνω σταθερά ποσοστά .

Τα παραπάνω σχεδιαγράμματα ίσως βοηθήσουν στην καλλίτερη κατανόηση. Το πρώτο είναι βασικό και πρέπει να το γνωρίζετε. Είναι απαραίτητο επίσης να συνοδέψετε τη λύση της άσκησης με τη σχεδίαση της γραφικής παράστασης της κανονικής κατανομής (την ''καμπάνα''),όπου στα συμβολικά άκρα θα έχετε τοποθετήσει τους αριθμούς που προκύπτουν από τα δεδομένα της άσκησης. Σε πρώτο χρόνο να μάθετε τα βασικά να αποκτήσετε ευκολία στους υπολογισμούς. Στη συνέχεια μελετήστε τις ασκήσεις που είναι συνδυασμός ανάλυσης και στατιστικής . (Με αυτή τη μορφή μπήκαν στις πανελλαδικές εξετάσεις.) Να μελετήσετε δε ,τα ερωτήματα που αναφέρονται στη μεταβολή των τιμών του δείγματος και πως μεταβάλλεται η μέση τιμή ,η διάμεσος , η διακύμανση, η τυπική απόκλιση και ο συντελεστής μεταβολής. }}}

1) Μια εταιρεία μας έχει προσλάβει για να καταγράψουμε τη διάρκεια ζωής των server της. Μετρώντας συνολικά 400 παλιούς και νέους server βρήκαμε ότι η διάρκεια ζωής τους ακολουθεί περίπου την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{\chi} = 2$ έτη και τυπική απόκλιση S = 4 μήνες.

Α) Να βρείτε πόσοι περίπου servers είχαν διάρκεια ζωής από 20 μέχρι και 28 μήνες.

Β) Να βρείτε πόσοι περίπου servers είχαν διάρκεια ζωής από 12 μέχρι και 24 μήνες.

Γ) Να βρείτε πόσοι περίπου servers είχαν διάρκεια ζωής το πολύ 16 μήνες.

Δ) Να βρείτε πόσοι περίπου servers είχαν διάρκεια ζωής τουλάχιστον 3 χρόνια.

ΛΥΣΗ

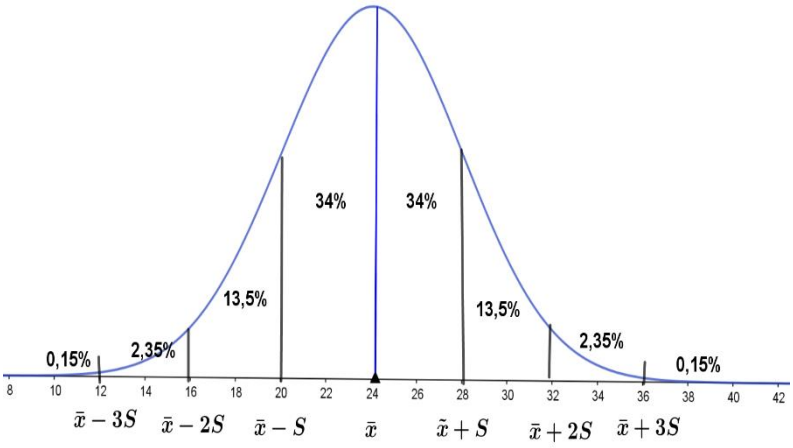
Μέση τιμή και τυπική απόκλιση πρέπει να έχουν τις ίδιες μονάδες οπότε $\bar{\chi} = 2$ έτη ή $\bar{\chi} = 24 \mu\acute{\eta}\nu\varepsilon\varsigma$

και S=4 μήνες

{{{**σχόλιο**: κατασκευάζουμε την καμπύλη της κανονικής κατανομής και τοποθετούμε τα νούμερα με βάση τα δεδομένα της άσκησης και τα ποσοστά. Από το νούμερο που μας δίνεται, με βάση τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση, μπορούμε να κατασκευάσουμε τα συμβολικά άκρα ,όπως δείχνεται παρακάτω .Ανάλογα με την ερώτηση παίρνουμε τα αθροίσματα των αντίστοιχων ποσοστών. Το νούμερο που μας δίνεται το γράφω σαν άθροισμα ή διαφορά με πρώτο νούμερο τη μέση τιμή και δεύτερο το γινόμενο της τυπικής απόκλισης επί όποιον αριθμό προκύπτει, ώστε να ''κατασκευάσω'' τα συμβολικά άκρα της κανονικής κατανομής }}}

Α) servers με διάρκεια ζωής από 20=24-4=$\bar{\chi} - S$ μέχρι και **28=24+4=**$\bar{\chi} + S$ Με βάση τη θεωρία στο διάστημα ($\bar{\chi} - S$, $\bar{\chi} + S$) περιέχεται το 68% των παρατηρήσεων άρα το πλήθος είναι 68%·400=$\frac{68}{100}400 = 272$ servers

Β) από 12=24-12=24-3·4=$\bar{\chi} - 3S$ μέχρι και **24=**$\bar{\chi}$ Στο διάστημα



10ο ΕΠΑΛ ΑΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ Α.ΚΑΤΣΑΡΟΣ

($\bar{\chi} - 3S$, $\bar{\chi}$) το ποσοστό είναι: 2,35%+13,5%+34%=49,85% (ή $\frac{99,7\%}{2} = 49,85\%$) άρα το πλήθος είναι: 49,85%·400=$\frac{49,85}{100}400 = 199,4$ servers

Γ) Το πολύ 16 ή μέχρι 16=24-8=24-2·4=$\bar{\chi} - 2S$ Το ποσοστό είναι: **0**,15%+2,35%=**2,5%** (ή $\frac{100\%-95\%}{2} = 2,5\%$) άρα το πλήθος είναι: 2,5%·400=$\frac{2,5}{100}400 = 10$ servers

Δ) Τουλάχιστον 3 χρόνια ή σε μήνες, **τουλάχιστον** 3·12=36=24+12=24+3·4=$\bar{\chi} + 3S$ μήνες . Το ποσοστό είναι: 0,15% (ή $\frac{100\%-99,7\%}{2} = 0,15\%$) και το πλήθος είναι το: 0,15%·400=$\frac{15}{100}400 = 15 \cdot 4 = 60$ servers .

! ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ !

2) Η μέση διάρκεια των τηλεφωνημάτων του προσωπικού μιας επιχείρησης είναι 20 sec με τυπική απόκλιση 4 sec. Με την προϋπόθεση ότι η κατανομή είναι κανονική , να βρεθεί το ποσοστό των υπαλλήλων που τηλεφωνούν:

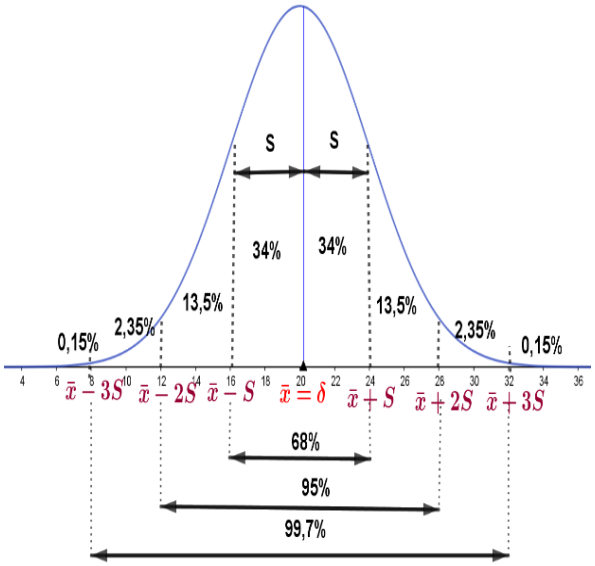
α) λιγότερο από 16 sec β) το πολύ 20 sec γ) πάνω από 28 sec δ) μεταξύ 12 sec και 24 sec

ε) Αν οι υπάλληλοι, που η διάρκεια των τηλεφωνημάτων τους είναι από 20 sec έως και 24 sec, μίλησαν συνολικά 1360 sec να βρεθεί ο συνολικός χρόνος ομιλίας όλων των υπαλλήλων.

ΛΥΣΗ

{{{σχόλιο: είναι **απαραίτητο ,για να είναι πλήρης η λύση μας , να γνωρίζουμε να κατασκευάζουμε την καμπύλη της κανονικής κατανομή**ς και να **τοποθετούμε τα συμβολικά άκρα κάθε διαστήματος , καθώς και τα ποσοστά**. Όταν γνωρίζω τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση , γράφω τον αριθμό που μου δίνεται ως άκρο ,σαν άθροισμα ή διαφορά της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης και προσδιορίζω έτσι το συμβολικό άκρο της κανονικής κατανομής. Έχοντας το συμβολικό άκρο ,ανάλογα με την έκφραση που μας δίνουν ''πάνω από '' , ''λιγότερο από'' κ.λ.π. γνωρίζω ποια ποσοστά πρέπει να αθροίσω.**}}}**

Η μέση διάρκεια είναι 20, δηλαδή $\bar{\chi} = 20$ sec και η τυπική απόκλιση S = 4 sec οπότε:



α) 16=20-4=$\bar{\chi} - S$ άρα λιγότερο από 16 sec σημαίνει λιγότερο από $\bar{\chi} - S$ και αθροίζοντας τα ποσοστά (από αριστερά προς τα δεξιά) παίρνουμε 0,15%+2,35%+13,5%=16% (ή $\frac{100\%-68\%}{2}$=16%)

β) το πολύ 20 sec δηλαδή το πολύ $\bar{\chi} = 20$ sec

γ) πάνω από 28 sec (28=20+8=20+2·4= $\bar{\chi} + 2S$) πάνω από $\bar{\chi} + 2S$ το ποσοστό είναι 2,35%+0,15%=2,5% (ή $\frac{100\%-95\%}{2}$=2,5%)

δ) μεταξύ 12 sec και 24 sec (12=20-8=20-2·4=$\bar{\chi} - 2S$, 24=20+4=$\bar{\chi} + S$) Το ποσοστό του διαστήματος ($\bar{\chi} - 2S$,$\bar{\chi} + S$) είναι 13,5%+34%+34%=81,5% (ή $68\% + \frac{95\%-68\%}{2} = 81,5$)

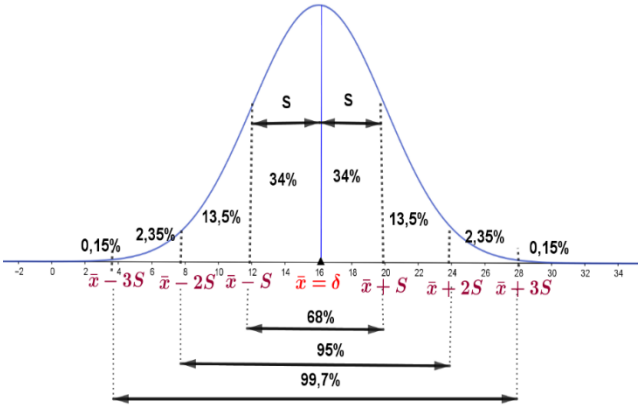
ε) Στο διάστημα [20,24]=[$\bar{\chi}$, $\bar{\chi} + S$] το ποσοστό είναι f_i%==$\frac{68\%}{2} =$ **34%** ή f_i=0,34 οπότε: f_i=$\frac{\nu_i}{\nu} \Leftrightarrow \nu = \frac{\nu_i}{f_i} = \frac{1360}{0,34} = 4000$ Άρα όλοι οι υπάλληλοι μίλησαν συνολικά 4000 sec.

! ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ !

ΤΟ ΕΠΑΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ Α. ΚΑΤΣΑΡΟΣ

3) Μια κανονική κατανομή έχει μέση τιμή $\bar{\chi} = 16$ και διακύμανση $S^2 = 16$. Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που ανήκουν στα διαστήματα: α) (8,20) , β) (16,24) , γ) (12,28)

ΛΥΣΗ



Έχουμε $\bar{\chi} = 16$ και $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{16} = 4$

α) (8=16-8=16-2·4=$\bar{\chi} - \mathbf{2S}$, 20=16+4=$\bar{\chi} + \boldsymbol{S}$) και το ποσοστό είναι 13,5%+34%+34%=81,5% (ή $\mathbf{68\%} + \frac{\mathbf{95\%-68\%}}{\mathbf{2}} = \mathbf{81,5}$)

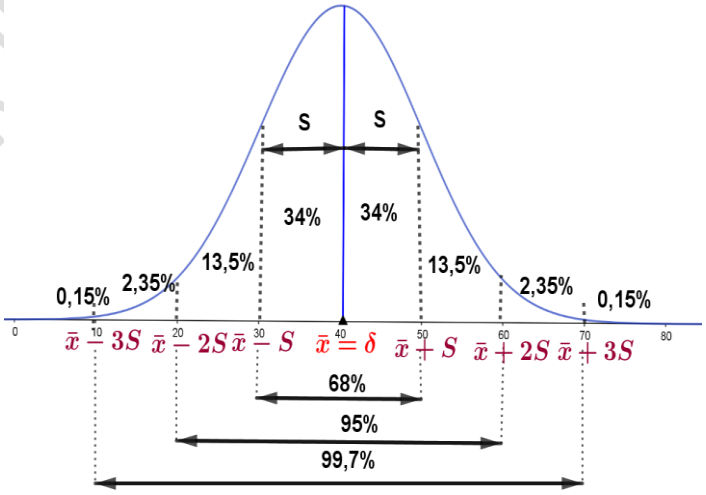
β) (16=$\bar{\chi}$, 24=16+8=16+2·4=$\bar{\chi} + \mathbf{2S}$) και το ποσοστό είναι 34%+13,5%=47,5% (**ή $\frac{\mathbf{95\%}}{\mathbf{2}}$= 47,5%**)

γ) (12 =16-4 =$\bar{\chi} - \boldsymbol{S}$, 28=16+12=16+3·4 = $\bar{\chi} + \mathbf{3S}$) και το ποσοστό είναι : 68%+13,5%+2,35%=83,85% (ή 68%+ $\frac{\mathbf{99,7\%-68\%}}{\mathbf{2}} = \mathbf{83,85}$)

! ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ !

4) Μια κανονική κατανομή έχει μέση τιμή $\bar{\chi} = 40$ και συντελεστή μεταβολής CV=25% . Να βρείτε το ποσοστό % (επί τοις εκατό) των παρατηρήσεων που είναι: α) κάτω από 30 , β) πάνω από 60 , γ) τουλάχιστον ίσες με 70 , δ) το πολύ ίσες με 50.

ΛΥΣΗ



$\bar{\chi} = \mathbf{40}$ Από το συντελεστή μεταβολής υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση.

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} \Leftrightarrow S = CV \cdot \bar{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{S} = \mathbf{25\%} \cdot \mathbf{40} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{100}}\mathbf{40} = \mathbf{10}$$

α) κάτω από 30=40 -10=$\bar{\chi} - \boldsymbol{S}$ το ποσοστό είναι 0,15%+2,35%+13,5%=**16%** (ή $\frac{\mathbf{100\%-68\%}}{\mathbf{2}}$=16%)

β) πάνω από 60=40+20=40+2·10=$\bar{\chi} + \mathbf{2S}$ το ποσοστό είναι: 2,35%+0,15%=**2,5%** ή $\frac{\mathbf{100\%-95\%}}{\mathbf{2}}$=2,5%)

γ) τουλάχιστον ίσες με 70=40+30=40+3·10=$\bar{\chi} + \mathbf{3S}$

το ποσοστό είναι: 0,15% (ή $\frac{\mathbf{100\%-99,7\%}}{\mathbf{2}} = 0,15\%$)

δ) το πολύ ίσες με 50 =40+10=$\bar{\chi} + \boldsymbol{S}$ το ποσοστό είναι: 0,15%+2,35%+13,5%+34%+34%=84%

(ή $\mathbf{100\%} - \frac{\mathbf{100\%-68\%}}{\mathbf{2}} = \mathbf{84\%}$)

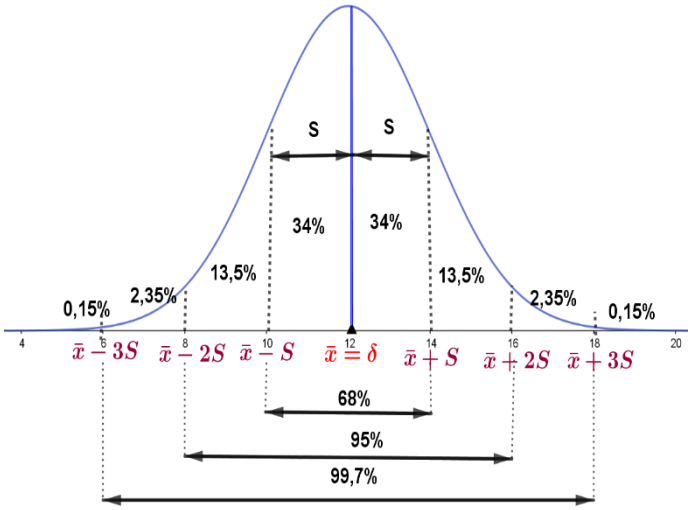
! ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ !

10 ΕΠΑΛ ΑΓΑΠΕΤΟΣ ΑΣ Α. ΚΑΤΣΑ

5) Οι βαθμοί που έγραψαν οι μαθητές μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα είναι πάνω από 4, έχουν μέσο όρο 12 και τυπική απόκλιση 2. Υποθέτοντας ότι έχουμε περίπου κανονική κατανομή, να βρείτε κατά προσέγγιση το ποσοστό των μαθητών που έχει βαθμό: α) κάτω από 10 , β) πάνω από 16 , γ) από 8 έως 14 , δ) το πολύ 8 , ε) τουλάχιστον 10.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\bar{\chi} = \mathbf{12}$ και **S = 2**



α) κάτω από 10 =12-2= $\bar{\chi} - \mathbf{S}$ το ποσοστό είναι:
0,15%+2,35%+13,5%=**16%** (ή $\frac{\mathbf{100\%-68\%}}{\mathbf{2}}$=16%)

β) πάνω από 16 =12+4=12+2·2= $\bar{\chi} + \mathbf{2\ S}$ το ποσοστό είναι: 2,35%+0,15%=**2,5%** ή $\frac{\mathbf{100\%-95\%}}{\mathbf{2}}$=2,5%)

γ) από 8=12-4=12-2·2 =$\bar{\chi} - \mathbf{2}$ S **έως** 14=12+2= $\bar{\chi}$ +**S**

το ποσοστό είναι:13,5%+34%+34%=**81,5%** **(ή** $\mathbf{68\% + \frac{95\%-68\%}{2} = 68\% + 13,5\% = 81,5\%}$**)**

δ) το πολύ 8 = 12-4=12-2·2=$\bar{\chi} - \mathbf{2\ S}$ το ποσοστό είναι: 0,15%+2,35%=**2,5%** (ή $\frac{\mathbf{100\%-95\%}}{\mathbf{2}}$=2,5%)

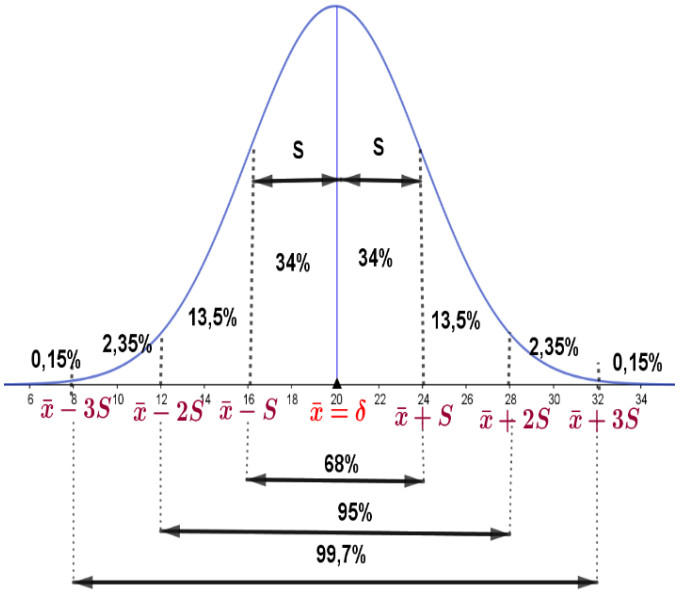
ε) τουλάχιστον 10 = 12-2=$\bar{\chi} - \mathbf{S}$ το ποσοστό είναι: 34%+34%+13,5%+2,35%+0,15%=**84%** (ή $100\% - \frac{100\%-68\%}{2} = 84\%$)

! ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ !

6) Η μέση τιμή μιας κανονικής κατανομής είναι 20 και η τυπική απόκλιση 4. Ποιο ποσοστό παρατηρήσεων είναι : α) πάνω από 28 , β) κάτω από 16 , γ) μεταξύ 16 και 28 , δ) τουλάχιστον 12 ,ε) το πολύ 12 ή τουλάχιστον 24

ΛΥΣΗ

Δίνεται $\bar{\chi} = \mathbf{20}$ και **S=4**



α) πάνω από 28=20+8=20+2·4=$\bar{\chi}$ +2 S το ποσοστό είναι:
2,35%+0,15%=**2,5%** ή $\frac{\mathbf{100\%-95\%}}{\mathbf{2}}$=2,5%)

β) κάτω από 16 =20-4=$\bar{\chi} - \mathbf{S}$ το ποσοστό είναι:

0,15%+2,35%+13,5%=**16%** (ή $\frac{\mathbf{100\%-68\%}}{\mathbf{2}}$=16%)

γ) μεταξύ 16 =20-4=$\bar{\chi} - \mathbf{S}$ **και** 28=20+8=20+2·4=$\bar{\chi}$ +**2 S**

το ποσοστό είναι:34%+34%+13,5% = **81,5%** **(ή** $\mathbf{68\% + \frac{95\%-68\%}{2} = 68\% + 13,5\% = 81,5\%}$**)**

δ) τουλάχιστον 12 =20-8=20-2·4=$\bar{\chi}$ −**2 S** το ποσοστό είναι:13,5%+34%+34%+13,5%+2,35%+0,15% = **97,5%** **(ή 95%+**$\frac{\mathbf{100\%-95\%}}{\mathbf{2}} = \mathbf{95\% + 2,5\% = 97,5\%}$)

ε) το πολύ 12=20-8=20-2·4=$\bar{\chi}$ −**2 S** το ποσοστό είναι: 0,15%+2,35% = **2,5%** **(ή** $\frac{\mathbf{100\%-95\%}}{\mathbf{2}} = \mathbf{2,5\%}$)

τουλάχιστον 24=20+4= $\bar{\chi} + \mathbf{S}$ το ποσοστό είναι: 13,5+2,35%+0,15% = **16%** (ή $\frac{\mathbf{100\%-68\%}}{\mathbf{2}}$=16%)

! ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ !

10 ΕΠΑΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ Α.Ε.

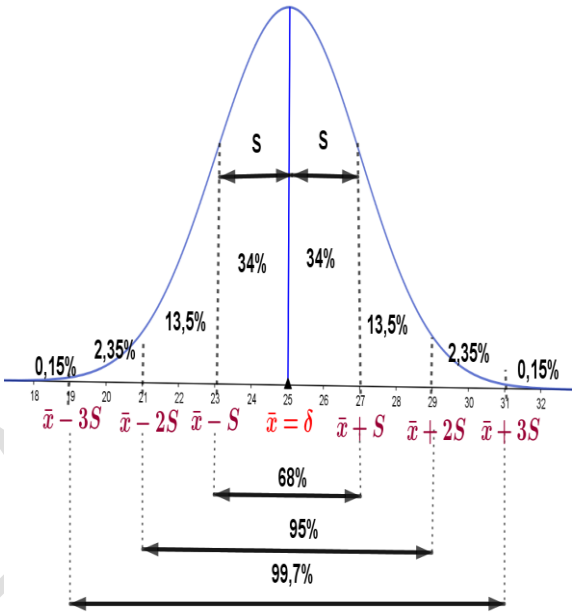
7) Εξετάζουμε ένα δείγμα φοιτητών ως προς την ηλικία τους σε έτη. Αν η κατανομή των ηλικιών τους είναι περίπου κανονική με διάμεσο τα 25 έτη και συντελεστή μεταβολής 8%.

ι) Να βρεθούν η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και το εύρος των ηλικιών τους.

ιι) Αν 100 φοιτητές έχουν ηλικία τουλάχιστον 29 έτη, να βρεθεί πόσοι φοιτητές έχουν ηλικία το πολύ 23 έτη.

ιιι) Ποια η μεταβολή του συντελεστή μεταβολής των ηλικιών τους σε 3 έτη;

ΛΥΣΗ



ι) Γνωρίζουμε ότι: $\begin{cases} \boldsymbol{\delta} = \overline{\boldsymbol{\chi}} \\ \delta = 25 \end{cases} \Rightarrow \overline{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{25}$ έτη . Από τον συντελεστή μεταβολής υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση.

$CV = \frac{S}{\bar{x}} \Leftrightarrow S = CV \cdot \bar{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{S = 0,08 \cdot 25 = 2}$ **έτη**

Ακόμη γνωρίζουμε ότι **R≅6·S=6·2=12 έτη**

ii) 100 φοιτητές έχουν ηλικία **τουλάχιστον** 29=25+4=25+2·2=$\overline{\boldsymbol{\chi}}$ **+2 S** και το ποσοστό είναι 2,35%+0,15%=**2,5%** (ή $\frac{\mathbf{100\%-95\%}}{\mathbf{2}} = \mathbf{2,5\%}$)

Έστω ν το μέγεθος του πληθυσμού. Τότε οι 100 φοιτητές είναι το 2,5% του ν .Άρα 2,5%·ν=100$\Leftrightarrow \nu = \frac{100}{2,5\%} = \frac{100}{\frac{2,5}{100}} = \frac{10000}{2,5} = 4000$

Το ποσοστό των φοιτητών που έχουν ηλικία **το πολύ** 23=25-2= $\overline{\boldsymbol{\chi}} - \boldsymbol{S}$ έτη είναι 0,15%+2,35%+13,5%=**16%** (ή $\frac{\mathbf{100\%-68\%}}{\mathbf{2}}$=16%) οπότε το πλήθος είναι: 16%·4000=$\frac{16}{100}4000 = 640$ φοιτητές.

ιιι) Μετά από 3 χρόνια η ηλικία κάθε φοιτητή θα είναι αυξημένη κατά 3 και έστω $\psi_\iota = \chi_\iota + 3$ οι νέες τιμές που προκύπτουν . Σύμφωνα με εφαρμογή (εφ.3 σελ.99 βιβλίου) για τη νέα μέση τιμή και τη νέα τυπική απόκλιση θα ισχύει: $\bar{\psi} = \bar{\chi} + 3$ =25+3=28 και $S_\psi = S_\chi$=2 Ο συντελεστής μεταβολής είναι: $CV_\psi = \frac{S_\psi}{\bar{\psi}} = \frac{S_\chi}{\bar{\psi}} = \frac{2}{28} = 0,0714$=

$\frac{7,14}{100} = 7,14\%$ και η μεταβολή είναι:8%-7,14%=0,86%

! ↜ ≡ ↜ ≡ ↜ ≡ ↜ ≡ ↜ ≡ ↜ ≡ ↜ ≡ ↜ ≡ ↜ ≡ ↜ ≡ ↜ !

8) Ο μέσος χρόνος που χρειάζονται οι μαθητές ενός σχολείου να πάνε το πρωί από το σπίτι τους μέχρι το σχολείο είναι 10 λεπτά με τυπική απόκλιση 2 λεπτά. Υποθέτοντας ότι έχουμε περίπου κανονική κατανομή.

Α) Να βρείτε κατά προσέγγιση το ποσοστό των μαθητών που χρειάζονται: i) κάτω από 8 λεπτά ii) πάνω από 14 λεπτά iii) το πολύ 10 λεπτά iv) από 6 έως 12 λεπτά για να πάνε στο σχολείο τους.

Β) Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής του παραπάνω δείγματος.

ΛΥΣΗ

Δίνεται $\overline{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{10}$ λεπτά και **S = 2** λεπτά

i) κάτω από 8 =10-2= $\overline{\boldsymbol{\chi}} - \mathbf{S}$ λεπτά. Το ποσοστό είναι:

10 ΕΠΑΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ

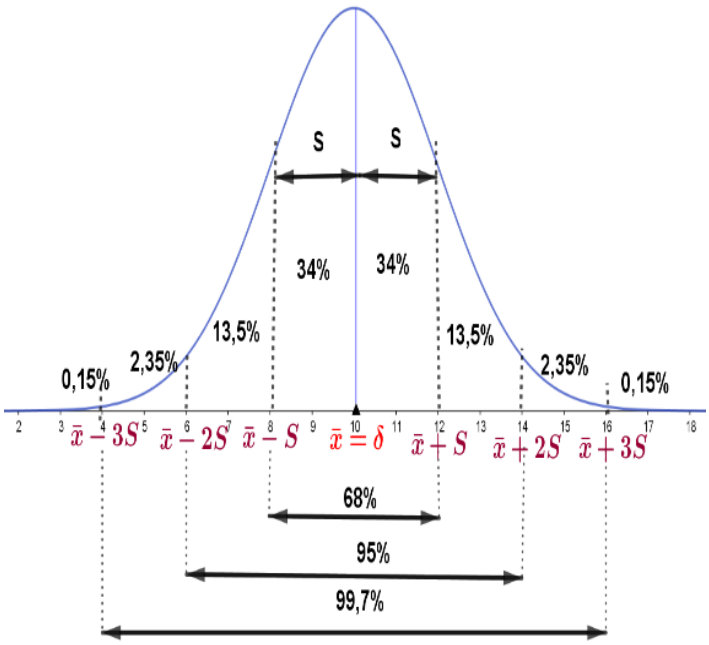
0,15%+2,35%+13,5%=**16%** (ή $\frac{100\%-68\%}{2}$=16%)

ii) πάνω από 14=10+4=10+2·2=$\bar{\chi}+2S$ Το ποσοστό είναι: 2,35%+0,15%=**2,5%** (ή $\frac{100\%-95\%}{2}$=2,5%)

iii) το πολύ 10= $\bar{\chi}$ λεπτά Το ποσοστό είναι:

0,15%+2,35%+13,5%+34%=**50%** (ή $\frac{100\%}{2}=50\%$)

iv) από 6=10-4=10-2·2= $\bar{\chi}-2S$ **έως** 12=10+2= $\bar{\chi}+S$ λεπτά. Το ποσοστό είναι:
13,5%+34%+34%=**81,5%** (ή $68\%+\frac{95\%-68\%}{2}=68\%+13,5\%=81,5\%$)

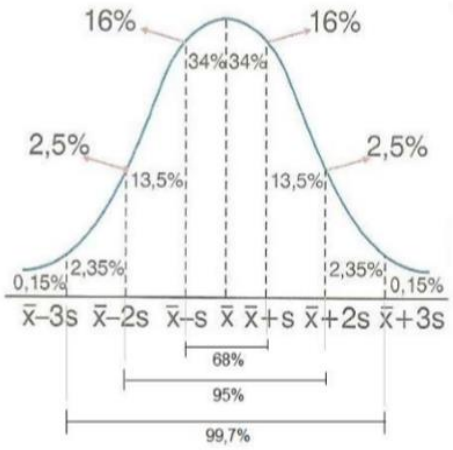


! ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ !

9) Σε ένα δείγμα κανονικής μεταβλητής το 49,85% των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα (25,40). Να εξετάσετε σε κάθε περίπτωση αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΛΥΣΗ

Όπως φαίνεται στο γράφημα {σχόλιο: που πρέπει να μπορούμε να το σχεδιάσουμε και να γνωρίζουμε τα ποσοστά για κάθε διάστημα}



το ποσοστό 49,85%=2,35%+13,5%+34% (ή $\frac{99,7\%}{2}=49,85\%$) υπάρχει σε δύο διαστήματα τα: **α)** $(\bar{x}-3S,\bar{x})$ και **β)** $(\bar{x},\bar{x}+3S)$ οπότε: Αν το (25,40) είναι το α) διάστημα θα ισχύει $\bar{x}-3S=25$ και $\bar{x}$=40 άρα $40-3S=25 \Leftrightarrow -3S=25-40 \Leftrightarrow -3S=-15 \Leftrightarrow S=\frac{-15}{-3}=5$ και ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV=\frac{5}{40}=0,125=\frac{12,5}{100}=12,5\%>10\%$ Δεν είναι ομοιογενές το δείγμα.

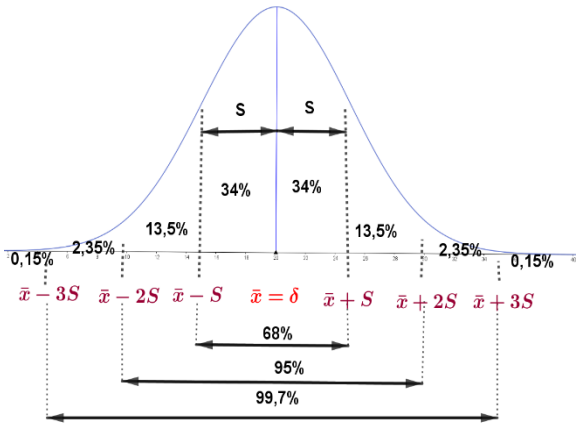
Αν το (25,40) είναι το β) διάστημα θα ισχύει: $\bar{x}=25$ και $\bar{x}+3S$ =40 άρα $25+3S=40 \Leftrightarrow 3S=40-25 \Leftrightarrow 3S=15 \Leftrightarrow S=\frac{15}{3}=5$ και ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV=\frac{5}{25}=0,2=\frac{20}{100}=20\%>10\%$ Δεν είναι ομοιογενές το δείγμα.

! ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ !

10) Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ ακολουθούν την κανονική κατανομή. Αν το 2,5% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες του 30 και το 84% μεγαλύτερες του 15 να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων από 20 έως 35.

ΛΥΣΗ

Από τη θεωρία (σχήμα και ποσοστά)γνωρίζουμε ότι το 2,5% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες του $\bar{\chi}+2$ S , άρα $\bar{\chi}+2$ S =30 (1) ενώ το 84% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες του $\bar{\chi}-$S , άρα $\bar{\chi}-$ S =15 (2)



10ΕΠΑΔΡΑΠΕΣΟΝΑΣ Α.ΚΑ

Λύνουμε το σύστημα (με τη μέθοδο της αντικατάστασης ή των αντίθετων συντελεστών) των εξισώσεων (1) και (2)

Μέθοδος αντικατάστασης:

$$\begin{pmatrix}\bar{\chi}+2\,S=30\\ \bar{\chi}-S=15\end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Λύνω ως}\\ \text{προς}\bar{\chi}}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix}\bar{\chi}+2\,S=30\\ \bar{\chi}=15+S\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}15+S+2\,S=30\\ \bar{\chi}=15+S\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3S=30-15=15\\ \bar{\chi}=15+S\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}S=5\\ \bar{\chi}=15+S\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\mathbf{S=5}\\ \mathbf{\bar{\chi}=15+5=20}\end{pmatrix}$$

Μέθοδος αντίθετων συντελεστών

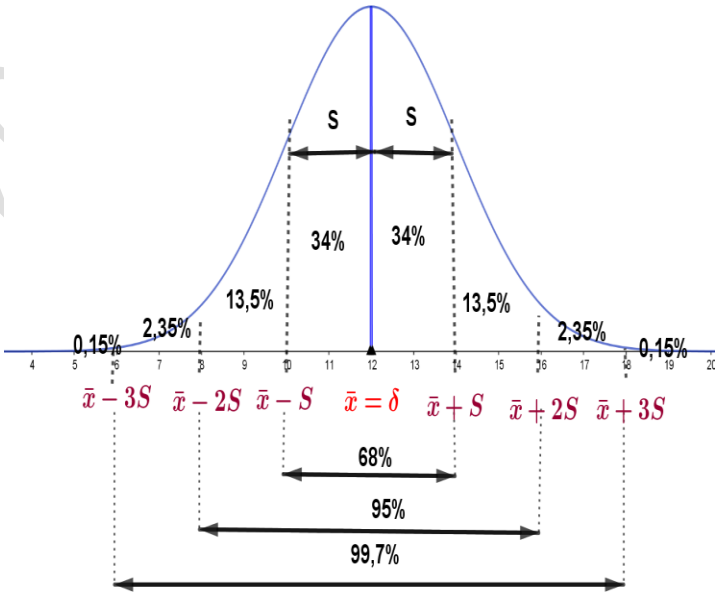
$$\begin{pmatrix}\bar{\chi}+2\,S=30\\ \bar{\chi}-S=15\end{pmatrix}\begin{vmatrix}\text{επί}\\ -1\end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\bar{\chi}+2\,S=30\\ -\bar{\chi}+S=-15\end{pmatrix} \overset{\substack{\text{προσθέτω}\\ \text{κατά μέλη}}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix}\bar{\chi}+2\,S=30\\ 3\,S=15\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\bar{\chi}+2\,S=30\\ S=5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\bar{\chi}+2\cdot 5=30\\ S=5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\bar{\chi}+10=30\\ S=5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\bar{\chi}=\mathbf{30-10=20}\\ \mathbf{S=5}\end{pmatrix}$$

Έχουμε $\bar{\chi}=20$, $S=5$ και 35=20+15=20+3·5=$\bar{\chi}+3S$ επομένως το ποσοστό στο διάστημα $(\bar{\chi},\bar{\chi}+3S)$ είναι 34%+13,5%+2,35%=49,85%

! ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ !

11) Η βαθμολογία 200 μαθητών σε ένα διαγώνισμα είναι περίπου κανονική. Εκατό μαθητές έχουν βαθμό το πολύ 12 και 5 μαθητές έχουν βαθμό τουλάχιστον 16. Να βρείτε πόσοι μαθητές έχουν βαθμό από 8 έως 16 και να εξετάσετε αν το δείγμα των βαθμών είναι ομοιογενές.

ΛΥΣΗ



{{{Σχόλιο: Υποθετικός διάλογος. Ρωτάει ο μαθητής /τρια. Σε τι μου χρησιμεύουν αυτά τα νούμερα αφού εγώ έμαθα για ποσοστά και δεν μας δίνει κανένα. Απάντηση Μάθαμε για τα ποσοστά κάθε διαστήματος που εκφράζουν την εκατοστιαία σχετική συχνότητα που είναι $f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu}100\,\%$.Τι μας δίνει η άσκηση: << βαθμολογία 200 μαθητών>> άρα ν=200 και << Εκατό μαθητές έχουν βαθμό το πολύ 12>> δηλαδή στο διάστημα μέχρι 12 περιέχονται ν_i=100 παρατηρήσεις. Έτσι υπολογίζουμε το ποσοστό του διαστήματος μέχρι 12 . $f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu}100\,\% = \frac{100}{200}100\% = \frac{1}{2}\cdot 100\% = 50\%$ (ξανά η θεωρία) Στο διάστημα μέχρι 12 το ποσοστό είναι 50% που σημαίνει ότι η διάμεσος είναι δ=12. Αλλά στην κανονική κατανομή ισχύει: $\bar{\chi}$= δ=12 . Η δεύτερη πληροφορία είναι <<5 μαθητές έχουν βαθμό τουλάχιστον 16 >> . Όπως παραπάνω υπολογίζω το ποσοστό : $f_i = \frac{\nu_i}{\nu} = \frac{5}{200} = 0{,}025 = \frac{2{,}5}{100} = 2{,}5\%$ Βλέπω ότι ποσοστό <<**το λιγότερο** 2,5% >> ή <<**τουλάχιστον** 2,5%>> ή <<**πάνω από** 2,5%>> έχουν οι παρατηρήσεις που βρίσκονται πάνω από $\bar{\chi}+2S$ άρα $\bar{\chi}+2S=16$. Αντικαθιστώντας σε αυτή την τιμή του $\bar{\chi}$ υπολογίζουμε το S. **}}}**

Δίνεται ότι το μέγεθος του δείγματος είναι ν=200 . Το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι το πολύ 12 , είναι $\nu_i = 100$.Συνεπώς η αντίστοιχη σχετική συχνότητα είναι $f_i = \frac{100}{200} = 0{,}50$ και το ποσοστό $f_i\% = \frac{100}{200} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = \frac{50}{100} = 50\%$ άρα η διάμεσος είναι δ=12 και αφού είναι περίπου κανονική ισχύει: $\begin{cases}\delta=\bar{\chi}\\ \delta=12\end{cases} \Rightarrow \bar{\chi}=12$ Επειδή 5 μαθητές έχουν βαθμό τουλάχιστον 16 έχουμε ότι $\nu_i = 5$, οπότε $f_i = \frac{5}{200} = 0{,}025$ και το ποσοστό είναι $f_i\% = \frac{5}{200}100\% =$

$0{,}025\frac{100}{100}=\frac{2{,}5}{100}=2{,}5\%$ Ποσοστό πάνω από 2,5% έχουν οι παρατηρήσεις που είναι πάνω από $\bar{\chi}+2$ S , άρα $\bar{\chi}+$ 2 S = 16 και αφού $\bar{\chi}$ =12 η σχέση γίνεται: 12+2S=16⇔2S=16-12⇔2S=4⇔S=2

Οι μαθητές που έχουν βαθμό από 8=12-4=12-2·2=$\bar{\chi}-2$ S μέχρι 16=12+4=12+2·2=$\bar{\chi}$ +2S δηλαδή στο ($\bar{\chi}-2$ S ,$\bar{\chi}+2$ S) είναι το 95% των παρατηρήσεων. (όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία)

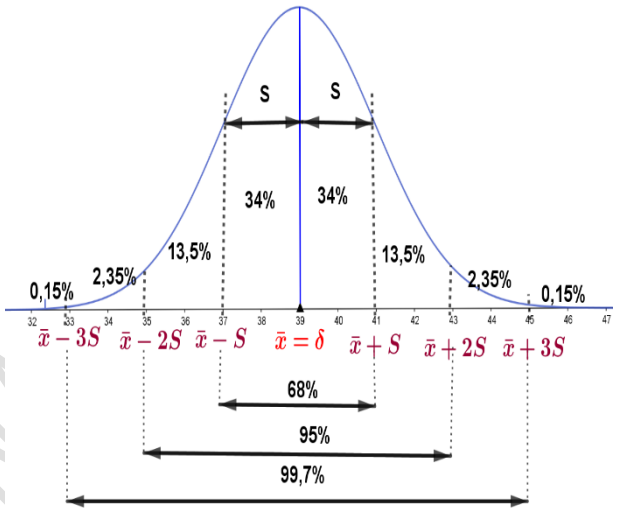
! ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ !

12) Τα νούμερα των παπουτσιών ενός δείγματος 400 ατόμων ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή . Δέκα άτομα φοράνε παπούτσια με νούμερο τουλάχιστον 43 και 64 άτομα το πολύ 37. Να βρείτε πόσα άτομα φοράνε παπούτσια με νούμερο από 37 έως 43.

ΛΥΣΗ

Δίνεται το μέγεθος του δείγματος ότι είναι ν=200 . Το πλήθος των παρατηρήσεων τουλάχιστον 43 είναι $\nu_\iota=10$. Συνεπώς η αντίστοιχη σχετική συχνότητα είναι $f_i=\frac{10}{400}=0{,}025$ και το ποσοστό είναι $f_i\%=0{,}025\frac{100}{100}==\frac{2{,}5}{100}=2{,}5\%$ και όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία, ποσοστό τουλάχιστον 2,5% έχουμε πάνω από $\bar{\chi}$ +2S , άρα $\bar{\chi}$ +2S = 43 (1)

Για $\nu_\iota=64$ και ν=400 έχουμε $f_i=\frac{64}{400}=0{,}16$ ή $f_i\%=16\%$. Ποσοστό το πολύ 16% έχουν οι παρατηρήσεις που βρίσκονται μέχρι και $\bar{\chi}$ −S άρα $\bar{\chi}$ −S = 37 (2)
Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2)



$\begin{pmatrix}\bar{\chi}+2S=43\\ \bar{\chi}-S=37\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\bar{\chi}+2S=43\\ \bar{\chi}=37+S\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}37+S+2S=43\\ \bar{\chi}=37+S\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3S=43-37\\ \bar{\chi}=37+S\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3S=6\\ \bar{\chi}=37+S\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}S=2\\ \bar{\chi}=37+S\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}S=2\\ \bar{\chi}=37+2=39\end{pmatrix}$

37=39-2=$\bar{\chi}$ −S και 43=39+4=39+2·2=$\bar{\chi}+2$S Οπότε το ποσοστό των παρατηρήσεων στο διάστημα ($\bar{\chi}$ −S, $\bar{\chi}+2$S) είναι 34%+34%+13,5%=81,5% (ή **68%+**$\frac{95\%-68\%}{2}=\mathbf{81,5\%}$) Το πλήθος είναι:
81,5%·400=$\frac{81{,}5}{100}$·400=81,5·4=326 άτομα φοράνε παπούτσια με νούμερο από 37έως 43

! ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ !

13) Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ μεγέθους 800 ακολουθούν την κανονική κατανομή. Είκοσι παρατηρήσεις είναι μικρότερες του18 και 128 μεγαλύτερες του 36.

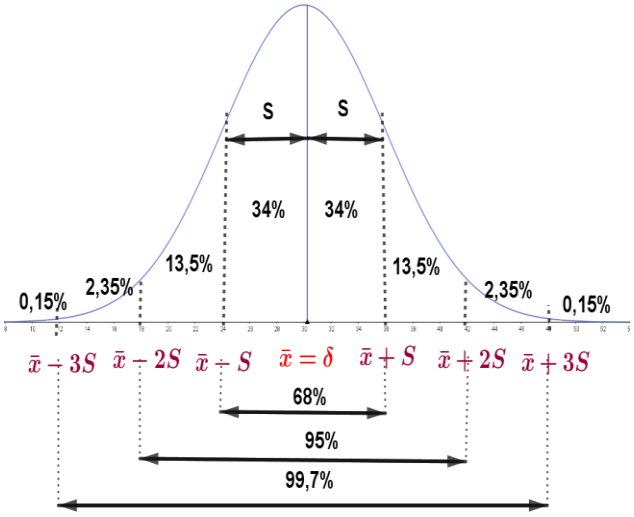
Α) Να βρείτε κατά προσέγγιση το εύρος του δείγματος.

Β) Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

ΛΥΣΗ

Α) Δίνεται ν=800 και το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες από 18 είναι $\nu_\iota=20$ και το αντίστοιχο ποσοστό είναι $f_i\%=\frac{20}{800}100\%=0{,}025\frac{100}{100}=\frac{2{,}5}{100}=2{,}5\%$.

2,5% είναι το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι



μικρότερες του 18 . Από θεωρία γνωρίζουμε ότι:

2,5% είναι το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του $\bar{\chi} - 2S$ άρα $\bar{\chi} - 2S = 18$ (1)

Δίνεται ότι $\nu_\iota = 128$ παρατηρήσεις είναι μεγαλύτερες του 36 και το αντίστοιχο ποσοστό είναι:
$f_i\% = \frac{128}{800}100\% = 0{,}16\frac{100}{100} = \frac{16}{100} = 16\%$

16% είναι το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες του 36 . Από θεωρία γνωρίζουμε ότι:

16% είναι το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες του $\bar{\chi} + S$ άρα $\bar{\chi} + S = 36$ (2) Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2)

$$\begin{pmatrix} \bar{\chi} - 2S = 18 \\ \bar{\chi} + S = 36 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\bar{\chi} + 2S = -18 \\ \bar{\chi} + S = 36 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3S = 18 \\ \bar{\chi} + S = 36 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} S = 6 \\ \bar{\chi} + S = 36 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} S = 6 \\ \bar{\chi} + 6 = 36 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} S = 6 \\ \bar{\chi} = 36 - 6 = 30 \end{pmatrix}$$

Β) Γνωρίζουμε ότι R≅6·S και για $S = 6$ παίρνουμε R≅6·6=36

$CV = \frac{6}{30}100\% = 0{,}2\frac{100}{100} = \frac{20}{100} = 20\% > 10\%$ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

! ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ !

14) Έστω μεταβλητή Χ η οποία παίρνει θετικές τιμές ακολουθεί την κανονική κατανομή και έχει εύρος -- περίπου - R=36 και $CV = 20\%$

Α) Να υπολογίσετε το ποσοστό των ατόμων που η τιμή τους είναι μεταξύ 24 και 42

Β) Να αποδείξετε ότι αν οι τιμές της μεταβλητής Χ αυξηθούν κατά ω>0, ο CV θα μειωθεί .

Γ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή ω, ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

ΛΥΣΗ

Α) Γνωρίζουμε ότι R≅6·S οπότε S=$\frac{R}{6} \Leftrightarrow S = \frac{36}{6} = 6$ $CV = \frac{S}{\bar{x}} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{S}{CV} = \frac{6}{20\%} = \frac{6}{\frac{20}{100}} = \frac{600}{20} = 30$ οπότε μεταξύ 24=30-6=$\bar{x}$ - S και 42=30++12=30+2·6=$\bar{x}$ +2 S και το ποσοστό στο διάστημα ($\bar{x}$ - S , $\bar{x}$ +2 S) είναι 34%+34%+13,5%=81,5% (**ή 68%+**$\frac{95\%-68\%}{2} = \mathbf{81,5\%}$)

Β) Έστω $\psi_\iota = \chi_\iota + \omega$ οι τιμές που προκύπτουν όταν προσθέσουμε την θετική ποσότητα ω και επειδή και η μεταβλητή Χ παίρνει θετικές τιμές και οι τιμές $\psi_\iota = \chi_\iota + \omega$ θα είναι θετικές . Από γνωστή εφαρμογή (εφαρμογή 3 του βιβλίου σελ.99) γνωρίζουμε ότι ισχύει : $\bar{\psi} = \bar{\chi} + \omega$ (δίνεται : η χ παίρνει θετικές τιμές άρα και η μέση τιμή είναι θετική και ω>0), οπότε ισχύει: $\bar{\psi} > \bar{\chi} \Leftrightarrow \frac{1}{\bar{\psi}} < \frac{1}{\bar{\chi}} \overset{S>0}{\Leftrightarrow} S\frac{1}{\bar{\psi}} < S\frac{1}{\bar{\chi}} \Leftrightarrow \frac{S}{\bar{\psi}} < \frac{S}{\bar{\chi}} \Leftrightarrow CV_\psi < CV_\chi$ *άρα μειώνεται ο συντελεστής μεταβολής.* {Σχόλιο: Θυμηθείτε από το βιβλίο της Α΄ λυκείου στο κεφάλαιο διάταξη την πρώτη εφαρμογή : Για α , β ομόσημους ισχύει: α<β$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$ }

Γ) Για να γίνει το δείγμα ομοιογενές πρέπει $CV_\psi \leq 10\% \Leftrightarrow \frac{S}{\bar{\psi}} \leq 10\% \Leftrightarrow \frac{S}{\bar{\chi}+\omega} \leq 10\% \Leftrightarrow \frac{6}{30+\omega} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow 60 \leq 30 + \omega$

⇔60-30≤ω⇔30≤ω ή ω≥30 Συνεπώς η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το ω ώστε ,το δείγμα να είναι ομοιογενές, είναι ω=30.

! ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ !

15) Η διάρκεια ζωής (σε χιλιάδες ώρες) ενός δείγματος 8000 ηλεκτρικών συσκευών που παράγει μια μηχανή, όταν λειτουργεί κανονικά, ακολουθεί κανονική ή περίπου κανονική κατανομή. Η διάμεσος του δείγματος είναι 20 και 200 ηλεκτρικές συσκευές έχουν διάρκεια ζωής τουλάχιστον 22 .

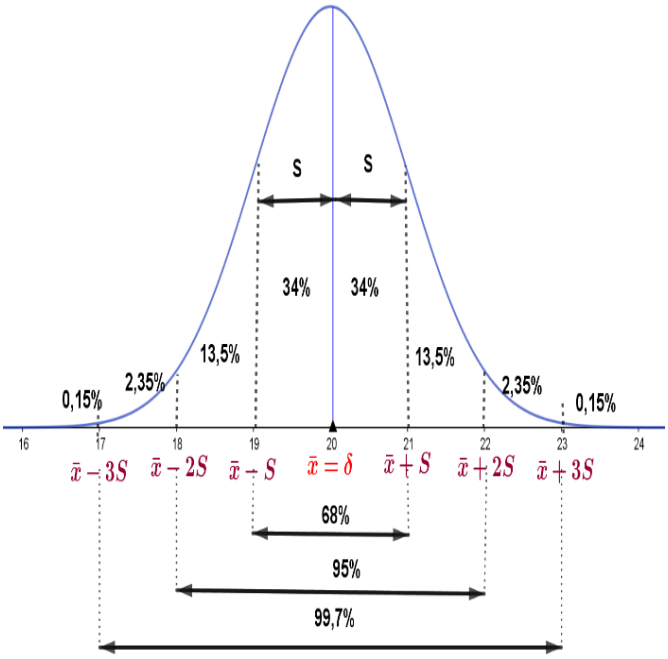
Α) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

10 ΕΠΑΛ ΡΑΦΕΤΣΩΝΑΣ Α. ΚΑΤΣΑΡΟΣ

Β) Θεωρούμε μια ηλεκτρική συσκευή ελαττωματική όταν έχει διάρκεια ζωής κάτω από 17. Αν στο δείγμα βρέθηκαν 15 ηλεκτρικές συσκευές που έχουν διάρκεια ζωής κάτω από 17, εξετάστε αν η μηχανή έχει βλάβη.

(δες και την άσκηση 39)

ΛΥΣΗ



Α) Δεδομένου ότι το δείγμα ακολουθεί κανονική ή περίπου κανονική κατανομή ισχύει: $\begin{cases}\delta=\bar{\chi}\\ \delta=20\end{cases} \Rightarrow \bar{\chi}=20$

. Το ποσοστό των 200 ηλεκτρικών συσκευών είναι:

$f_i\% = \frac{200}{8000}100\% = 0{,}025\frac{100}{100} = \frac{2{,}5}{100} = 2{,}5\%$

2,5% είναι το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι τουλάχιστον 22 . Από θεωρία γνωρίζουμε ότι:

2,5% είναι το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι τουλάχιστον $\bar{\chi}+2S$ άρα $\bar{\chi}$ +2S=22 (1) Για $\bar{\chi}=20$ η (1) γίνεται 20+2S=22⇔2S=22-20⇔2S=2 ⇔ S=1 άρα CV=$\frac{S}{\bar{\chi}}100\% = \frac{1}{20}100\% = 0{,}05\frac{100}{100} = \frac{5}{100} = 5\% < 10\%$

Και το δείγμα είναι ομοιογενές

Β) Θεωρούμε μια ηλεκτρική συσκευή ελαττωματική όταν έχει διάρκεια ζωής κάτω από 17 =20-3·1=$\bar{\chi}-3S$.Το ποσοστό κάτω από $\bar{\chi}-3S$ είναι 0,15% που αντιστοιχεί σε 0,15%·8000=$\frac{0{,}15}{100}8000 = 0{,}15\cdot 80$=12 συσκευές. Φυσιολογική λειτουργία του μηχανήματος θεωρείται η παραγωγή μέχρι και 12 ελαττωματικών συσκευών. Το μηχάνημα παράγει 17>12 ελαττωματικές συσκευές άρα έχει βλάβη.

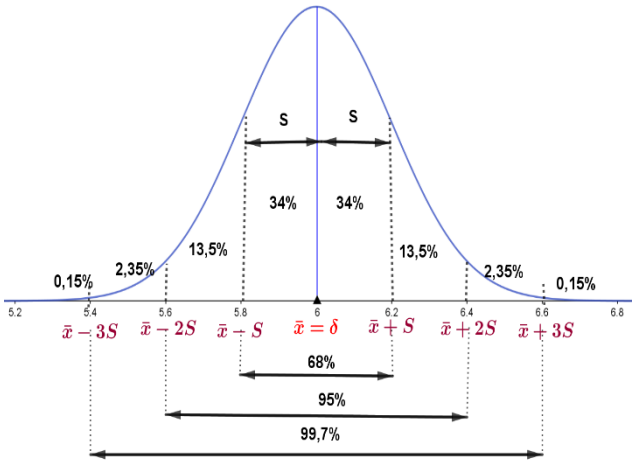
! ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ !

16) Ένα μηχάνημα κατασκευάζει βίδες. Όταν το μηχάνημα λειτουργεί σωστά, η κατανομή συχνοτήτων των βιδών ως προς το μήκος τους, είναι κανονική με μέση τιμή $\bar{\chi}$ (σε cm) και τυπική απόκλιση S (σε cm). Αν το 95% περίπου των βιδών που κατασκευάζει το παραπάνω μηχάνημα έχουν μήκος μεταξύ 5,6 cm και 6,4cm τότε:

Α) Να βρείτε το ποσοστό των βιδών που έχει μήκος μεταξύ 5,8cm και 6cm.

Β) Αν μια βίδα έχει μήκος μικρότερο ή ίσο των 5,4cm ή μεγαλύτερο ή ίσο των 6,6cm θεωρείται ελαττωματική. Να βρείτε το ποσοστό των ελαττωματικών βιδών.

Γ) Σε ποιοτικό έλεγχο 10000 βιδών που κατασκεύασε το μηχάνημα, 45 βίδες βρέθηκαν ελαττωματικές. Η πρόταση <<το μηχάνημα παρουσιάζει πρόβλημα λειτουργίας >> είναι Σωστή ή Λάθος;



ΛΥΣΗ

Α) Το 95% περίπου των βιδών που κατασκευάζει το παραπάνω μηχάνημα έχουν μήκος μεταξύ 5,6 cm και 6,4cm

Το 95% περίπου των παρατηρήσεων στην κανονική κατανομή είναι στο διάστημα από $\bar{\chi}-2S$ έως $\bar{\chi}+2S$ άρα $\bar{\chi}-2S$ =5,6 (1) και $\bar{\chi}+2S$ =6,4 (2) Λύνουμε

1ο ΕΠΑΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑ

το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2)

$$\begin{pmatrix}\bar{\chi}-2S=5{,}6\\ \bar{\chi}+2S=6{,}4\end{pmatrix} \overset{\substack{\text{αντ.συντελεστές}\\ \text{προσθ.κατά μέλη}}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix}2\bar{\chi}=12\\ \bar{\chi}+2S=6{,}4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\bar{\chi}=6\\ \bar{\chi}+2S=6{,}4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\bar{\chi}=6\\ 6+2S=6{,}4\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}\bar{\chi}=6\\ 6+2S=6{,}4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\bar{\chi}=6\\ 2S=6{,}4-6\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\bar{\chi}=6\\ 2S=0{,}4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\bar{\chi}=6\\ 2S=0{,}4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\bar{\chi}=6\\ S=0{,}2\end{pmatrix}$$

Μεταξύ 5,8=6-0,2=$\bar{\chi}$ −S και $6=\bar{\chi}$ το ποσοστό είναι: $\frac{68\%}{2}=34\%$ {Θεωρία: στο ($\bar{\chi}$ −S , $\bar{\chi}$ +S)ποσοστό 68%}

Β) Μήκος μικρότερο ή ίσο των 5,4=6-0,6=6-3·0,2=$\bar{\chi}-3S$ ή μήκος μεγαλύτερο ή ίσο των 6,6=6+0,6=6+3·0,2=$\bar{\chi}+3S$ Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες του $\bar{\chi}-3S$ είναι το 0,15% και το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του $\bar{\chi}+3S$ είναι το 0,15% οπότε το ποσοστό των ελαττωματικών βιδών είναι 0,15%+0,15%=0,30%

Γ) Αφού στην κανονική λειτουργία του μηχανήματος το ποσοστό των ελαττωματικών βιδών είναι 0,30% στις 10000 βίδες ο αναμενόμενος αριθμός ελαττωματικών βιδών είναι 0,30%·10000=$\frac{0{,}30}{100}10000=30$ Συνεπώς Η πρόταση <<το μηχάνημα παρουσιάζει πρόβλημα λειτουργίας >> είναι Σωστή διότι βρέθηκαν 45>30 βίδες ελαττωματικές.

! ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ !

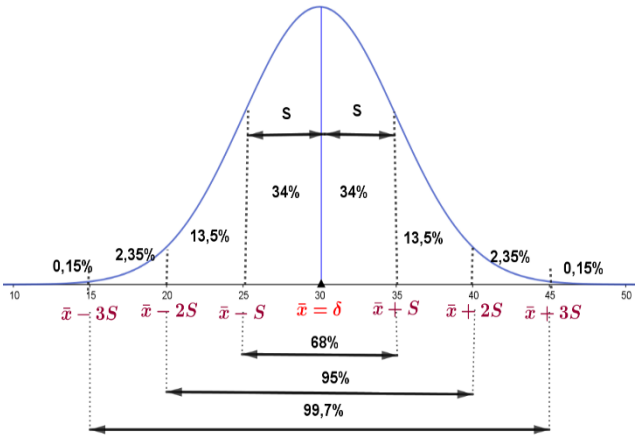
17) Οι χρόνοι μετάβασης 2000 ατόμων από το σπίτι τους προς την εργασία τους ακολουθούν την κανονική κατανομή.

- **50 εργαζόμενοι κάνουν χρόνο το πολύ 20 min. (λεπτά)**
- **320 εργαζόμενοι κάνουν χρόνο τουλάχιστον 35 min.**

Α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση, τη διάμεσο, το εύρος και τον συντελεστή μεταβολής.

Β) Ποιο είναι το πλήθος των εργαζόμενων που κάνουν ι) από 25 min έως 40 min. ιι) από 20 min έως 30 min

Γ) Παρατηρήθηκε ότι αν κάνουν χρήση του μετρό οι χρόνοι τους μειώνονται κατά 20%. Ποια είναι τότε η μεταβολή του συντελεστή μεταβολής;



ΛΥΣΗ

Α) Το ποσοστό των 50 εργαζομένων είναι $f_i\%=\frac{50}{2000}100\%=0{,}025\frac{100}{100}=\frac{2{,}5}{100}=2{,}5\%$

2,5% είναι το ποσοστό των εργαζόμενων που κάνουν το πολύ 20 Από θεωρία γνωρίζουμε ότι:

2,5% =0,15%+2,35% είναι το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι το πολύ $\bar{\chi}-2S$ άρα $\bar{\chi}$ −2S=20 (1)

Το ποσοστό των 320 εργαζομένων είναι $f_i\%=\frac{320}{2000}100\%=0{,}16\frac{100}{100}=\frac{16}{100}$ =16%

16% είναι το ποσοστό των εργαζόμενων που κάνουν τουλάχιστον 35 min . Από θεωρία γνωρίζουμε ότι:

16% =0,15%+2,35%+13,5% είναι το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι τουλάχιστον $\bar{\chi}$ +S άρα $\bar{\chi}$ +S=35 (2)

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2)

ΙΟ ΕΠΑΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ Α. ΚΑΤΣΑΡΟΣ

$\begin{pmatrix}\bar{\chi}-2S=20\\ \bar{\chi}+S=35\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-\bar{\chi}+2S=-20\\ \bar{\chi}+S=35\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3S=15\\ \bar{\chi}+S=35\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}S=5\\ \bar{\chi}+S=35\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}S=5\\ \bar{\chi}+5=35\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}S=5\\ \bar{\chi}=35-5=30\end{pmatrix}$

$S=5min$ και $\bar{\chi}=30\text{min}$ γνωρίζουμε ότι: $\begin{cases}\delta=\bar{\chi}\\ \bar{\chi}=30\end{cases}$ ⇒δ=30min , R≅6S=6·5=30 και $CV=\frac{S}{\bar{\chi}}100\%=\frac{5}{30}100\%=0{,}1666\frac{100}{100}=\frac{16{,}66}{100}=16{,}66\%$

Β) ι) Από 25=30-5=$\bar{\chi}-S$ έως 40=30+10=30+2·5=$\bar{\chi}+2S$ το ποσοστό είναι 34%+34%+13,5%=81,5 % (ή 68%+$\frac{95-68}{2}=81{,}5\%$)

ιι) Από 20=30-10=30-2·5=$\bar{\chi}-2S$ έως 30 =$\bar{\chi}$ το ποσοστό είναι 13,5%+34%=47,5% (ή $\frac{95\%}{2}=47{,}5\%$)

Γ) Όταν κάθε τιμή της μεταβλητής μειώνεται κατά 20% τότε οι νέες τιμές που θα προκύψουν θα είναι $\psi_\iota=\chi_\iota-20\%\chi_\iota \Leftrightarrow \psi_\iota=\chi_\iota-\frac{20}{100}\chi_\iota \Leftrightarrow \psi_\iota=\chi_\iota-0{,}2\chi_\iota \Leftrightarrow \psi_\iota=0{,}8\chi_\iota$ και η νέα μέση τιμή είναι $\bar{\psi}=0{,}8\bar{\chi}$ σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή η δε τυπική απόκλιση $S_\psi=|0{,}8|S_\chi$

Ο νέος συντελεστής μεταβολής θα είναι $CV_\psi=\frac{S_\psi}{\bar{\psi}}=\frac{0{,}8S}{0{,}8\bar{x}}=\frac{S}{\bar{\chi}}=CV_x$ συνεπώς δεν μεταβάλλεται ο CV.

! ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ !

18) Έστω ότι ένα δείγμα 2000 παρατηρήσεων ακολουθεί την κανονική κατανομή, από τις οποίες 320 είναι μεγαλύτερες του 37 και 50 είναι μικρότερες του 10.

Α1)Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{\chi}$ και την τυπική απόκλιση S των τιμών του δείγματος.

Α2) Να βρείτε το εύρος R και τη διάμεσο δ των τιμών του δείγματος.

Α3) Να βρείτε πόσες παρατηρήσεις ι) περιέχονται στο διάστημα (28,46) ιι) είναι μικρότερες του 19

Α4) Να δείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Α5) Αν όλες οι τιμές ελαττωθούν κατά 10% , να βρείτε πόσο θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.

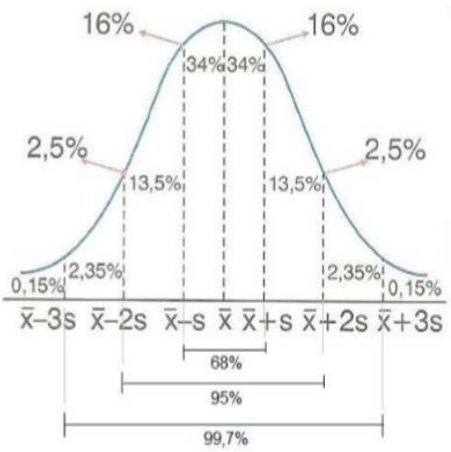
Α6) Να βρείτε ποιος είναι ο ελάχιστος θετικός αριθμός που πρέπει να προστεθεί σε κάθε παρατήρηση ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές. (πανελ.2016)

ΛΥΣΗ

{{{σχόλιο: Σε προϋγούμενες ασκήσεις μας έδινε το ποσοστό και προσδιορίζαμε το διάστημα. Εδώ μας δίνει το μέγεθος του πληθυσμού και τις παρατηρήσεις κάθε διαστήματος για να υπολογίσουμε το ποσοστό του **.}}}**

Α1) Από τα δεδομένα έχουμε ότι το μέγεθος ν του δείγματος είναι ν=2000

- 320 παρατηρήσεις είναι **μεγαλύτερες** του 37 . Υπολογίζουμε το ποσοστό των 320 παρατηρήσεων $\frac{320}{2000}=0{,}16=\frac{16}{100}=16\%$ άρα 0,15%+2,35%+13,5%=16% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες του 37 οπότε $\bar{\chi}+S=37$ (1)
- 50 παρατηρήσεις είναι **μικρότερες** του 10. Υπολογίζουμε το ποσοστό των 50 παρατηρήσεων $\frac{50}{2000}=0{,}025=\frac{2{,}5}{100}=2{,}5\%$ άρα 0,15%+2,35%=2,5% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 10 όμως2,5% είναι μικρότερες του $\bar{\chi}-2S$ οπότε : $\bar{\chi}-2S=10$ (2)



Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2)

10 ΕΠΑΛ ΑΡΑΓΕΣΩΝΑΣ Α. ΚΑΤΣΑΡΟΣ

$$\begin{pmatrix}\bar{\chi}+S=37\\ \bar{\chi}-2S=10\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\bar{\chi}=37-S\\ \bar{\chi}-2S=10\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\bar{\chi}=37-S\\ 37-S-2S=10\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\bar{\chi}=37-S\\ -3S=10-37\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\bar{\chi}=37-S\\ -3S=-27\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\bar{\chi}=37-S\\ S=9\end{pmatrix}$$

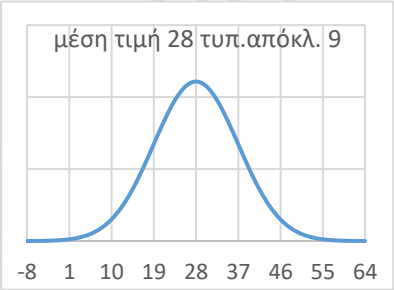
$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\bar{\chi}=37-9\\ S=9\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\bar{\chi}=28\\ S=9\end{pmatrix}$$

A2) Αφού το δείγμα ακολουθεί την κανονική κατανομή ,για αυτήν ισχύουν οι σχέσεις: $\bar{\chi}=\delta\ \ \kappa\alpha\iota\ \ R\approx 6\cdot S$

Οπότε: $\begin{cases}\bar{\chi}=\delta\\ \bar{\chi}=28\end{cases}\Rightarrow\ \ \delta=28\ \kappa\alpha\iota\ \ R\approx 6\cdot S=6\cdot 9=54$

A3) Κατασκευάζουμε την καμπύλη της κανονικής κατανομής για τα δεδομένα μας $\bar{\chi}=28\ \kappa\alpha\iota\ S=9$

ι) Το ποσοστό των παρατηρήσεων που περιέχονται στο διάστημα (28,46) όπως βλέπουμε στο σχήμα {ή όπως μπορούμε να το ''κατασκευάσουμε '' (28=$\bar{\chi}$,46=28+18=28+2·9=$\bar{\chi}+2\,S$) } αφορά το διάστημα ($\bar{\chi}$, $\bar{\chi}+2\,S$) όπου το ποσοστό είναι 34%+13,5%=47,5% (**ή** $\frac{\mathbf{95\%}}{\mathbf{2}}=\mathbf{47,5\%}$)οπότε το πλήθος των παρατηρήσεων είναι:
47,5%·2000=$\frac{47,5}{100}2000=950$



ιι) Από το ίδιο σχήμα το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 19 (μικρότερες του $\bar{\chi}-\ S$) είναι 0,15%+2,35%+13.5%=16% . (ή $\frac{\mathbf{100\%-68\%}}{\mathbf{2}}$=16%) Άρα 16%·2000=$\frac{16}{100}2000=320$ είναι οι παρατηρήσεις που είναι μικρότερες του 19

A4) $CV=\frac{S}{\bar{\chi}}=\frac{9}{28}=0,3214=\frac{32,14}{100}=32,14\%$ >10% άρα δεν είναι ομοιογενές το δείγμα .

A5) Έστω ψ_ι οι τιμές που θα προκύψουν από την μείωση των τιμών χ_ι κατά 10% .Τότε θα έχουμε:

$\psi_\iota=\chi_\iota-10\%\chi_\iota=\chi_\iota-\frac{10}{100}\chi_\iota=\chi_\iota-0,1\chi_\iota=(1-0,1)\chi_\iota=0,9\chi_\iota$ και σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή (εφαρμογή 3 σελίδα 99 βιβλίου) ισχύει: $\bar{\psi}=0,9\bar{\chi}$ και $S_\psi=|0,9|S_\chi$. Ο συντελεστής μεταβολής των νέων τιμών ψ_ι είναι: $CV_\psi=\frac{S_\psi}{|\bar{\psi}|}=\frac{0,9S_\chi}{0,9\bar{\chi}}=\frac{S_\chi}{\bar{\chi}}=CV$ ίδιος με τον συντελεστή των αρχικών τιμών, δηλαδή δεν μεταβάλλεται.

A6) Έστω z_i οι τιμές που θα προκύψουν αν στις αρχικές τιμές x_i προστεθεί ο θετικός αριθμός κ δηλαδή θα ισχύει για την μεταξύ τους σχέση η ισότητα: $z_i=x_i$ +κ .Τότε και σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή (εφαρμογή 3 σελίδα 99 βιβλίου) ισχύει: $\bar{z}=\bar{x}+\kappa$ και $S_z=S_\chi$ και ο νέος συντελεστής θα είναι: $CV_z=\frac{S_z}{|\bar{z}|}=\frac{S_\chi}{\bar{x}+\kappa}=\frac{9}{28+k}$

Για να είναι ομοιογενές το δείγμα πρέπει να ισχύει: $CV_z\leq 10\%\Leftrightarrow\frac{9}{28+k}\leq 10\%\Leftrightarrow\frac{9}{28+k}\leq\frac{10}{100}\Leftrightarrow\frac{9}{28+k}\leq\frac{1}{10}$

$\Leftrightarrow 90\leq 28+\kappa\Leftrightarrow 62\leq\kappa$ ή $\kappa\geq 62$ Άρα ο μικρότερος αριθμός που πρέπει να προστεθεί είναι κ=62

! ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ !

19) Τα κέρδη σε ευρώ μιας αλυσίδας καταστημάτων ειδών διατροφής ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή. Γνωρίζουμε ότι το 84% των καταστημάτων έχουν κέρδη λιγότερα από 1200 ευρώ, ενώ το 97,5% των καταστημάτων έχουν κέρδη πάνω από 600 ευρώ.

A1) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή ,την τυπική απόκλιση και τη διάμεσο των κερδών.

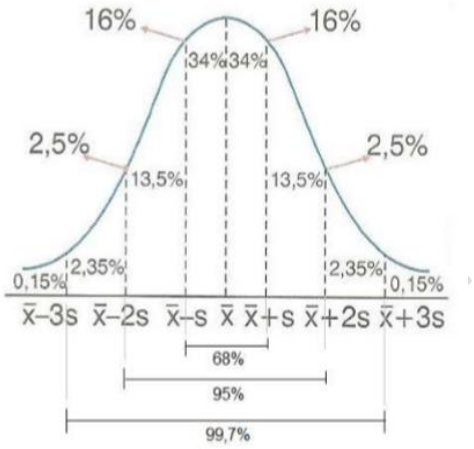
A2) Να υπολογίσετε τη διακύμανση και να προσεγγίσετε το εύρος των κερδών.

A3) Μπορεί το σύνολο των καταστημάτων της αλυσίδας να θεωρηθεί ομοιογενές ως προς τα κέρδη; Αν το δείγμα δεν είναι ομοιογενές, κατά ποια σταθερή ποσότητα πρέπει να αυξηθούν τα κέρδη των καταστημάτων για να γίνει το δείγμα ομοιογενές;

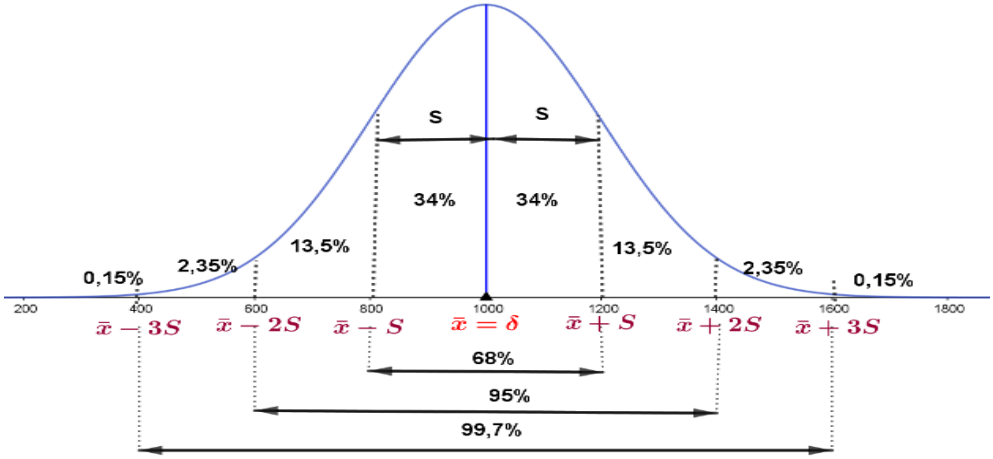
1ο ΕΠΑΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ Α. Κ

Α4) Αν μια μέρα τα κέρδη όλων των καταστημάτων μειωθούν κατά 20% ,πόσο θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής;

ΛΥΣΗ



{{{Σχόλιο: η έκφραση << το 84% των καταστημάτων έχουν κέρδη λιγότερα από 1200 ευρώ>> μας παραπέμπει στο να αθροίσουμε τα ποσοστά των διαστημάτων από αριστερά προς τα δεξιά μέχρι να φθάσουμε στο 84% ήτοι 0,15%+2,35%+13,5%+34%+34%=84% (ή $100\%\frac{100\%-68\%}{2}=84\%$)και βλέπουμε ότι τελειώνει στο $\bar{x}+S$. Άρα **λιγότερο** από 1200 σημαίνει λιγότερο από $\bar{x}+S$,δηλαδή $\bar{x}+S=1200$. Το 97,5% έχουν κέρδη **πάνω** από 600 ευρώ πρέπει να βρούμε το ποσοστό αθροίζοντας από δεξιά προς τα αριστερά 0,15%+2,35%+13,5%+34%+34%+13,5%=97,5% (**ή 95%+**$\frac{100\%-95\%}{2}=$ **97,5%**)και τέλειωσε η άθροιση στο $\bar{x}-2S$ άρα $\bar{x}-2S=600$.
}}}



Α1) Επειδή το 84% των καταστημάτων έχουν κέρδη λιγότερα από 1200 ευρώ , από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι το 84% των παρατηρήσεων είναι λιγότερες από $\bar{x}+S$ άρα $\bar{x}+S=1200$ (1)

Επειδή το 97,5% των καταστημάτων έχουν κέρδη πάνω από 600 ευρώ , από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι το 97,5% των παρατηρήσεων είναι πάνω από $\bar{x}-2S$ άρα $\bar{x}-2S=600$ (2)
Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2)

$$\left(\begin{matrix}\bar{x}+S=1200\\ \bar{x}-2S=600\end{matrix}\Big|\frac{\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\alpha}{\sigma\iota\acute{\alpha}\zeta\omega\ \ \mu\varepsilon}(-1)\right)\Leftrightarrow\left(\begin{matrix}\bar{x}+S=1200\\ -\bar{x}+2S=-600\end{matrix}\right)\overset{\pi\rho 0\sigma\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \ \kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta}{\Leftrightarrow}\left(\begin{matrix}\bar{x}+S=1200\\ 3S=600\end{matrix}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{matrix}\bar{x}+S=1200\\ S=200\end{matrix}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{matrix}\bar{x}+200=1200\\ S=200\end{matrix}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{matrix}\bar{x}=1200-200\\ S=200\end{matrix}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{matrix}\bar{x}=1000\\ S=200\end{matrix}\right)$$ Επειδή η κατανομή είναι κανονική ισχύει: $\begin{cases}\bar{\chi}=\delta\\ \bar{\chi}=1000\end{cases}\Rightarrow\delta=1000$

Α2) $S=200\Leftrightarrow S^2=200^2=40000$ και R≈6S=6·200=1200

Α3) $CV=\frac{S}{|\bar{x}|}=\frac{200}{1000}=0{,}2=\frac{20}{100}=20\%>10\%$ και το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

Έστω c>0 η σταθερή ποσότητα κατά την οποία πρέπει να αυξηθούν τα κέρδη των καταστημάτων. Τότε οι νέες τιμές θα είναι $\psi_\iota=\chi_\iota+c$.Σύμφωνα με εφαρμογή (εφ.3 σελ.99 βιβλίου) για τη νέα μέση τιμή και τη νέα τυπική απόκλιση θα ισχύει: $\bar{\psi}=\bar{\chi}+c$ ή $\bar{\psi}=1000+c$ και $S_\psi=S_\chi$ και για να είναι ομοιογενές πρέπει:
$CV'=\frac{S_\psi}{\bar{\psi}}\leq 10\%\Leftrightarrow\frac{S_\psi}{\bar{\psi}}\leq\frac{10}{100}\Leftrightarrow\frac{S_\psi}{\bar{\psi}}\leq\frac{1}{10}\Leftrightarrow\frac{200}{1000+c}\leq\frac{1}{10}\Leftrightarrow 2000\leq 1000+c\Leftrightarrow 1000\leq c$ ή $c\geq 1000$ Άρα πρέπει

$c=1000$

Α4) Επειδή τα κέρδη θα μειωθούν κατά 20% τα νέα κέρδη θα είναι: $Z_\iota=\chi_\iota-20\%\chi_\iota=\chi_\iota-\frac{20}{100}\chi_\iota=\chi_\iota-0{,}2\chi_\iota=(1-0{,}2)\chi_\iota=0{,}8\chi_\iota$ και από την εφαρμογή που αναφέραμε στο Α3) ερώτημα έχουμε:$\bar{Z}=0{,}8\bar{\chi}$ και $S_z=|0{,}8|S_x$ οπότε

$CV_z = \frac{S_z}{\bar{Z}} = \frac{0{,}8S_x}{0{,}8\bar{\chi}} = \frac{S_x}{\bar{\chi}} = CV = 0{,}2$ δηλαδή ο συντελεστής μεταβολής παραμένει ο ίδιος.

! ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ !

20) Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης για το χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου των μαθητών χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά. Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

1. Να βρείτε το μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους.

2. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

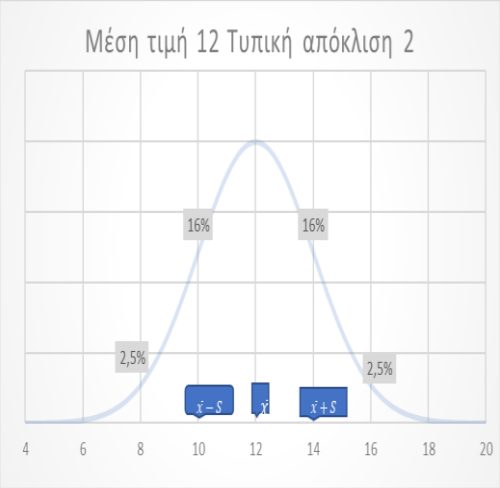
3. Αν οι μαθητές της πόλης είναι περίπου 4000 πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 ως 16 λεπτά.

4. Μια μέρα λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής (CV). (πανελ. 2001)

ΛΥΣΗ

1.Α) Γνωρίζουμε ότι σε μια κανονική κατανομή η μέση τιμή είναι ίση με την διάμεσο και αφού το 50% των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά άρα δ=12 οπότε:

$\begin{cases} \delta = \bar{\chi} \\ \delta = 12 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\bar{\chi} = 12}$



Β) Σε μια κανονική κατανομή στο διάστημα ($\bar{x}$ - S , $\bar{\chi} + S$) βρίσκεται το 68% των παρατηρήσεων. Άρα μικρότερο από $\bar{x}$ -S **και** μεγαλύτερο από $\bar{x}$+S θα είναι το (100%-68%) = 32% των παρατηρήσεων. Οπότε μικρότερο από $\bar{x}$ -S **ή** μεγαλύτερο από $\bar{x}$+S θα είναι το $\frac{100\%-68\%}{2} = \frac{32\%}{2}$ = 16% των παρατηρήσεων. Το 16%των μαθητών χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά βάσει της εκφώνησης άρα $\bar{x}$-S=10 δηλαδή 12-S=10 ⇔ -S=10-12⇔-S=-2⇔**S=2**

2. Το δείγμα θεωρείται ομοιογενές αν CV≤ 10% Εχουμε: CV= $\frac{S}{|\bar{x}|}$ $=\frac{2}{12}=\frac{1}{6} = 0{,}1667 = \frac{16{,}67}{100} = 16{,}67\% > 10\%$ άρα δεν είναι ομοιογενές.

3. Για το διάστημα από 14=12+2=$\bar{x}$+S ως 16 =12+4=12+2·2= $\bar{x}$+2S λεπτά, δηλαδή $\bar{x}$+S ως $\bar{x}$+2S έχουμε τα παρακάτω: Σε μια κανονική κατανομή, γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι, στο διάστημα από $\bar{x}$-S ως $\bar{x}$+S βρίσκεται το 68% των παρατηρήσεων, στο διάστημα από $\bar{x}$-2S ως $\bar{x}$+2S βρίσκεται το 95% των παρατηρήσεων, στο διάστημα από $\bar{x}$-3S ως $\bar{x}$+3S βρίσκεται το 99.7% των παρατηρήσεων. Για $\bar{x}$ =12 και S=2 οι τιμές των συμβολικών άκρων είναι: $\bar{x}$ - S = 12-2=10min , $\bar{x}$+S=12+2=14min , $\bar{x}$-2 S = 12-2·2=12-4=8min , $\bar{x}$+2S =12+2·2=12+4=16min , $\bar{x}$-3S =12-3·2=12-6=6 min , $\bar{x}$+3S =12+3·2=12+6=18min . Το ποσοστό των μαθητών που θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 ως 16 λεπτά θα βρίσκεται στο διάστημα ($\bar{x}$+S, $\bar{x}$+2S) και εκεί βρίσκεται το $\frac{95\%-68\%}{2}$= $\frac{27}{2}$=13,5%

Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4000 , τότε αυτοί που θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 ως 16 λεπτά είναι: 13,5% ·4000=$\frac{13{,}5}{100}$ 4000=13,5·40=540

4. Σύμφωνα με την εφαρμογή του βιβλίου αν $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots, \chi_\nu$ είναι ν παρατηρήσεις με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση S_x και $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν προσθέσουμε σε κάθε μια από τις $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots, \chi_\nu$ μια σταθερά c (ψ_i=x_ι+c), τότε $\bar{\psi}$ = $\bar{x}$ +c και $S_\psi = S_\chi$ άρα για c=5

ΙΩ ΕΠΑΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ Α. ΚΑΤΣΑΡΟΣ

$\bar{\psi} = \bar{x} + c \Leftrightarrow \bar{\psi} = 12 + 5 = 17\ min$ και $S_\psi = S_\chi = 2$ min

$CV_\psi = \frac{S_\psi}{\bar{\psi}} 100\% = \frac{2}{17} 100\% = 0{,}1176 \frac{100}{100} = \frac{11{,}76}{100} = 11{,}76\%$ Η μεταβολή του συντελεστή θα είναι: $16{,}67\% - 11{,}76\% = 4{,}91\%$

! ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ !

21) Το βάρος ενός δείγματος μαθητών λυκείου ακολουθεί κανονική ή περίπου κανονική κατανομή . Το 50% των μαθητών του δείγματος έχουν βάρος το πολύ 65 kg, ενώ περίπου το 47,5% αυτών έχουν βάρος από 65 kg έως 75 kg.

Α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την τυπική απόκλιση του βάρους των μαθητών του δείγματος.

Β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Γ) Να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών του δείγματος, που έχουν βάρος από 55 kg έως 70 kg.

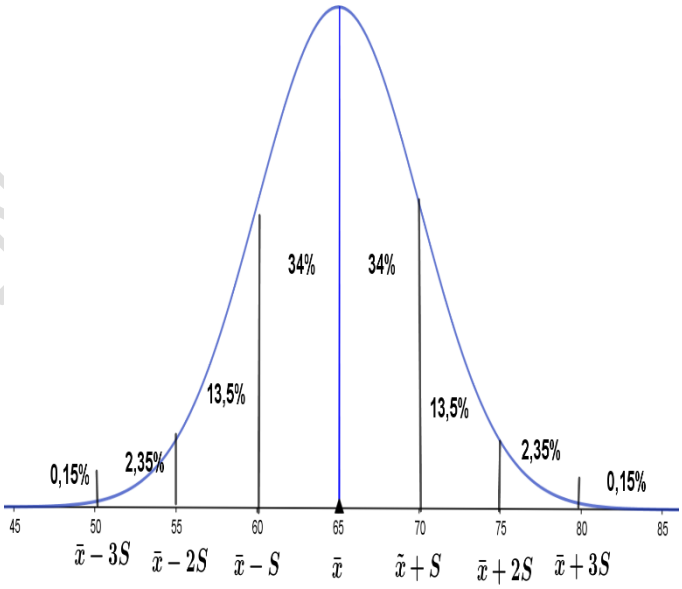
Δ) Ο αριθμός ων μαθητών του δείγματος αυτού που έχουν βάρος από 55 kg έως 60 kg είναι 27. Να υπολογίσετε το σύνολο των μαθητών του δείγματος. (ΓΕΛ επαν.2003)

ΛΥΣΗ

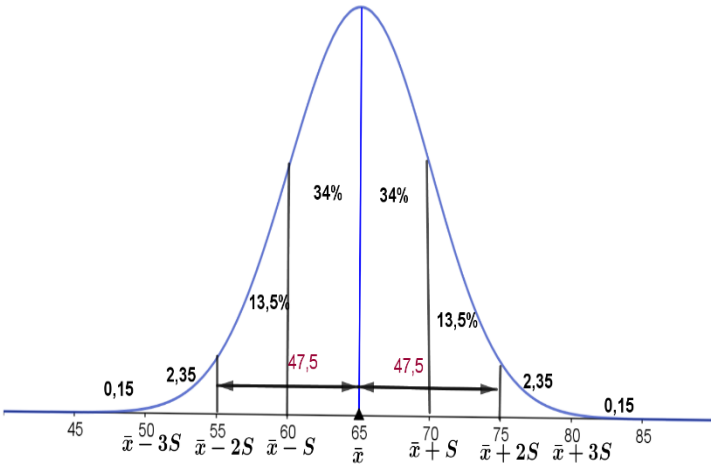
Α) Γνωρίζουμε ότι σε μια κανονική κατανομή η μέση τιμή ισούται με την διάμεσο και αφού το 50% των μαθητών έχει βάρος το πολύ 65 kg άρα δ =65 $\begin{cases} \delta = 65 \\ \boldsymbol{\delta = \bar{x}} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\bar{x}}$ **=65 kg**

Επειδή το 47,5% έχουν βάρος από 65 kg έως 75 kg. Άρα $\bar{x}$+2S=75 (1) Αντικαθιστώ στην (1) το $\bar{x} = 65$ και έχουμε

65+2S=75 ⇔2S=75 -65 ⇔ 2S=10⇔**S = 5** kg



{{{σχόλιο: γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι στο διάστημα ($\bar{x}$-2S , $\bar{x}$+2S) περιέχεται το 95% των παρατηρήσεων και καθένα από τα διαστήματα ($\bar{x}$-2S , $\bar{x}$) και ($\bar{x}$, $\bar{x}$+2S) περιλαμβάνει το $\frac{95\%}{2} = 47{,}5\%$ των παρατηρήσεων. Το ποιο διάστημα θα πάρουμε προσδιορίζεται από τις τιμές που μας έχουν δοθεί.Επειδή το διάστημα που μας δίνεται είναι από 65 kg έως 75 kg. και η μέση τιμή είναι 65 , παίρνουμε το διάστημα ($\bar{x}$, $\bar{x}$+2S)που σημαίνει $\bar{x}$+2S=75**}}}**



Β) $CV = \frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{5}{65} = 0{,}0769 = \frac{7{,}69}{100} = 7{,}69\% < 10\%$ άρα είναι ομοιογενές.

Γ) Οι μαθητές που έχουν βάρος από 55 kg έως 70 kg δηλαδή από 55 = 65 – 10 = 65 - 2·5 = $\bar{x}$-2S έως 70=65+5=$\bar{x}$+S και το ποσοστό είναι 13,5%+34%+34%=81,5% (ή 68%+$\frac{95\%-68\%}{2} = 81{,}5\%$)

Δ) Στο διάστημα [55,60) =[$\bar{x}$-2S , $\bar{x}$-S) το ποσοστό είναι $\frac{95\%-68\%}{2} = 13{,}5\%$ =f_i% άρα $f_i = 0{,}135$ και δόθηκε ότι, ο αριθμός των μαθητών είναι $\nu_\iota = 27$ οπότε: $f_i = \frac{\nu_\iota}{\nu} \Leftrightarrow 0{,}135 = \frac{27}{\nu} \Leftrightarrow \nu = \frac{27}{0{,}135} = 200$

ΙΩΕΙΛΑΡΑΠΕΤΣΩΝ ΚΑΤΣΑΡΟΣ

! ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ !

22) Η ηλικία των κατοίκων μιας πόλης ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 50 έτη και τυπική απόκλιση 15 έτη.

ι) Να βρείτε τη διάμεσο της κανονικής της ηλικίας των κατοίκων.

ιι) Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Αν ο αριθμός των κατοίκων της πόλης είναι 4000, να βρείτε πόσοι περίπου κάτοικοι είναι ηλικίας :

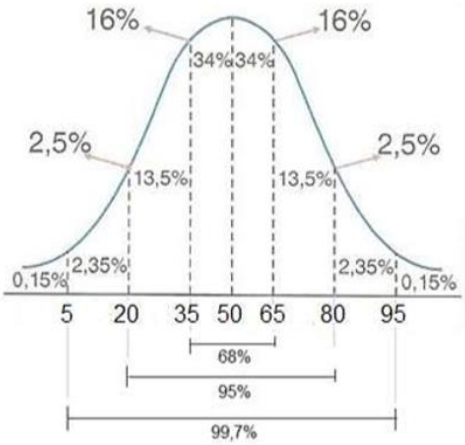
ιιι) Μεταξύ 35 και 65 ετών.

iv) Μεταξύ 5 και 35 ετών. (πανελ.2009)

ΛΥΣΗ

ι) Δίνεται ότι $\bar{\chi} = 50$ και επειδή η κατανομή είναι κανονική ισχύει: $\begin{cases} \bar{\chi} = \delta \\ \bar{\chi} = 50 \end{cases} \Rightarrow$ δ=50

ιι) Δίνεται ότι S=15 άρα $CV = \frac{S}{|\bar{\chi}|} = \frac{15}{50} = 0{,}30 = \frac{30}{100} = 30\% > 10\%$
άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.



{{{σχόλιο: Εφόσον γνωρίζουμε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση σχεδιάζουμε το γράφημα της κανονικής κατανομής βάζουμε τα δεδομένα στον άξονα και για κάθε διάστημα πρέπει να ξέρουμε τα ποσοστά ή θα πρέπει να μπορούμε να τα υπολογίσουμε. π.χ. στα διαστήματα $(\bar{\chi} - S = 35, \bar{x} = 50)$και $(\bar{x} = 50, \bar{x} + S = 65)$ έχουμε τα ίδια ποσοστά άρα $\frac{68\%}{2} = 34\%$

Στα διαστήματα $(\bar{\chi} - 2S = 20, \bar{x} - S = 35)$και$(\bar{x} + S = 65, \bar{x} + 2S = 80)$ έχουμε τα ίδια ποσοστά $\frac{95\% - 68\%}{2} = \frac{27\%}{2} = 13{,}5\%$

Στα διαστήματα $(\bar{\chi} - 3S = 5, \bar{x} - 2S = 20)$και$(\bar{x} + 2S = 80, \bar{x} + 3S = 95)$ έχουμε τα ίδια ποσοστά $\frac{99{,}7\% - 95\%}{2} = \frac{4{,}7\%}{2} = 2{,}35\%$ και για κάθε ένα από τα διαστήματα πριν από $\bar{\chi} - 3S$ και μετά το $\bar{\chi} + 3S$ έχουμε $\frac{100\% - 99{,}7\%}{2} = \frac{0{,}3\%}{2} = 0{,}15\%$ **}}}**

ιιι) Μεταξύ 35και 65 βρίσκεται το 68% των παρατηρήσεων του δείγματος των 4000 κατοίκων και το πλήθος τους είναι: 68%·4000=$\frac{68}{100}4000 = 68 \cdot 40 = 2720$ κάτοικοι.

iv) Μεταξύ 5=50-45=50-3·15=$\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{3S}$ και 35=50-15= $\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{S}$ βρίσκεται το 2,35%+13,5%=15,85% (ή $\frac{99{,}7\% - 68\%}{2} = 15{,}85\%$) των παρατηρήσεων του δείγματος των 4000 κατοίκων και το πλήθος τους είναι: 15,85%·4000=$\frac{15{,}85}{100}4000 = 15{,}85 \cdot 40 = 634$ κάτοικοι

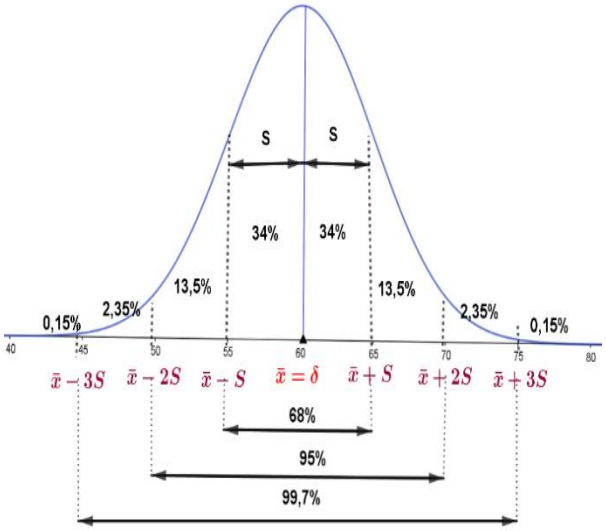
! ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ !

23) Εξετάσαμε δείγμα από τους μαθητές μιας σχολικής τάξης ως προς το βάρος τους .Διαπιστώσαμε ότι το βάρος τους κυμαίνεται από 45 kg έως 75kg και η κατανομή των βαρών τους είναι περίπου κανονική.

10 ΕΠΑΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ Α ΚΑΤΣΑΡΟΣ

Α. Να βρείτε τη μέση τιμή τη διάμεσο και το εύρος του δείγματος Β. Να βρείτε τη διασπορά των βαρών τους .Γ. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Δ. Αν το άθροισμα όλων των βαρών είναι 1800 kg βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

ΛΥΣΗ



Α. **{{{Σχόλιο**: Στην κανονική κατανομή οι τιμές που χρησιμοποιούνται είναι από $\bar{x}-3S$ μέχρι $\bar{x}+3S$. Συνεπώς η έκφραση <<το βάρος τους κυμαίνεται από 45 kg έως 75kg >>σημαίνει $\bar{x}-3S$ =45 και $\bar{x}+3S$ =75 **}}}**

Επειδή το βάρος κυμαίνεται από 45kg έως 75kg και η κατανομή των βαρών είναι περίπου κανονική ισχύει:

$$\begin{Bmatrix} \bar{x}-3S=45 \\ \bar{x}+3S=75 \end{Bmatrix} (\lambda\acute{\upsilon}\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \tau o\ \sigma\acute{\upsilon}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ \pi\rho o\sigma\theta\acute{\varepsilon}\tau o\nu\tau\alpha\varsigma\ \kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta\ \ \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\theta\varepsilon\tau o\upsilon\varsigma\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\varepsilon}\varsigma)$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha\ \ 2\bar{x}=120 \Rightarrow \bar{x}=60kg\ \ o\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ 3S=75-60 \Rightarrow 3S=15 \Leftrightarrow S=5\ \ \ \acute{\alpha}\rho\alpha\ S=5kgr$$

Στην κανονική κατανομή ισχύει: $\begin{cases} \bar{x}=\delta \\ \bar{x}=60 \end{cases}$ ⇒δ=60 kg ενώ για το εύρος γνωρίζουμε ότι

$$R\approx 6S\ \ o\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \ R=6\cdot 5=30kg$$

Β. Αφού $S=5 \Rightarrow S^2=25$

Γ. Ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV=\dfrac{S}{|\bar{x}|}=\dfrac{5}{60}\simeq 0,0833=\dfrac{8,33}{100}=8,33\%\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \ CV=8,33\%\le 10\%$

άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

Δ. Ισχύει $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\nu}\Rightarrow 60=\dfrac{1800}{\nu}\Rightarrow \nu=\dfrac{1800}{60}=30$ άρα το δείγμα αποτελείται από 30 μαθητές.

! ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ !

24) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\bar{x}}{2}x^2-Sx+1$ ό που $\bar{x}$ και S μέση τιμή και η τυπική απόκλιση ενός δείγματος με $\bar{x}>0$.

Α, Εάν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το Α (1,1) να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Β. Να βρείτε τα τυχόν ακρότατα της f στο R.

Γ. Αν είναι γνωστό ότι $\lim\limits_{x\uparrow S} f(x)=1$ να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική S απόκλιση του δείγματος.

ΙΟ ΕΠΑΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ Α.Κ.

Δ. Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που περιέχονται στο διάστημα (1,5) εάν υποθέσουμε ότι η καμπύλη κατανομής του δείγματος είναι περίπου κανονική καθώς και το εύρος R των τιμών του δείγματος.

ΛΥΣΗ

Α. Επειδή Α(1,1) είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f ισχύει ότι :

f(1)=1 $\Leftrightarrow \frac{\bar{x}}{2}1^2 - S\cdot 1 + 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{\bar{x}}{2} - S = 0 \Leftrightarrow \bar{x} - 2S = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 2S \Leftrightarrow \frac{\bar{x}}{2\bar{x}} = \frac{2S}{2\bar{x}} \Leftrightarrow \frac{S}{\bar{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow CV = \frac{1}{2} \Leftrightarrow CV = 50\% > 10\%$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Β. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με

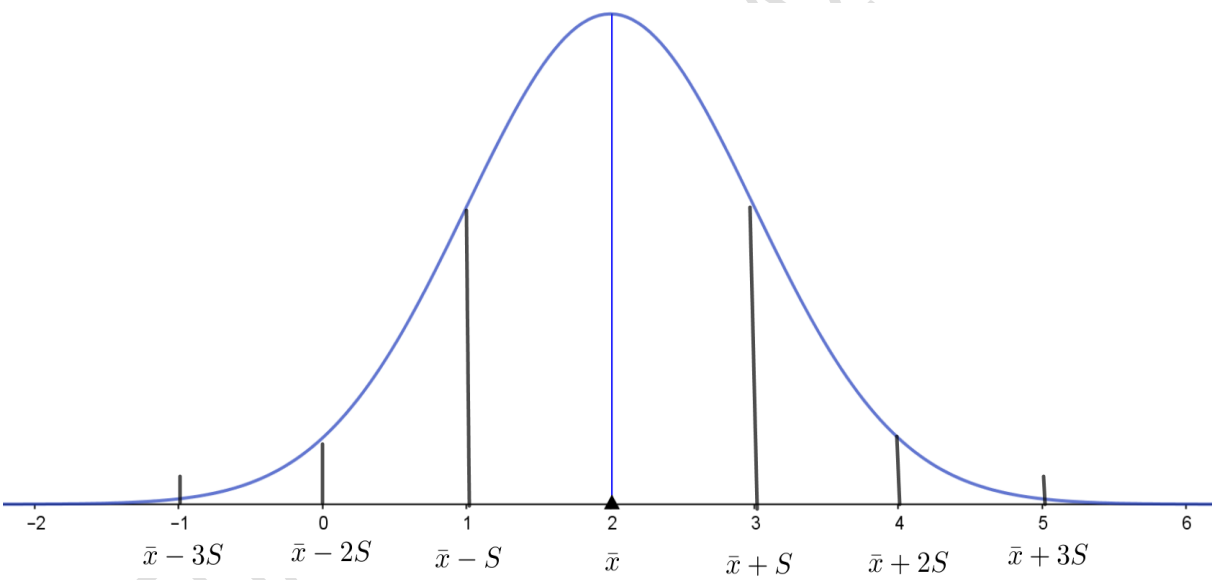
$f'(x) = \bar{x}\cdot x - S = 0 \Leftrightarrow x = \frac{S}{\bar{x}} \Leftrightarrow x = CV = \frac{1}{2}$ Το πρόσημο της f είναι:

χ	-∞	$\frac{1}{2}$	+∞
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗
	τ .ε.		

$f'(x) = \bar{x}\cdot x - S > 0 \Leftrightarrow x > \frac{S}{\bar{x}} = \frac{1}{2}$ $(\delta\iota\acute{o}\tau\iota : S > 0, \bar{x} > 0)$

$f'(x) = \bar{x}\cdot x - S < 0 \Leftrightarrow x < \frac{S}{\bar{x}} = \frac{1}{2}$ Άρα στο χ=$\frac{1}{2}$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(\frac{1}{2})$

Γ.



$\lim_{x\to S} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to S}(\frac{\bar{x}}{2}x^2 - Sx + 1) = 1 \Leftrightarrow \frac{\bar{x}}{2}\lim_{x\to S} x^2 - S\lim_{x\to S} x + \lim_{x\to S} 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{\bar{x}}{2}\cdot S^2 - S\cdot S + 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\bar{x}\cdot S^2 - S^2 = 0$

$\Leftrightarrow S^2(\frac{\bar{x}}{2} - 1) = 0 \Leftrightarrow S^2 = 0$ ή $\frac{\bar{x}}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} S^2 = 0 \\ \bar{x} = 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} S = 0 \\ \bar{x} = 2 \end{Bmatrix}$

Η περίπτωση S=0 απορρίπτεται διότι CV =0,50≠0 οπότε $\bar{x} = 2$ και δεδομένου ότι

$\frac{S}{\bar{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{S}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2S = 2 \Leftrightarrow S = 1$

Δ. Επειδή οι παρατηρήσεις βρίσκονται στο διάστημα (1,5) και δεδομένου ότι $\bar{x} = 2$ και $S = 1$ έχουμε: (1=2-1=$\bar{\chi} - S, 5 = 2 + 3 = 2 + 3\cdot 1 = \bar{x}$ +3S) άρα το ποσοστό των παρατηρήσεων είναι

34%+34%%+13,5%+2,35%=83,85% (ή 68%+$\frac{99,7-68}{2}=83,85\%$) {{{από θεωρία γνωρίζουμε ότι, στο διάστημα $(\bar{\chi}-S,\bar{\chi}-S)$ περιέχεται το 68% , στο διάστημα $(\bar{\chi}+S,\bar{\chi}+2S)$ περιέχεται το $\frac{95\%-68\%}{2}$=13,5% , στο διάστημα $(\bar{\chi}+2S,\bar{\chi}+3S)$ περιέχεται το $\frac{99,7\%-95\%}{2}$=2,35% των παρατηρήσεων }}}

Γνωρίζουμε ότι το εύρος στην κανονική κατανομή είναι R≈6S =6·1=6

! ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ !

25) Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 50% των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20. Το 81,5% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα (16,22) με άκρα του διαστήματος χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής $\bar{X}\pm 3S$, $\bar{X}\pm 2S$, $\bar{X}\pm S$, $\bar{X}$.

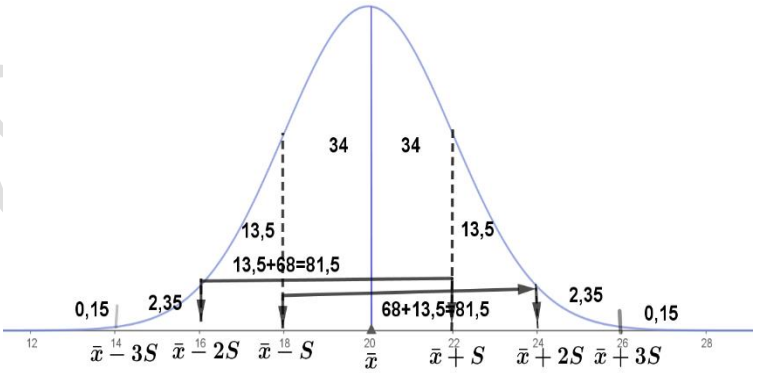
Α) Να δείξετε ότι $\bar{X}=20$ και $S=2$

Β) Να βρείτε το α$\in N^*$, αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $(\bar{X}-\alpha S\,,\bar{X}+\alpha S)$ ανήκει το 95% περίπου των παρατηρήσεων.

Γ) Αν R είναι το εύρος της κατανομής, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=\frac{R}{2}x^2-(\bar{x}+4)x+9S$ (ΓΕΛ επαν.2005)

ΛΥΣΗ

Α) Το 50% των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20 άρα **δ=20** $\begin{cases}\delta=\bar{\chi}\\ \delta=20\end{cases}\Rightarrow \bar{\chi}=20$



Το 81,5% είναι στα διαστήματα $(\bar{X}-2S\,,\bar{X}+S)$ και $(\bar{X}-S\,,\bar{X}+2S)$ Εφόσον δίνεται ότι το 81,5% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα (16,22) θα πρέπει να ισχύει:

$\begin{cases}\bar{X}-2S=16\\ \bar{X}+S=22\\ με\ \ \bar{X}=20\end{cases}$ ή $\begin{cases}\bar{X}-2S=16\\ 20+S=22\\ με\ \ \bar{X}=20\end{cases}$ ή $\begin{cases}\bar{X}-2S=16\\ S=22-20=2\\ με\ \ \bar{X}=20\end{cases}$

ή $\begin{cases}20-2\cdot 2=16\ \ αληθής\\ S=2\\ με\ \ \bar{X}=20\end{cases}$ ή

$\begin{cases}\bar{X}-S=16\\ \bar{X}+2S=22\\ με\ \ \bar{X}=20\end{cases}$ ή $\begin{cases}\bar{X}-S=16\\ 20+2S=22\\ με\ \ \bar{X}=20\end{cases}$ ή $\begin{cases}\bar{X}-S=16\\ 2S=22-20=2\\ με\ \ \bar{X}=20\end{cases}$ ή $\begin{cases}20-1=16\ \ ψευδής\\ S=1\\ με\ \ \bar{X}=20\end{cases}$ οπότε δεκτή η $\mathbf{S=2}$

Β) {{{Από Θεωρία :Στο διάστημα $(\bar{X}-S\,,\bar{X}+S)$ ανήκει το 68% των παρατηρήσεων .

Στο διάστημα $(\bar{X}-2S\,,\bar{X}+2S)$ ανήκει το 95% των παρατηρήσεων .

Στο διάστημα $(\bar{X}-3S\,,\bar{X}+S3)$ ανήκει το 99,7% των παρατηρήσεων . }}}

Επειδή στο διάστημα $(\bar{X}-\alpha S\,,\bar{X}+\alpha S)$ ανήκει το 95% των παρατηρήσεων και το ποσοστό αυτό γνωρίζουμε ότι ανήκει στο διάστημα $(\bar{X}-2S\,,\bar{X}+2S)$ πρέπει το α=2

Γ) Γνωρίζουμε ότι R≈6 *S=6·2=12* και με $\bar{\chi}=20$ *και* $S=2$ η συνάρτηση $f(x)=\frac{R}{2}x^2-(\bar{x}+4)x+9S$ γίνεται: $f(x)=\frac{12}{2}x^2-(20+4)x+9\cdot 2$ *ή* $f(x)=6x^2-24x+18$ οπότε $f'(x)=(6x^2-24x+18)'\Leftrightarrow$

$f'(x) = 12x - 24$ οπότε: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 24 = 0 \Leftrightarrow 12x = 24 \Leftrightarrow x = \frac{24}{12} = 2$,

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 12x - 24 > 0 \Leftrightarrow x > 2$,

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 12x - 24 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f' (x)	–	0	+
f(x)	↘	|	↗
		τ. ε.	

Η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο χ=2

το $f(2) = 6 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 18 = 24 - 48 + 18 =$-6

! ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ !

26) Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής ακολουθούν την κανονική κατανομή. Αν το 2,5% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες του 21 και το 16% μικρότερες του 12 τότε:

ι) Να βρεθούν η μέση τιμή $\bar{\chi}$ και η τυπική απόκλιση S

ιι) Να βρεθεί το εύρος και ο συντελεστής μεταβολής.

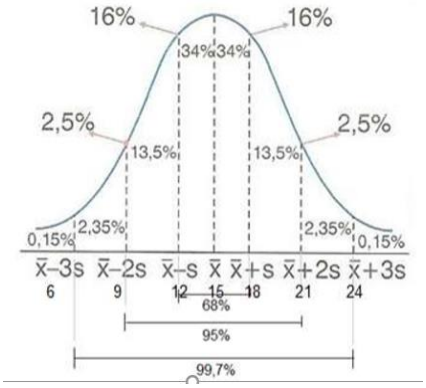
ιιι) Ποιο ποσοστό των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα 9 εως 21:

iv) Αν το μέγεθος του δείγματος είναι 11, να υπολογίσετε το $\sum_{\iota=1}^{\kappa} \chi_\iota^2 \nu_\iota$

Δίνεται:$S^2 = \frac{1}{\nu}\left(\sum_{\iota=1}^{\kappa} \chi_\iota^2 \nu_\iota - \frac{(\sum_{\iota=1}^{\kappa} \chi_\iota \nu_\iota)^2}{\nu}\right)$

ΛΥΣΗ

ι) Αφού το 2,5% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες του 21 και στη γενική μορφή το 2,5% είναι μεγαλύτερες από $\bar{\chi} + 2S$ άρα $\bar{\chi} + 2S = 21$



Αφού το 16% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 12 και στη γενική μορφή το 16% είναι μικρότερες από $\bar{\chi} - S$ άρα $\bar{\chi} - S = 12$

Λύνουμε με μέθοδο αντίθετων συντελεστών το σύστημα $\begin{cases} \bar{\chi} + 2S = 21 \\ \bar{\chi} - S = 12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\chi} + 2S = 21 \\ -\bar{\chi} + S = -12 \end{cases} \Big| \frac{\pi o \lambda \lambda \alpha \pi \lambda \alpha}{\sigma \iota \acute{\alpha} \zeta \omega} \mu \varepsilon -1$ Προσθέτοντας κατά μέλη έχω

3S=9⇔**S=3** και για $S = 3$ η $\bar{x} - S = 12 \Leftrightarrow \bar{x} - 3 = 12 \Leftrightarrow \bar{\boldsymbol{x}} = 12 + 3 =$ **15**

ιι) Γνωρίζουμε ότι R≈6S=6·3=18 CV=$\frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{3}{15} = 0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{20}{100} = 20\% > 10\%$ (ανομοιογενής ,δεν το ζητά η άσκηση)

ιιι) Στο διάστημα (9=15-6=15-2·3=$\bar{x} - 2 \cdot S$, 21=15+6=15+2·3=$\bar{x} + 2S$) ή στο διάστημα ($\bar{\chi} - 2S, \bar{\chi} + 2S$) ανήκει το 95% των παρατηρήσεων (από θεωρία) ή διαφορετικά 13,5%+34%+34%+13,5%=95%

iv) ν=11 και $\bar{x} = 15$ Διαμορφώνουμε τον τύπο : $S^2 = \frac{1}{\nu}\left(\sum_{\iota=1}^{\kappa} \chi_\iota^2 \nu_\iota - \frac{(\sum_{\iota=1}^{\kappa} \chi_\iota \nu_\iota)^2}{\nu}\right) = \frac{1}{\nu}\sum_{\iota=1}^{\kappa} \chi_\iota^2 \nu_\iota - \frac{1}{\nu}\frac{(\sum_{\iota=1}^{\kappa} \chi_\iota \nu_\iota)^2}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{\iota=1}^{\kappa} \chi_\iota^2 \nu_\iota - \frac{(\sum_{\iota=1}^{\kappa} \chi_\iota \nu_\iota)^2}{\nu^2} = \frac{1}{\nu}\sum_{\iota=1}^{\kappa} \chi_\iota^2 \nu_\iota - \left(\frac{\sum_{\iota=1}^{\kappa} \chi_\iota \nu_\iota}{\nu}\right)^2 = \sum_{\iota=1}^{\kappa} \chi_\iota^2 \nu_\iota - \bar{\chi}^2$ οπότε $3^2 = \frac{1}{11}\sum_{\iota=1}^{\kappa} \chi_\iota^2 \nu_\iota - 15^2 \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{11}\sum_{\iota=1}^{\kappa} \chi_\iota^2 \nu_\iota - 225 \Leftrightarrow 9 + 225 = \frac{1}{11}\sum_{\iota=1}^{\kappa} \chi_\iota^2 \nu_\iota$

$\Leftrightarrow \frac{1}{11}\sum_{\iota=1}^{\kappa} \chi_\iota^2 \nu_\iota = 234 \Leftrightarrow \sum_{\iota=1}^{\kappa} \chi_\iota^2 \nu_\iota = 11 \cdot 234 = 2574$

! ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ !

10 ΕΠΙΛΑΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ Α. ΚΑΤΣΑΡΟΣ

27) Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ ακολουθούν την κανονική κατανομή με διάμεσο δ = 8, μέση τιμή $\bar{\chi}$, και τυπική απόκλιση S. Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{x^3}{3} + \bar{x} \cdot \frac{x^2}{2} - 12x + 1$ η οποία παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση χ = S

Α) Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{\chi}$.

Β) Για $\bar{\chi} = 8$, να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατά της και να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση S.

Γ) Για S=2 , αν το πλήθος των παρατηρήσεων που βρίσκονται στα (4,6) . και (8,10) είναι 950 , να βρεθεί το μέγεθος του δείγματος.

Δ) Για ν=2000 , να βρεθεί το πλήθος των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα (10,12)

Ε) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της σταθεράς c > 0, που πρέπει να προσθέσουμε σε καθεμία από τις τιμές της μεταβλητής Χ, ώστε να προκύψει ομοιογενές δείγμα.

ΛΥΣΗ

Α) Γνωρίζουμε ότι: $\begin{cases} \delta = \bar{\chi} \\ \delta = 8 \end{cases} \Rightarrow \bar{\chi} = 8$

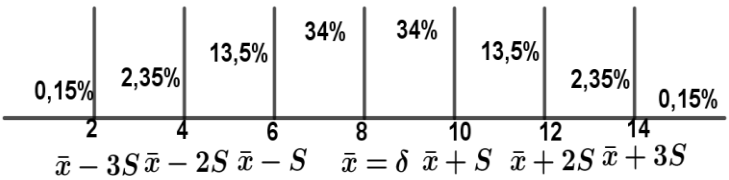
Β) Για $\bar{\chi} = 8$ η συνάρτηση γίνεται: $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} - 12x + 1 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{x^3}{3} + 4\chi^2 - 12x + 1$

$$f'(x) = \left(-\frac{x^3}{3} + 4\chi^2 - 12x + 1\right)' = -\frac{3\chi^2}{3} + 8\chi - 12 = -\chi^2 + 8\chi - 12$$

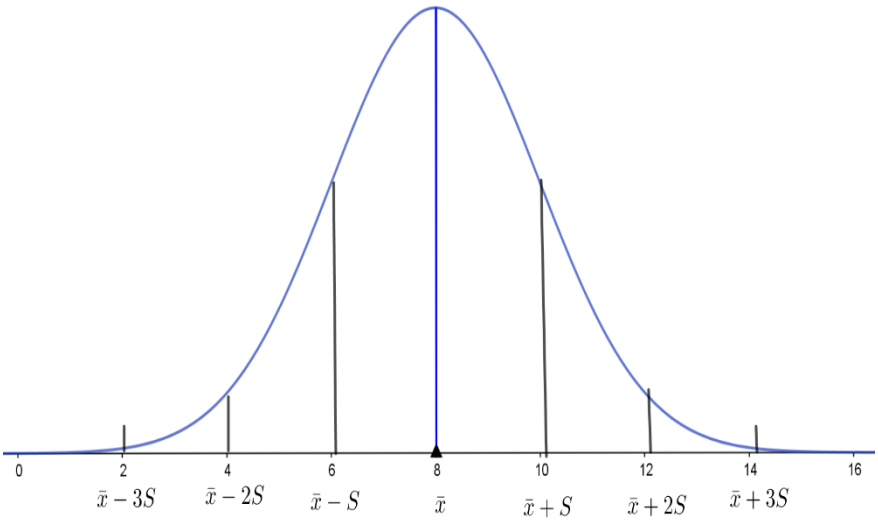
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\chi^2 + 8\chi - 12 = 0 \qquad \Delta = 8^2 - 4 \cdot (-1)(-12) = 64 - 48 = 16 \begin{cases} \chi_1 = \frac{-8+\sqrt{16}}{2(-1)} = 2 \\ \chi_2 = \frac{-8-\sqrt{16}}{2(-1)} = 6 \end{cases}$$

Χ	-∞	2	6	+∞
$f'(x)$	−	+	−	
$f(x)$	↘	↗	↘	
	τ. ε.		τ. μ.	

Επειδή η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση χ=2 άρα **S=2**



Γ) Στο διάστημα (4=8-4=8-2·2=$\bar{\chi} - 2S$, 6=8-2=$\bar{\chi} - S$) το ποσοστό είναι $\frac{95\%-68\%}{2}$=13,5% και στο (8=$\bar{\chi}$, 10=8+2=$\bar{\chi} + S$) το ποσοστό είναι 34% και το ποσοστό συνολικά στα δύο διαστήματα είναι 13,5%+34%=47,5% =$\frac{95\%}{2}$ στο οποίο περιέχονται ν_ι =950 παρατηρήσεις . Έστω ν το μέγεθος του δείγματος τότε $f_i = \frac{\nu_\iota}{\nu} \Leftrightarrow \nu = \frac{\nu_\iota}{f_i} = \frac{950}{0{,}475} = 2000$ παρατηρήσεις.



Δ) Στο διάστημα (10 =8+2=$\bar{\chi} + S$, 12=8+4=8+2·2=$\bar{\chi} + 2S$) το ποσοστό είναι

ΙΩΣΗΦ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ Α. ΚΑΤΣΑΡΟΣ

13,5% και το πλήθος των παρατηρήσεων 13,5%·2000=$\frac{13,5}{100}2000 = 270$ παρατηρήσεις.

Ε) $CV = \frac{2}{8}100\% == 0,25 \cdot 100\% = \frac{25}{100} = 25\%$ Έστω c>0 ο αριθμός που πρέπει να προσθέσουμε σε κάθε τιμή της μεταβλητής τότε οι νέες τιμές θα είναι $y_i = x_i + c$, Η νέα μέση τιμή είναι $\bar{y} = \bar{x} + c$ και η νέα τυπική απόκλιση είναι $S_y = S_x$ Θέλουμε $CV_y \leq 10\% \Leftrightarrow \frac{S_y}{\bar{Y}} \leq 10\% \Leftrightarrow \frac{S_x}{\bar{x}+c} \leq 10\% \Leftrightarrow \frac{2}{8+c} \leq \frac{10}{100} \Leftrightarrow \frac{2}{8+c} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow$

$20 \leq 8 + c \Leftrightarrow 12 \leq c \Leftrightarrow c \geq 12$ Η μικρότερη τιμή είναι $c = 12$

! ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ ≡ ⇝ !

28) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + \kappa x + 4\sqrt{x} + \lambda$, $\chi \geq 0$ για την οποία ισχύει ότι:

- **Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,14)**
- **Η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη χ=1 είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ.**

Α) Να βρείτε την $f'(x)$

Β) Να αποδείξετε ότι κ=2 και λ=10

Γ) Για κ=2 και λ=10, μια μεταβλητή χ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{\chi} = f(1)$ και τυπική απόκλιση $S = \frac{-2f'(4)}{13}$ Τρεις παρατηρήσεις ενός δείγματος μεγέθους ν είναι μικρότερες ή ίσες του 8

ι) Να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

ιι) Να εξετάσετε το δείγμα ως προς την ομοιογένεια .

ΛΥΣΗ

Α) $f'(x) = \left(-2x^2 + \kappa x + 4\sqrt{x} + \lambda\right)' = \left(-2x^2\right)' + (\kappa\chi)' + (4\sqrt{x})' + \lambda' = -4\chi + \kappa + 4\frac{1}{2\sqrt{\chi}} + 0 = -4\chi + \kappa + \frac{2}{\sqrt{\chi}}$

Β) Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,14) άρα ισχύει: $f(1) = 14 \Leftrightarrow f(1) = -2 \cdot 1^2 + \kappa \cdot 1 + 4\sqrt{1} + \lambda = 14 \Leftrightarrow -2 + k + 4 + \lambda = 14 \Leftrightarrow k + 2 + \lambda = 14 \Leftrightarrow$ $k + \lambda = 12$ (1)

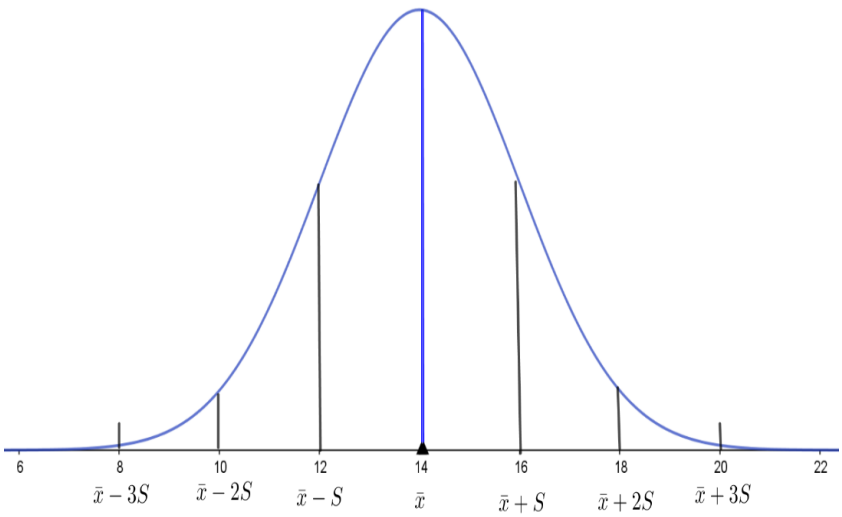
Η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη χ=1 είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ.

Άρα ισχύει $f'(1) = 0$ η πρώτη παράγωγος είναι: $f'(x)$ =-4χ+κ+$\frac{2}{\sqrt{\chi}}$ οπότε: $f'(1) = 0 \Leftrightarrow$ -4·1+κ+$\frac{2}{\sqrt{1}}$ = 0

⇔ - 4+κ+2=0⇔-2+κ=0 ⇔ κ=2 Για κ=2 η σχέση (1) γίνεται: 2+λ=12 ⇔ λ=10

Γ) Για κ=2 και λ=10 η συνάρτηση και η παράγωγος γίνονται: $f(x) = -2x^2 + 2x + 4\sqrt{x} + 10$ **και** $f'(x)$ ==-4χ+2+$\frac{2}{\sqrt{\chi}}$

$f(1) = -2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 4\sqrt{1} + 10 = -2 + 2 + 4 + 10 = 14$ **και** $f'(4) = -4 \cdot 4 + 2 + \frac{2}{\sqrt{4}} = -16 + 2 + \frac{2}{2} = -14 + 1 = -13$ άρα η μέση τιμή είναι: $\bar{\chi} = f(1) = 14$ και η τυπική απόκλιση είναι: $S = \frac{-2f'(4)}{13} = \frac{-2\cdot(-13)}{13} = 2$



10 ΕΠΙΑΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ Α. ΚΑΤΣΑΡΟΣ

i) Οι $\nu_\iota = 3$ παρατηρήσεις ενός δείγματος μεγέθους ν είναι μικρότερες ή ίσες του 8=14-6=14-3·2=$\bar{\chi} - \mathbf{3}\,S$ και το ποσοστό τους είναι $f_i\% = 0{,}15\%$ οπότε: $f_i\% = \frac{\nu_\iota}{\nu}100\% \Leftrightarrow \nu = \frac{\nu_\iota}{f_i\%} = \frac{3}{0{,}15\%} = \frac{3}{\frac{0{,}15}{100}} = \frac{300}{0{,}15} = 2000$

ii) $CV = \frac{S}{|\bar{\chi}|}100\% = \frac{2}{14}100\% = 0{,}1429 \cdot 100\% = 0{,}1429\frac{100}{100} = \frac{14{,}29}{100} = 14{,}29\%$

! ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ !

29) Δίνεται η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = -2x^2 + \kappa x + 4\sqrt{x} + 10}$, $\boldsymbol{\chi \geq 0}$

Α) ι) Αν η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(1, $f(1)$) είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ , να αποδείξετε ότι κ=2 και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μια τυχαία μεταβλητή χ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{\chi} = f(1)$ και τυπική απόκλιση $S = \frac{-2f'(4)}{13}$ Τρεις παρατηρήσεις ενός δείγματος μεγέθους ν είναι μικρότερες ή ίσες του 8.

ιι) Να βρείτε τον αριθμό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα (10,16) .

ιιι) Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παρατηρήσεων που έχει ληφθεί , δεν είναι ομοιογενές. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παραμέτρου α>0, που πρέπει να προστεθεί σε κάθε μια από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των νέων παρατηρήσεων να είναι ομοιογενές.

ΛΥΣΗ

Α) ι) $\boldsymbol{f'(x) = \left(-2x^2 + \kappa x + 4\sqrt{x} + 10\right)' = \left(-2x^2\right)' + (\kappa\chi)' + (4\sqrt{x})'}$+10' =-4χ+κ+4$\frac{1}{2\sqrt{\chi}}$ + 0=-4χ+κ+$\frac{2}{\sqrt{\chi}}$

Γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης στο σημείο **Α(1, $f(1)$)** είναι ίσος με $\boldsymbol{f'(1)} = -4$·1+κ+4$\frac{1}{2\sqrt{1}} = -4 + \kappa + \frac{4}{2} = -4 + \kappa + 2 = \kappa - 2$

Επειδή η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ ο συντελεστής διεύθυνσης ισούται με μηδέν.

$\boldsymbol{f'(1) = \kappa - 2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 2}$

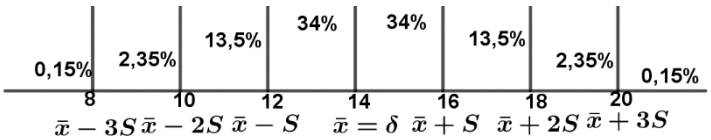
Για κ=2 η συνάρτηση γίνεται $f(x) = -2x^2 + 2x + 4\sqrt{x} + 10$ οπότε $\boldsymbol{f(1) = -2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 4\sqrt{1} + 10 = -2 + 2 + 4 + 10 = 14}$ **και** το σημείο επαφής είναι Α(1,14)

Έστω ψ = αχ + β η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται της γραφικής παράστασης στο Α(1,14) και είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ οπότε ισχύει ότι α=$f'(1) = 0$ και η εξίσωση γίνεται : ψ= 0χ + β ή ψ=β

Το σημείο Α(1,14) ως κοινό σημείο επαληθεύει και την εξίσωση της ευθείας άρα ισχύει: 14=0·1+β⇔β=14 και η εξίσωση είναι ψ=14

ιι) $\bar{\chi} = f(1) = 14$ και και $f'(4) = -4 \cdot 4 + 2 + \frac{2}{\sqrt{4}} = -16 + 2 + \frac{2}{2} = -14 + 1 = -13$

άρα $S = \frac{-2f'(4)}{13} = \frac{-2\cdot(-13)}{13} = 2$



$\nu_\iota = 3$ παρατηρήσεις ενός δείγματος μεγέθους ν είναι μικρότερες ή ίσες του 8=14-6=14-3·2=$\bar{\chi} - \mathbf{3}\,S$ και το ποσοστό τους είναι $f_i\% = 0{,}15\%$ οπότε $f_i\% = \frac{\nu_\iota}{\nu}100\% \Leftrightarrow \nu = \frac{\nu_\iota}{f_i\%} = \frac{3}{0{,}15\%} = \frac{3}{\frac{0{,}15}{100}} = \frac{300}{0{,}15} = 2000$

Το ποσοστό στο διάστημα (10=14-4=14-2·2= $\bar{\chi} - \mathbf{2}\,S$, 16=14+2=$\bar{\chi} + S$) είναι $f_i\%$ =13,5%+34%+34%=81,5% (ή 68%+$\frac{95\%-68\%}{2} = 81{,}5\%$)

Για f_i=0,815 και ν=2000 έχουμε: $f_i = \frac{\nu_\iota}{\nu} \Leftrightarrow \nu_\iota = \nu \cdot f_i = 2000 \cdot 0{,}815 = 1630$

10 ΕΠΑΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ Α. ΚΑΤΣΑΡΟΣ

ιii) $CV = \frac{S}{|\bar{x}|}100\% = \frac{2}{14}100\% = 0{,}1429 \cdot 100\% = 0{,}1429\frac{100}{100} = \frac{14{,}29}{100} = 14{,}29\%$ >10% και το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Έστω α> 0 ο αριθμός που πρέπει να προσθέσουμε σε κάθε τιμή της μεταβλητής . Τότε οι νέες τιμές θα είναι $y_i = x_i + \alpha$. Σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή η νέα μέση τιμή είναι $\bar{y} = \bar{x} + \alpha$ και η νέα τυπική απόκλιση είναι $S_y = S_x$. Θέλουμε $CV_y \leq 10\% \Leftrightarrow \frac{S_y}{\bar{Y}} \leq 10\% \Leftrightarrow \frac{S_x}{\bar{x}+\alpha} \leq 10\% \Leftrightarrow \frac{2}{14+\alpha} \leq \frac{10}{100} \Leftrightarrow \frac{2}{14+\alpha} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow 20 \leq 14 + \alpha \Leftrightarrow 6 \leq \alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 6$ Η μικρότερη τιμή είναι $\alpha = 6$

! ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ !

30) Έστω $\bar{\chi}$, S η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση ενός δείγματος 4000 παρατηρήσεων που ακολουθούν κανονική κατανομή. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + (\bar{x} - 3)x^2 + S + 1$, $x \in \mathbb{R}$ για την οποία είναι γνωστό ότι η εφαπτομένη της στο M(1, $f(1)$) είναι η ευθεία ψ=3χ+1 .

Α) Να υπολογισθούν $\bar{\chi}$, S , δ , R , CV.

Β) Πόσες παρατηρήσεις έχουν τιμή α) τουλάχιστον 5 β) το πολύ 4.

Γ) Ποια η τιμή της θετικής σταθεράς c που πρέπει να προστεθεί σε κάθε μια από τις 4000 παρατηρήσεις ώστε:

Ι) Το δείγμα να γίνει οριακά ομογενές.

ιι) Να υποδιπλασιαστεί ο συντελεστής μεταβολής.

Δ) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης f .

ΛΥΣΗ

Α) Επειδή η ευθεία ψ=3χ-1 είναι εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M(1, $f(1)$) ισχύει:

$f'(1) = 3$ οπότε: $f'(x) = \left(-x^3 + (\bar{x} - 3)x^2 + S + 1\right)' = \left(-x^3\right)' + \left((\bar{x} - 3)x^2\right)' + S' + 1' = -3\chi^2 + 2(\bar{x} - 3) \cdot \chi + 0 + 0 = -3\chi^2 + 2(\bar{x} - 3)\chi$ άρα $f'(1) = 3 \Leftrightarrow -3 \cdot 1^2 + 2(\bar{x} - 3)1 = 3 \Leftrightarrow -3 + 2\bar{x} - 6 = 3$

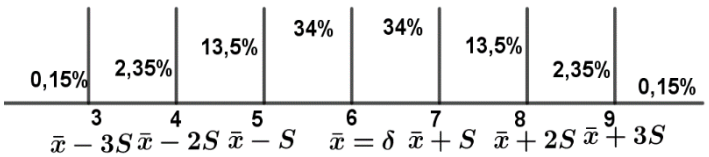
$\Leftrightarrow -9 + 2\bar{x} = 3 \Leftrightarrow 2\bar{x} = 3 + 9 \Leftrightarrow 2\bar{x} = 12 \Leftrightarrow \bar{x} = 6$

{{{σχόλιο: Η σχέση του συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ψ=3χ+1 που εφάπτεται του γραφήματος στο σημείο M(1, $f(1)$) και της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης στο σημείο επαφής , μας επέτρεψε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή. Πως θα υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση αφού η άσκηση δεν μας δίνει άλλο στοιχείο; Θα σκεφτούμε τι άλλο δεν αξιοποιήσαμε για την εφαπτόμενη. Δεν αξιοποιήσαμε το ότι το σημείο M(χ=1 , ψ= $f(1)$) είναι κοινό σημείο άρα επαληθεύει και την εξίσωση της ευθείας.**}}}**

Το σημείο M(χ=1 , ψ= $f(1)$) είναι κοινό σημείο άρα επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας ψ=3χ+1 άρα ισχύει: $f(1)$=3·1+1=3+1=4 άρα και για $\bar{x} = 6$ έχουμε $f(1) = -1^3 + (6 - 3)1 + S + 1 = 4 \Leftrightarrow -1 + 3 + S + 1 = 4 \Leftrightarrow S = 4 - 3 \Leftrightarrow S = 1$

Ακόμη : $\begin{cases} \bar{x} = \delta \\ \bar{x} = 6 \end{cases}$ ⇒**δ = 6** , **R ≅ 6·S = 6·1 = 6**

, $CV = \frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{1}{6} = 0{,}1667 = \frac{16{,}67}{100} = 16{,}67\%$

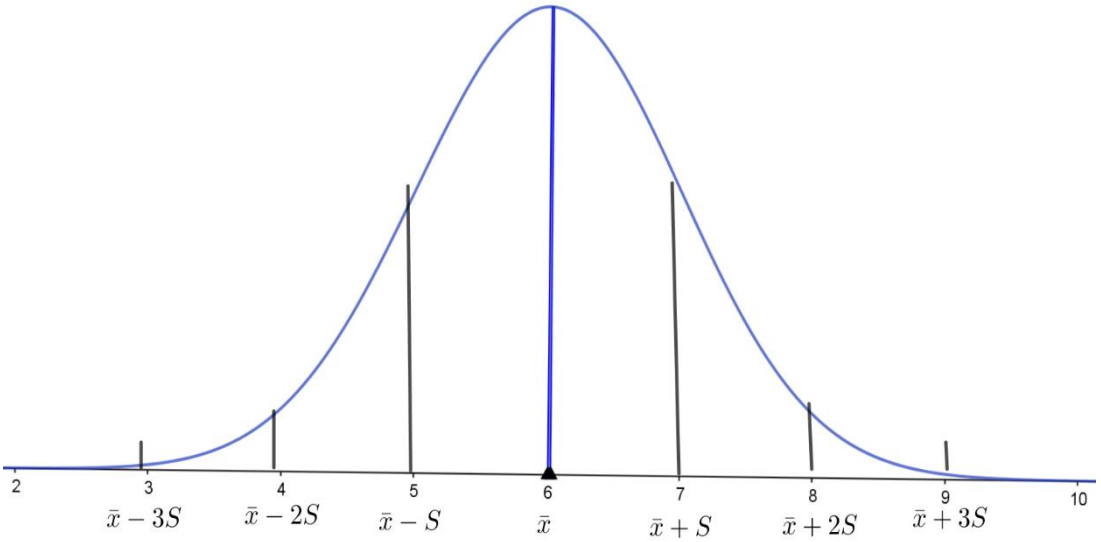


Β) α) Το ποσοστό των παρατηρήσεων που έχουν τιμή τουλάχιστον 5=6-1=$\bar{x} - S$ είναι:

$f_i\%$ =34%+34%+13,5%+2,35%+0,15%=84% (ή **100%-**$\frac{100\% - 68\%}{2} = 84\%$) το ν =4000 οπότε για το πλήθος των παρατηρήσεων τουλάχιστον $\bar{x} - S$ έχουμε: $f_i = \frac{\nu_\iota}{\nu} \Leftrightarrow \nu_\iota = \nu \cdot f_i \Leftrightarrow \nu_\iota = 4000 \cdot 0{,}84 = 3360$ παρατηρήσεις.

Ιο ΕΠΑΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ Α. ΚΑΤΣΑΡΟΣ

β) Το ποσοστό των παρατηρήσεων που έχουν τιμή το πολύ 4=6-2=6-2·1=$\bar{\boldsymbol{x}} - \mathbf{2}\boldsymbol{S}$ είναι:



$f_i\%$ =0,15+2,35%=2,5% (ή $\frac{\mathbf{100\%-95\%}}{\mathbf{2}} = \mathbf{2,5\%}$) το ν=4000 οπότε για το πλήθος των παρατηρήσεων το πολύ $\bar{\boldsymbol{x}} - \mathbf{2}\boldsymbol{S}$ έχουμε:

$f_i = \frac{\nu_\iota}{\nu} \Leftrightarrow \nu_\iota = \nu \cdot f_i \Leftrightarrow \nu_\iota = 4000 \cdot 0{,}025 = 100$ παρατηρήσεις.

! ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ !

31) Οι αριθμοί α, β, 17 , γ έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά και είναι οι βαθμοί ενός μαθητή σε τέσσερα διαγωνίσματα. Δίνεται ότι το εύρος των βαθμών είναι 2, η διάμεσος και η μέση τιμή 16. Α) Να βρείτε τους βαθμούς του μαθητή. Β) Αν οι συντελεστές βαρύτητας των βαθμών είναι 0,5 0,7 1 και 0,8 αντίστοιχα να βρείτε το μέσο όρο των βαθμών του μαθητή.

ΛΥΣΗ

Επειδή οι αριθμοί α , β , 17 , γ είναι διατεταγμένοι κατά αύξουσα σειρά θα ισχύουν οι σχέσεις: εύρος

R = γ – α = 2 (1) η διάμεσος (επειδή το πλήθος είναι άρτιο) είναι $\delta = \frac{\beta+17}{2} = 16$ (2) και η μέση τιμή $\bar{\chi} = \frac{\alpha+\beta+17+\gamma}{4} = 16$ (3) Από τη (2) έχουμε: $\frac{\beta+17}{2} = 16 \Leftrightarrow \beta + 17 = 32 \Leftrightarrow \beta = 32 - 17 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = 15}$ Οπότε η σχέση (3) γίνεται: $\frac{\alpha+15+17+\gamma}{4} = 16 \Leftrightarrow \frac{\alpha+32+\gamma}{4} = 16 \Leftrightarrow \alpha + \gamma + 32 = 64 \Leftrightarrow \alpha + \gamma = 64 - 32 \Leftrightarrow \alpha + \gamma = 32$ (5)

Λύνουμε το σύστημα των(1) και (5)

$$\begin{pmatrix} \gamma - \alpha = 2 \\ \gamma + \alpha = 32 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{προσθέτω} \\ \text{κατά μέλη}}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} \gamma - \alpha = 2 \\ 2\gamma = 34 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \gamma - \alpha = 2 \\ \gamma = 17 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 17 - \alpha = 2 \\ \gamma = 17 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\alpha = 2 - 17 \\ \gamma = 17 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\alpha = -5 \\ \gamma = 17 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha = 15 \\ \gamma = 17 \end{pmatrix}$$

άρα α=15, β=15, γ=17 Ο σταθμικός μέσος είναι:

$$\bar{\chi}_{\text{w}} = \frac{\sum_{\iota=1}^{\nu} \chi_\iota w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i} \Leftrightarrow \bar{\chi}_{\text{w}} = \frac{15 \cdot 0{,}5 + 15 \cdot 0{,}7 + 17 \cdot 1 + 17 \cdot 0{,}8}{0{,}5 + 0{,}7 + 1 + 0{,}8} = \frac{7{,}5 + 10{,}5 + 17 + 13{,}6}{3} = \frac{48{,}6}{3} = 16{,}2$$

! ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ !

32) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $\boldsymbol{f(x) = x^3 - Sx^2 + 2x + \bar{x}}$, όπου $\bar{\boldsymbol{x}}$ η μέση τιμή και S η τυπική απόκλιση ενός δείγματος ν παρατηρήσεων μιας μεταβλητής Χ. Αν στο σημείο Μ(1,5) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ η εφαπτομένη σχηματίζει γωνία $\mathbf{45^0}$ με τον άξονα χχ΄:

Α) Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{\boldsymbol{x}}$ και την τυπική απόκλιση S του δείγματος.

Β) Αν $\bar{\boldsymbol{x}}$ = 4 και S=2 , τότε : ι) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές .

ιι) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της παραγώγου της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ $\boldsymbol{\sigma\tau o\ \chi_0 = 1}$ (ΓΕΛ2007)

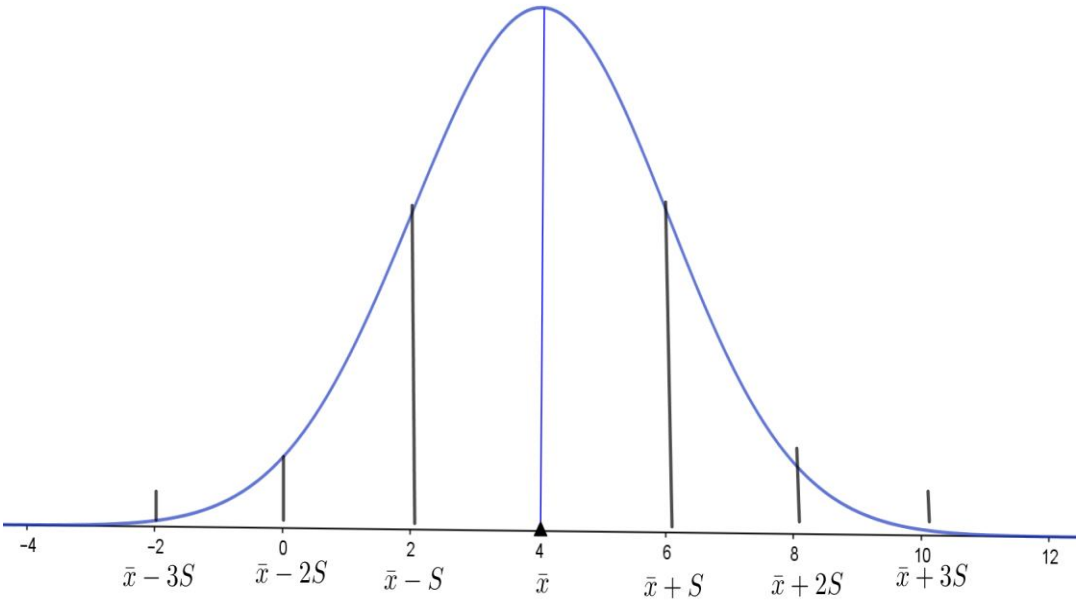
ΙΩΕΠΑΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ Α. ΚΑΤΣΑΙ

ΛΥΣΗ

Α) Γνωρίζουμε ότι για την εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης στο σημείο Μ(1,5) ισχύει ότι

$f'(1) = \varepsilon\varphi 45^0 = 1$

άρα



$f'(\chi) = 3\chi^2 - 2S\chi + 2 \quad \textit{οπότε} \quad f'(1) = 3\cdot 1^2 - 2S\cdot 1 + 2 = 1 \Leftrightarrow 3 - 2S + 2 = 1 \Leftrightarrow S = 2$

Επειδή το σημείο Μ(1,5) είναι σημείο της γραφικής παράστασης ισχύει f(1)=5 συνεπώς

$f(1) = 1^3 - S\cdot 1^2 + 2\cdot 1 + \bar{x} = 5$ και για S=2 έχουμε 1-2+2+$\bar{\chi}$ = 5 άρα $\bar{\chi}$=4

Β) i) $CV = \dfrac{S}{|\bar{x}|} = \dfrac{2}{4}100\% = 50\% > 10\%$ άρα ανομοιογενές

ii) Για $\bar{\chi}$=4 και S=2

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 4 \quad \textit{και} \quad f'(x) = 3x^2 - 4x + 2 \ \textit{άρα} \qquad f'(1) = 3\cdot 1^2 - 4\cdot 1 + 2 = 1$

! ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ !

33) Έστω δείγμα 4000 παρατηρήσεων που ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{\chi}$ > 0 , τυπική απόκλιση S > 0 και συντελεστή μεταβολής CV=20%.

Έστω η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = 4x^3 - 12\sqrt{S}\cdot x^2 + 3\bar{x}\cdot x} \quad , \quad \boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$

Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

Β) Αν 100 παρατηρήσεις έχουν τιμή τουλάχιστον 21 να βρεθούν $\bar{\chi}$, S , R , δ .

Γ) Ποιο το πλήθος των παρατηρήσεων με τιμή το πολύ 12;

Δ) Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε μία παρατήρηση με μια θετική σταθερά c και έπειτα προσθέσουμε το 12 ο νέος συντελεστής μεταβολής γίνεται ίσος με $\frac{1}{7}$. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c.

ΛΥΣΗ

Α) Για τη μονοτονία βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο ,τις ρίζες της και το πρόσημό της κ.λ.π.(ευκολάκι!!!)

$\boldsymbol{f'(x) = \left(4x^3 - 12\sqrt{S}\cdot x^2 + 3\bar{x}\cdot x\right)' = 12\chi^2 - 24\sqrt{S}\cdot x + 3\bar{x}}$

$\boldsymbol{f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12\chi^2 - 24\sqrt{S}\cdot x + 3\bar{x} = 0}$ Η διακρίνουσα είναι:

$\boldsymbol{\Delta} = (-24\sqrt{S})^2 - 4\cdot 12\cdot 3\bar{x} = (-24)^2(\sqrt{S})^2 - 144\bar{x} = \boldsymbol{576\cdot S - 144\cdot \bar{x}}$ **(1)**

{{{σχόλιο: Και τώρα τι κάνουμε με δύο αγνώστους; Ότι πρέπει να κάνουμε κάθε φορά. Ξαναδιαβάζουμε την άσκηση να δούμε τι πληροφορίες μας δίνει και μπορούμε να αξιοποιήσουμε σε συνδυασμό με τη θεωρία που ισχύει για αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε. Μια συνάρτηση δεν έχει ακρότατα αν διατηρεί σταθερό πρόσημο σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της. Βλέπω ότι η πρώτη παράγωγος είναι τριώνυμο δευτέρου βαθμού. Γνωρίζουμε ότι αν Δ<0 τότε δεν έχει ρίζες το τριώνυμο και είναι ομόσημο του συντελεστή του χ^2 . Επειδή η διακρίνουσα έχει δύο μεταβλητές, χρησιμοποιώ τον συντελεστή μεταβολής για να αντικαταστήσω τη μία μεταβλητή συναρτήσει της άλλης. Μας δίνει $\bar{\chi} > 0$, S > 0 , CV=20%.}}}

Γνωρίζουμε ότι $CV = \frac{S}{\bar{x}} = 20\% \Leftrightarrow S = 20\% \cdot \bar{x} \Leftrightarrow S = 0{,}2\bar{x}$ **(2)** Αντικαθιστούμε το S με $0{,}2\bar{x}$ στην (1) και έχουμε: Δ=$576 \cdot 0{,}2\bar{x} - 144\bar{x} = 576 \cdot 0{,}2\bar{x} - 144\bar{x} = 115{,}2\bar{x} - 144\bar{x} = -28{,}8\bar{x} < 0$ αφού $\bar{\chi} > 0$. Άρα το τριώνυμο είναι ομόσημο του α =12 > 0 Για κάθε χ∈ℝ ισχύει $\boldsymbol{f'(x) = 12\chi^2 - 24\sqrt{S} \cdot x + 3\bar{x} > 0}$ και η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, συνεπώς δεν έχει ακρότατα.

Β) Το ποσοστό των 100 παρατηρήσεων είναι $f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu}100\% = \frac{100}{4000}100\% = \frac{100}{4000}\frac{100}{100} = 0{,}025\frac{100}{100} = \frac{2{,}5}{100} = 2{,}5\%$

Το **2,5%** έχει τιμή τουλάχιστον 21 Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι το 2.5% έχει τιμή τουλάχιστον $\bar{x} + 2S$ άρα

$\bar{x} + 2S$ =21 Αντικαθιστώ το S από τη σχέση (2) οπότε έχουμε: $\bar{x} + 2 \cdot 0{,}2\bar{x}$ =21 $\Leftrightarrow$ $\bar{x} + 0{,}4\bar{x}$ =21⇔$1{,}4\bar{x}$ =21⇔

$\boldsymbol{\bar{x}} = \frac{21}{1{,}4}$=**15** $\begin{cases} \bar{x} = \delta \\ \bar{x} = 15 \end{cases} \Rightarrow$ δ=15 και από ισότητα (2) S=0,2 $\bar{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{S} = 0{,}2 \cdot 15 = \boldsymbol{3}$ και R≅6·S=6·3=18

Γ) Το ποσοστό των παρατηρήσεων με τιμή το πολύ 12 =15-3=$\bar{x} - S$ είναι 0,15%+2,35%+13,5%=16% (ή $\frac{\mathbf{100\%-68\%}}{\mathbf{2}} = \mathbf{16}\%$) και συνεπώς το πλήθος των παρατηρήσεων με τιμή το πολύ 12 είναι 16%·4000=$\frac{16}{100}4000 = 640$

Δ) Αν z_i είναι οι νέες τιμές θα ισχύει: $z_i = cx_i + 12$ τότε σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή (εφαρμογή 3 σελ 99 βιβλίου) η νέα μέση τιμή και η νέα τυπική απόκλιση θα είναι: $\bar{z} = c\bar{x} + 12$ και $S_z = |c|S_x = c\,S_x$ $(c > 0)$ Ο νέος συντελεστής μεταβολής είναι: $CV_z = \frac{S_z}{\bar{z}} = \frac{c\,S_x}{c\bar{x}+12} = \frac{1}{7}$ με $\bar{x}$ =15 και $S = 3$ η σχέση γίνεται:

$\frac{c \cdot 3}{c \cdot 15+12} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow 21c = 15c + 12 \Leftrightarrow 21c - 15c = 12 \Leftrightarrow 6c = 12 \Leftrightarrow c = 2$

! ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ ≡ ↬ !

34) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + (S-2) \cdot \chi + \bar{x} - 20$, $x \in \mathbb{R}$ όπου $\bar{x}$ και S η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα ενός δείγματος ν παρατηρήσεων που ακολουθούν κανονική κατανομή. Αν είναι γνωστό ότι στο σημείο M(1, $f(1)$) η C_f έχει εφαπτόμενη την ευθεία (ε) με εξίσωση ψ=3χ-1:

ι) Να βρεθούν οι τιμές των μεγεθών: $\bar{x}$, δ , S , R , CV

ιι) Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι 6 παρατηρήσεις του δείγματος είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 29, πόσες παρατηρήσεις βρίσκονται στο διάστημα (14,17);

ιιι) Έστω μια νέα μεταβλητή Υ για τις τιμές της οποίας ισχύει: $y_i = 2x_i + c$, $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ και $c > 0$ (σταθερά)

Αν $CV_y = 20\%$ να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c.

ΛΥΣΗ

i) Το σημείο **M (1, $f(1)$)** είναι κοινό σημείο **της ευθείας και του γραφήματος άρα για χ=1 , ψ=3·1-1=3-1=2**

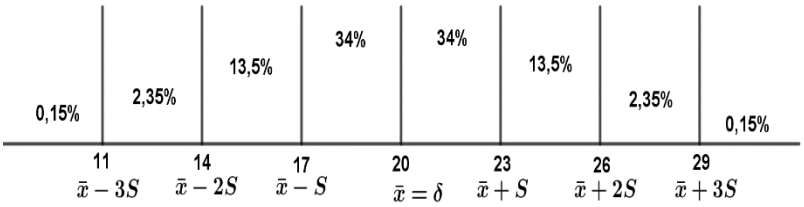
Οπότε το σημείο είναι M(1,2) οπότε ισχύει: $f(1) = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{f(1) = 1^2 + (S-2) \cdot 1 + \bar{x} - 20 = 2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\bar{x} + S + 1 - 2 - 20 = 2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\bar{x} + S = 23}$ **(1)** η $f'(\chi)$ =$(\boldsymbol{x^2 + (S-2) \cdot \chi + \bar{x} - 20})'$=$2x + S - 2$

Ιο ΕΠΑΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ Α. ΚΑΤΣΑΡΟΣ

Επειδή η ευθεία ψ=3χ-1 εφάπτεται της γραφικής παράστασης στο σημείο Μ(1,2) ισχύει: $f'(1) = 3 \Leftrightarrow$

2·1+S-2=3⇔S=3 και για **S=3** η σχέση (1) γίνεται: $\bar{x} + 3 = 23 \Leftrightarrow \bar{x} = 23 - 3 = 20$ **= δ** Ακόμη **R≅ 6·S=6·3=18**

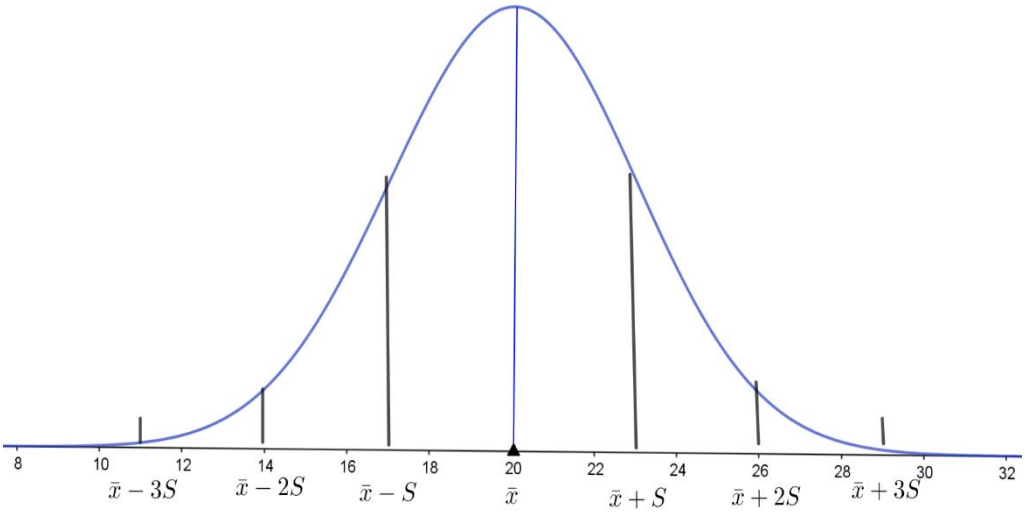
και $CV = \frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{3}{20} = 0{,}15 = \frac{15}{100} = 15\%$



ii) ν_ι = 6 παρατηρήσεις είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 29=20+9=20+3·3=$\bar{x} + 3S$ και το ποσοστό πάνω από $\bar{x} + 3S$ είναι 0,15% .
Αν ν είναι το μέγεθος του δείγματος τότε :

$f_i = \frac{\nu_\iota}{\nu} \Leftrightarrow \nu = \frac{\nu_\iota}{f_i} \Leftrightarrow \nu = \frac{6}{0{,}15\%} = \frac{6}{\frac{0{,}15}{100}} = \frac{600}{0{,}15} = \frac{600}{\frac{15}{100}} = \frac{60000}{15} = 4000$ Υπολογίζουμε το ποσοστό των παρατηρήσεων του διαστήματος (14=20-6=20-2·3=$\bar{x} - 2S$, 17=20-3=$\bar{x} - S$) που είναι : $\frac{95\%-68\%}{2}$**=13,5%**
άρα στο διάστημα (14,17) περιέχονται : 13,5%·4000=$\frac{13{,}5}{100}4000 = 540$ παρατηρήσεις.

ιιι) Η μέση τιμή της μεταβλητής Υ για τις τιμές της οποίας ισχύει: $y_i = 2x_i + c$ είναι $\bar{y} = 2\bar{x} + c$
=2·20+c=40+c και η νέα τυπική απόκλιση $S_y = 2S_x = 2 \cdot 3 = 6$ οπότε:
$CV_y = \frac{S_y}{\bar{y}} \Leftrightarrow CV_y = \frac{2S_x}{2\bar{x}+c} \Leftrightarrow$
$20\% = \frac{6}{40+c} \Leftrightarrow \frac{20}{100} = \frac{6}{40+c}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{6}{40+c} \Leftrightarrow 40 + c = 30 \Leftrightarrow$
c=30-40=-10



! ↜ ≡ ↜ ≡ ↜ ≡ ↜ ≡ ↜ ≡ ↜ ≡ ↜ ≡ ↜ ≡ ↜ ≡ ↜ ≡ ↜ !

35) Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = \bar{x} \cdot t^2 + 10S \cdot t + 2$, $t \in \mathbb{R}$ όπου $\bar{x} > 0$ και S είναι αντίστοιχα η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση ενός δείγματος τιμών χ_1 , χ_2 , … , χ_ν το οποίο ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Α) Αν το σημείο Μ(-1,2) ανήκει στη γραφική παράσταση της f να εξεταστεί αν το δείγμα τιμών είναι ομοιογενές.

Β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ) Να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αν είναι γνωστό ότι το 16% των τιμών του δείγματος έχουν τιμή τουλάχιστον 22.

Δ) Αν $\bar{x} = 20$ και S=2 να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο Μ(-1,2).

Ε) Αν τα σημεία $A_1(\chi_1, \psi_1)$, $A_2(\chi_2, \psi_2)$, … , $A_\nu(\chi_\nu, \psi_\nu)$ ανήκουν στην παραπάνω ευθεία (ε) να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{\psi}$ και η τυπική απόκλιση S_ψ των τεταγμένων των σημείων.

ΛΥΣΗ

Α) {{{σχόλιο: Δουλεύοντας με την ισότητα που προκύπτει από το δεδομένο ΄΄ Το σημείο Μ(-1,2) ανήκει στη γραφική παράσταση της f προσπαθούμε να κατασκευάσουμε το λόγο του συντελεστή μεταβολής.**}}}**

Το σημείο Μ(-1,2) ανήκει στη γραφική παράσταση της f άρα ισχύει : $\boldsymbol{f(-1)=2} \Leftrightarrow$

$$\boldsymbol{f(-1)=\bar{x}\cdot(-1)^2+10S\cdot(-1)+2=2 \Leftrightarrow \bar{x}-10S+2=2 \Leftrightarrow \bar{x}-10S=0 \Leftrightarrow \bar{x}=10S \Leftrightarrow \frac{\bar{x}}{10\bar{x}}=\frac{10S}{10\bar{x}} \Leftrightarrow}$$

$\frac{1}{10}=\frac{S}{\bar{x}} \Leftrightarrow \boldsymbol{CV}=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{1}{10}=\frac{10}{100}=10\%$ οριακά ομοιογενές.

Β) Μηδενίζουμε την πρώτη παράγωγο ,βρίσκουμε τις ρίζες αν υπάρχουν και τα διαστήματα στα οποία η πρώτη παράγωγος είναι θετική ή αρνητική.

$$\boldsymbol{f'(t)=\left(\bar{x}\cdot t^2+10S\cdot t+2\right)'=\left(\bar{x}\cdot t^2\right)'+(10S\cdot t)'+2'=2\bar{x}\cdot t+10S+0=2\bar{x}\cdot t+10S=0 \Leftrightarrow}$$

$\boldsymbol{2\bar{x}\cdot t=-10S \Leftrightarrow \frac{2\bar{x}\cdot t}{2\bar{x}}=\frac{-10S}{2\bar{x}} \Leftrightarrow t=\frac{-10}{2}\frac{S}{\bar{x}} \Leftrightarrow t=-5\frac{S}{\bar{x}}}$ **(1)** Από το προηγούμενο ερώτημα αποδείξαμε ότι $\frac{S}{\bar{x}}=\frac{1}{10}$ και αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε: $\boldsymbol{t=-5\frac{1}{10}=-\frac{5}{10}=-\frac{1}{2}}$

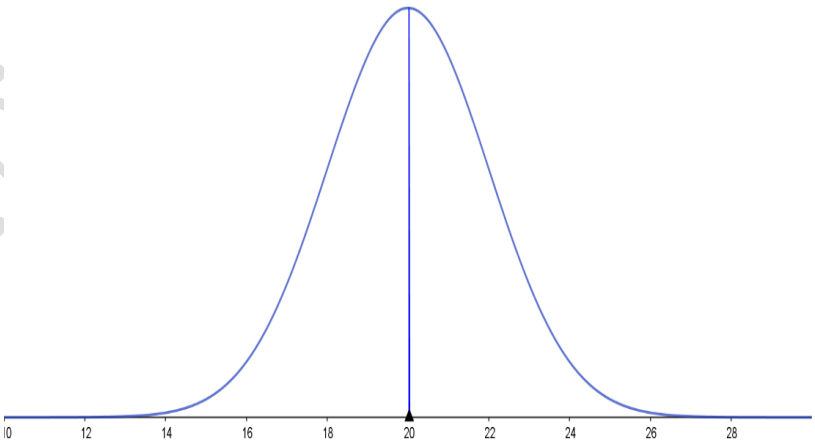
χ	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	↗		↘
	τ. μ.		

Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-\frac{1}{2}]$

Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\frac{1}{2},+\infty)$

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο t=$-\frac{1}{2}$ το $\boldsymbol{f\left(-\frac{1}{2}\right)=\bar{x}\cdot(-\frac{1}{2})^2+10S\cdot(-\frac{1}{2})+2=\frac{\bar{x}}{4}-5S+2}$

Γ) Δίνεται ότι το 16% των τιμών του δείγματος έχουν τιμή τουλάχιστον 22. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι : 16% των τιμών του δείγματος έχουν τιμή τουλάχιστον $\bar{x}+S$ άρα $\bar{x}+S$ =22 (2) Στο πρώτο ερώτημα αποδείξαμε ότι: $\boldsymbol{\frac{S}{\bar{x}}=\frac{1}{10} \Leftrightarrow 10S=\bar{x}}$ **(3)** Αντικαθιστούμε στη σχέση (2) και $10S+S$ =22 ⇔11S=22 ⇔S=$\frac{22}{11}=2$ και από την (3) παίρνουμε: $\boldsymbol{\bar{x}=10S=10\cdot 2=20}$ **{{{**σχόλιο: Τα ίδια αποτελέσματα θα είχαμε αν η έκφραση ήταν '' το 16% έχουν τιμή το πολύ 18 ''τότε θα είχαμε: $\bar{x}-S$ =18 , $\bar{x}=10S$ άρα $10S-S=18 \Leftrightarrow 9S=18 \Leftrightarrow S=2$ **}}}**



Δ) Έστω ψ = αχ +β η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $\boldsymbol{f}$ στο σημείο Μ(-1,2) . Τότε ισχύει α = $f'(-1)=2\bar{x}\cdot(-1)+10S$ και για S= 2 και $\bar{x}=20$ παίρνουμε: α = $f'(-1)=2\cdot 20\cdot(-1)+10\cdot 2=-40+20=-20$ άρα η εξίσωση γίνεται: ψ = -20χ + β Οι συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ(-1,2) επαληθεύουν ,επειδή είναι κοινό σημείο και την εξίσωση της ευθείας ,άρα ισχύει: 2 = -20(-1)+β⇔2=20+β⇔β=2-20=-18 και η εξίσωση της ευθείας είναι: **ψ = -20χ – 18** .

Ε) Για κάθε ένα από τα σημεία $\boldsymbol{A_1(\chi_1,\psi_1)}$, $\boldsymbol{A_2(\chi_2,\psi_2)}$, … , $\boldsymbol{A_\nu(\chi_\nu,\psi_\nu)}$,επειδή είναι σημεία της ευθείας **ψ = -20χ – 18** επαληθεύουν την εξίσωσή της Δηλαδή θα ισχύουν οι σχέσεις:

$\psi_1=-20\chi_1-18$,$\psi_2=-20\chi_2-18$, … , $\psi_\nu=-20\chi_\nu-18$ ή $\psi_\iota=-20\chi_\iota-18$ με ι=1,2,3, .. ,ν δηλαδή οι τεταγμένες προκύπτουν από τις τιμές των τετμημένων αν κάθε μία πολλαπλασιαστεί με -20 και σε αυτό προσθέσουμε το -18. Και αν $\bar{\chi}=\frac{\chi_1+\chi_2+\ \dots\ +\chi_\nu}{\nu}$ είναι η μέση τιμή των τετμημένων και

$S_x = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\quad ...\ +(x_\nu-\bar{x})^2}{\nu}}$ η τυπική απόκλιση των τετμημένων σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή (εφαρμογή 3 σελ. 99) θα ισχύει: $\bar{\psi} = -20\bar{\chi} - 18$ και $S_\psi = |-20|S_\chi$

! ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ !

36) Ένα δείγμα $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{2000}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή και ισχύει ότι:

$\sum_{i=1}^{2000} x_i^2 = 1300000$. Επίσης γνωρίζουμε ότι 1000 παρατηρήσεις είναι μικρότερες από 25.

Α) Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{\chi}$ και την τυπική απόκλιση S .

Β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Γ) Να βρείτε πόσες παρατηρήσεις i) είναι μικρότερες από 30 ii) είναι μεγαλύτερες από 35 iii) ανήκουν στο διάστημα (10 , 35) .

ΛΥΣΗ

{{{σχόλιο: παρατηρήστε ότι μας δίνει το πλήθος ως δείκτη της τελευταίας παρατήρησης, το 1000 είναι το μισό του δείγματος και το δοσμένο άθροισμα μας θυμίζει τον άλλο τύπο της διακύμανσης.**}}}**

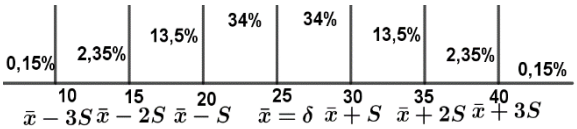
Α) Το μέγεθος του δείγματος είναι ν=2000 και συνεπώς οι 1000 παρατηρήσεις που είναι μικρότερες από 25, είναι ίσες με $\frac{\nu}{2}$ και αποτελούν το 50% του δείγματος .Άρα το 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 25 οπότε η διάμεσος δ=25 . Εφόσον ακολουθεί την κανονική κατανομή θα ισχύει : $\begin{cases} \delta = 25 \\ \boldsymbol{\delta} = \bar{\boldsymbol{\chi}} \end{cases} \Rightarrow \bar{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{25}$

Η διακύμανση για τιμές συχνότητας ένα δίνεται και από τον τύπο:

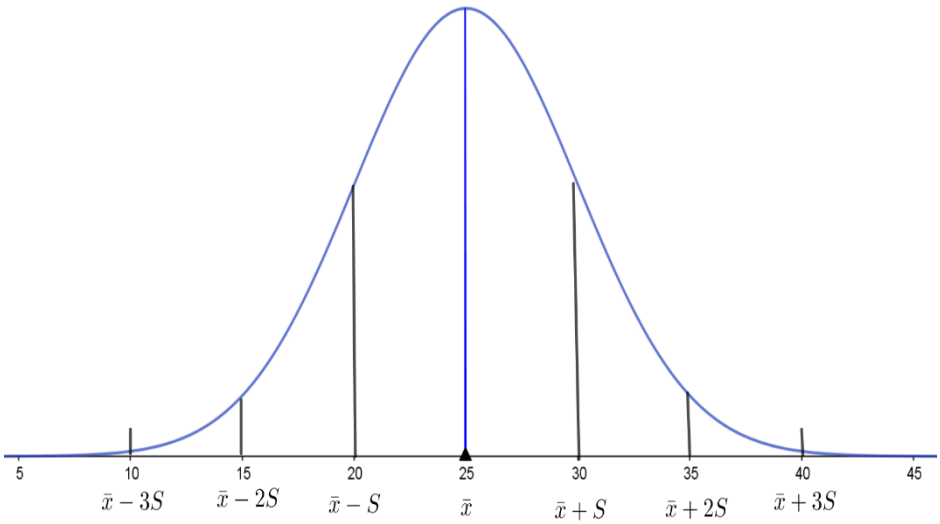
$$S^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{\iota=1}^{\nu} \chi_\iota^2 - \frac{(\sum_{\iota=1}^{\nu} \chi_\iota)^2}{\nu}\right\} = \frac{\sum_{\iota=1}^{\nu} \chi_\iota^2}{\nu} - \frac{(\sum_{\iota=1}^{\nu} \chi_\iota)^2}{\nu^2} = \frac{\sum_{\iota=1}^{\nu} \chi_\iota^2}{\nu} - \left(\frac{\sum_{\iota=1}^{\nu} \chi_\iota}{\nu}\right)^2 = \frac{\sum_{\iota=1}^{\nu} \chi_\iota^2}{\nu} - (\bar{\chi})^2 \text{ οπότε:}$$

$S^2 = \frac{1300000}{2000} - 25^2 = 650 - 625 = 25$ και η τυπική απόκλιση είναι: $\mathbf{S} = \sqrt{\mathbf{S^2}} = \sqrt{\mathbf{25}} = \mathbf{5}$

Β) $CV = \frac{S}{|\bar{x}|}100\% = \frac{5}{25}100\% = 0{,}2\frac{100}{100} = \frac{20}{100} = 20\%$



Γ) ι) μικρότερες από 30=25+5=$\bar{x}+S$ είναι το 0,15%+2,35%+13,5%+34%+34%=84% (ή 100% - $\frac{100\%-68\%}{2} = 84\%$) των παρατηρήσεων ν και το πλήθος τους είναι: 84%·2000= $\frac{84}{100}2000 = 1680$



ιι) Το ποσοστό πάνω από 35=25+10=25+2·5=$\bar{x}+2S$ είναι: 2,35%+0,15%=2,5% (ή $\frac{100\%-95\%}{2} = 2{,}5\%$) των παρατηρήσεων και το πλήθος τους είναι: 2,5%·2000= $\frac{2{,}5}{100}2000 = \frac{5000}{100} = 50$

ιιι) Το ποσοστό των παρατηρήσεων που ανήκουν στο διάστημα (10=25-15=25-3·5=$\bar{x}-3S$,35=25+10=25+2·5=$\bar{x}+2S$) είναι: 2,35%+(13,5%+34%+34%+13,5%)=2,35%+95%=97,35% (ή 95%+ $\frac{99{,}7\%-95\%}{2} = 97{,}35\%$) και το πλήθος τους είναι: 97,35%·2000= $\frac{97{,}35}{100}2000 = 97{,}35 \cdot 20 = 1947$

ΙΩΣΗΦ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ Α. ΚΑΤΣΑΡΟΣ

{{{εκτός άσκησης: το ποσοστό που απομένει είναι 0,15%+2,35%+0,15%=2,65% και το πλήθος 2,65%·2000=53 οπότε 53+1947=2000 }}}

! ∽ ≡ ∽ ≡ ∽ ≡ ∽ ≡ ∽ ≡ ∽ ≡ ∽ ≡ ∽ ≡ ∽ ≡ ∽ ≡ ∽ !

37) Ένα δείγμα $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_\nu$, ν παρατηρήσεων μιας μεταβλητής Χ, ακολουθεί την κανονική κατανομή. Γνωρίζουμε ότι:

- ✓ **Το 2,5% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από το 24.**
- ✓ **Το 81,5% των παρατηρήσεων ανήκουν στο διάστημα (24,33) του οποίου τα άκρα είναι χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής $(\bar{\chi} \pm 3S, \bar{\chi} \pm 2S, \bar{\chi} \pm S, \bar{\chi})$**

Α) Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{\chi}$ και την τυπική απόκλιση S .

Β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

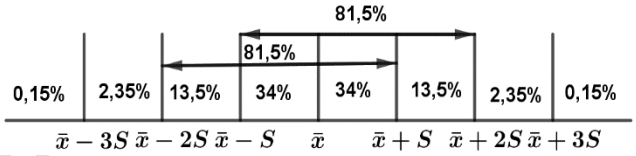
Γ) Αν ισχύει ότι: $\sum_{\iota=1}^{\nu} x_\iota^2 = 1818000$, τότε: i) να αποδείξετε ότι ν=2000 ii) να βρείτε πόσες παρατηρήσεις είναι πάνω από 33 iii) να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{\iota=1}^{2000} (\chi_\iota - 30)^2$.

ΛΥΣΗ

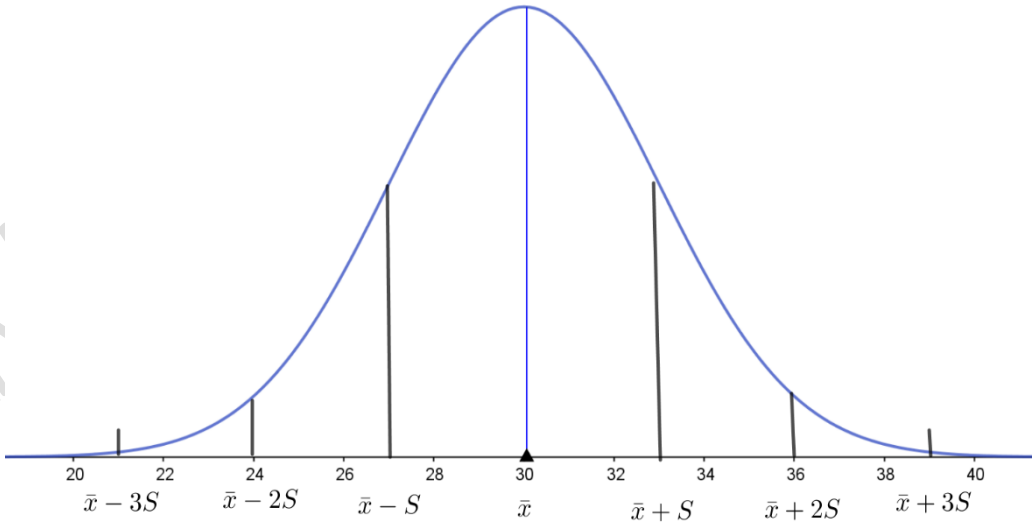
Α) Το 2,5% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από το 24 . Από θεωρία γνωρίζουμε ότι:

το 2,5% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από το $\bar{x} - 2S$ άρα $\bar{x} - 2S$ =24 (1)

Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα με άκρα τις χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής υπάρχουν δύο διαστήματα που έχουν ποσοστό 81,5% $(\bar{x} - 2S, \bar{x} + S)$ και $(\bar{x} - S, \bar{x} + 2S)$



Επειδή $\bar{x} - 2S$ =24 το διάστημα (24,33) με χρήση των χαρακτηριστικών άκρων της κατανομής θα είναι το $(\bar{x} - 2S, \bar{x} + S)$ άρα $\bar{x} + S$ =33 (2)



Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2)

$$\begin{pmatrix} \bar{x} - 2S = 24 \\ \bar{x} + S = 33 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} \frac{\pi o \lambda}{\zeta \omega} \\ \mu \varepsilon -1 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\bar{x} + 2S = -24 \\ \bar{x} + S = 33 \end{pmatrix} \overset{\pi \rho o \sigma \theta \acute{\varepsilon} \tau \omega \ \kappa \alpha \tau \acute{\alpha} \ \mu \acute{\varepsilon} \lambda \eta}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 3S = 9 \\ \bar{x} + S = 33 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} S = 3 \\ \bar{x} + 3 = 33 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} S = 3 \\ \bar{x} = 33 - 3 = 30 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{S = 3} \\ \boldsymbol{\bar{x} = 30} \end{pmatrix}$$

Β) $CV = \frac{S}{|\bar{x}|} 100\% = \frac{3}{30} 100\% = 0{,}1 \frac{100}{100} = \frac{10}{100} = 10\%$ οριακά ομοιογενές.

Γ) ι) Η διακύμανση είναι: $S^2 = \frac{1}{\nu} \left\{ \sum_{\iota=1}^{\nu} \chi_\iota^2 - \frac{(\sum_{\iota=1}^{\nu} \chi_\iota)^2}{\nu} \right\} = \frac{\sum_{\iota=1}^{\nu} \chi_\iota^2}{\nu} - \frac{(\sum_{\iota=1}^{\nu} \chi_\iota)^2}{\nu^2} = \frac{\sum_{\iota=1}^{\nu} \chi_\iota^2}{\nu} - \left(\frac{\sum_{\iota=1}^{\nu} \chi_\iota}{\nu} \right)^2 = \frac{\sum_{\iota=1}^{\nu} \chi_\iota^2}{\nu} - (\bar{\chi})^2$

δεδομένου ότι: $S = 3 \Leftrightarrow S^2 = 3^2 = 9$, $\bar{x} = 30$ και $\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 = 1818000$ αντικαθιστούμε στον τύπο και

έχουμε: $S^2 = \frac{\sum_{\iota=1}^{\nu} \chi_\iota^2}{\nu} - (\bar{\chi})^2 \Leftrightarrow 9 = \frac{1818000}{\nu} - 30^2 \Leftrightarrow 9 \cdot \nu = \frac{1818000}{\nu}\nu - 900 \cdot \nu \Leftrightarrow 9 \cdot \nu + 900 \cdot \nu = 1818000 \Leftrightarrow 909 \cdot \nu = 1818000 \Leftrightarrow \nu = \frac{1818000}{909} = 2000$

ιι) το ποσοστό των παρατηρήσεων πάνω από 33=30+3=$\bar{x} + S$ είναι 13,5%+2,35%+0,35%=16% (ή $\frac{100\%-68\%}{2} = 16\%$) οπότε το πλήθος τους είναι: 16%·2000=$\frac{16}{100}$2000=16·20=320

ιιι) Δείξαμε ότι $\bar{\chi} = 30$ συνεπώς το $\sum_{\iota=1}^{2000}(\chi_\iota - 30)^2 = \sum_{\iota=1}^{2000}(\chi_\iota - \bar{\chi})^2$ και είναι ο αριθμητής του τύπου της διακύμανσης . Από τον τύπο τη διακύμανσης έχουμε: $S^2 = \frac{\sum_{\iota=1}^{\nu}(\chi_\iota - \bar{\chi})^2}{\nu} \Leftrightarrow S^2 = \frac{\sum_{\iota=1}^{2000}(\chi_\iota - \bar{\chi})^2}{2000} \Leftrightarrow$

$9 = \frac{\sum_{\iota=1}^{2000}(\chi_\iota - 30)^2}{2000} \Leftrightarrow \sum_{\iota=1}^{2000}(\chi_\iota - 30)^2 = 9 \cdot 2000 = 18000$

! ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ ≡ ↜↝ !

38) Ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας μεταβλητής Χ είναι ομοιογενές και ακολουθεί την κανονική κατανομή. Γνωρίζουμε ότι το 2,35% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα (14,16), του οποίου τα άκρα είναι χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής ($\bar{\chi} \pm 3S$, $\bar{\chi} \pm 2S$, $\bar{\chi} \pm S$, $\bar{\chi}$) .

Α) Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση.

Β) Να βρείτε τη διάμεσο και το εύρος.

Γ) Αν γνωρίζουμε ότι 950 παρατηρήσεις βρίσκονται στο διάστημα (16,20)

ι) Να αποδείξετε ότι ν=2000

ιι) Να βρείτε πόσες παρατηρήσεις είναι κάτω από το 16 και πόσες είναι πάνω από το 22.

ιιι) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{\iota=1}^{2000} \chi_\iota^2$

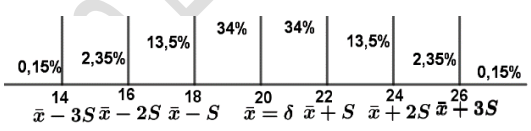
ΛΥΣΗ

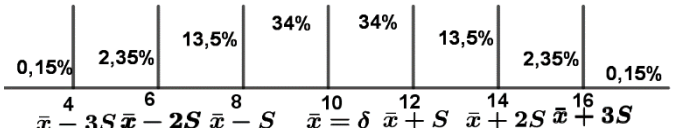
Α) Το 2,35% βρίσκεται στο διάστημα (14,16) και από θεωρία γνωρίζουμε ότι το 2,35% βρίσκεται στο διάστημα **(**$(\bar{\chi} - 3S, \bar{\chi} - 2S)$ αλλά και στο διάστημα **(**$(\bar{\chi} + 2S, \bar{\chi} + 3S)$ οπότε $\bar{\chi} - 3S = 14$ ***και*** $\bar{\chi} - 2S = 16$ **(1)** ή **(**$(\bar{\chi} + 2S = 14$ ***και*** $\bar{\chi} + 3S = 16$ **(2)** Λύνω τα συστήματα (1) και (2)

$$\begin{pmatrix} \bar{\chi} - 3S = 14 \\ \bar{\chi} - 2S = 16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\bar{\chi} + 3S = -14 \\ \bar{\chi} - 2S = 16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{\chi} - 2S - \bar{\chi} + 3S = 16 - 14 \\ \bar{\chi} - 2S = 16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} S = 2 \\ \bar{\chi} - 2S = 16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} S = 2 \\ \bar{\chi} - 4 = 16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} S = 2 \\ \bar{\chi} = 20 \end{pmatrix}$$

Και

$$\begin{pmatrix} \bar{\chi} + 2S = 14 \\ \bar{\chi} + 3S = 16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\bar{\chi} - 2S = -14 \\ \bar{\chi} - 2S = 16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\bar{\chi} - 2S + \bar{\chi} + 3S = 16 - 14 \\ \bar{\chi} + 3S = 16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} S = 2 \\ \bar{\chi} + 3S = 16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} S = 2 \\ \bar{\chi} + 6 = 16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} S = 2 \\ \bar{\chi} = 10 \end{pmatrix}$$





Επειδή η άσκηση δεν μας δίνει κριτήριο επιλογής για το ποια από τις δύο λύσεις είναι αποδεκτή , επιλέγουμε με βάση το τρίτο ερώτημα γιατί το διάστημα (16,20) υπάρχει μόνο όταν $\bar{\chi} = 20$ **και** $S = 2$

Β) $\begin{cases} \bar{x} = \delta \\ \bar{x} = 20 \end{cases} \Rightarrow$ δ=20 **και R≅6·S=6·2=12**

Γ) ι) Στο διάστημα (16=20-4=20-2·2=$\bar{\chi} - 2S$, $20 = \bar{\chi}$) δίνεται ότι περιέχονται $\nu_\iota = 950$ παρατηρήσεις και το ποσοστό είναι: $f_i\% = 13.5\% + 34\% = 47{,}5\%$ ή $f_i = 0{,}475$ άρα $f_i = \frac{\nu_\iota}{\nu} \Leftrightarrow \nu = \frac{\nu_\iota}{f_i} = \frac{950}{0{,}475} = 2000$

ΣΠΑΝΔΡΑΙΤΣΩΝΑΣ Α. ΚΑΤΑΡΟΣ

ii) Κάτω από 16=$\overline{\chi} - \mathbf{2S}$ το ποσοστό των παρατηρήσεων είναι: $f_i\% = 0{,}15\% + 2{,}35\% = 2{,}5\%$ (**ή** $\frac{\mathbf{100\%-95\%}}{\mathbf{2}} = \mathbf{2,5}\%$)και το πλήθος είναι: 2,5%·2000=$\frac{2{,}5}{100}2000 = 2{,}5 \cdot 20 = 50$

Πάνω από 22=$\overline{\chi} + \boldsymbol{S}$ το ποσοστό των παρατηρήσεων είναι: $f_i\% = 13{,}5\% + 2{,}35\% + 0{,}15\% = 16\%$ (**ή** $\frac{\mathbf{100\%-68\%}}{\mathbf{2}} = \mathbf{16}\%$) και το πλήθος είναι: 16%·2000=$\frac{16}{100}2000 = 16 \cdot 20 = 320$

ιιι) Η διακύμανση είναι: $S^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{\iota=1}^{\nu}\chi_\iota^2 - \frac{(\sum_{\iota=1}^{\nu}\chi_\iota)^2}{\nu}\right\} = \frac{\sum_{\iota=1}^{\nu}\chi_\iota^2}{\nu} - \frac{(\sum_{\iota=1}^{\nu}\chi_\iota)^2}{\nu^2} = \frac{\sum_{\iota=1}^{\nu}\chi_\iota^2}{\nu} - \left(\frac{\sum_{\iota=1}^{\nu}\chi_\iota}{\nu}\right)^2 = \frac{\sum_{\iota=1}^{\nu}\chi_\iota^2}{\nu} - (\overline{\chi})^2$

με δεδομένα: $\overline{\chi} = \mathbf{20}$, **ν=2000** , $S = 2 \Leftrightarrow S^2 = 2^2 = 4$ έχουμε $S^2 = \frac{\sum_{\iota=1}^{2000}\chi_\iota^2}{\nu} - (\overline{\chi})^2 \Leftrightarrow$

$$\nu \cdot S^2 = \nu \cdot \frac{\sum_{\iota=1}^{2000}\chi_\iota^2}{\nu} - \nu \cdot (\overline{\chi})^2 \Leftrightarrow \nu \cdot S^2 = \sum_{\iota=1}^{2000}\chi_\iota^2 - \nu \cdot (\overline{\chi})^2 \Leftrightarrow 4 = \sum_{\iota=1}^{2000}\chi_\iota^2 - 2000 \cdot 400 \Leftrightarrow \sum_{\iota=1}^{2000}\chi_\iota^2 = 800000 + 4 = 800004$$

! ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ !

39) Η διάρκεια ζωής σε χιλιάδες ώρες ενός δείγματος 4000 συσκευών ακολουθεί περίπου την κανονική κατανομή. Η διάμεσος του δείγματος είναι 20 και 640 συσκευές έχουν διάρκεια ζωής τουλάχιστον 22 χιλιάδες ώρες.

Α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή , την τυπική απόκλιση και το εύρος του δείγματος.

Β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των συσκευών του δείγματος που έχουν διάρκεια ζωής από 16 έως 20 χιλιάδες ώρες.

Δ) Μια συσκευή θεωρείται ελαττωματική αν η διάρκεια ζωής της είναι κάτω από 14 χιλιάδες ώρες. Αν στο δείγμα βρέθηκαν 10 ελαττωματικές συσκευές , να εξετάσετε αν υπάρχει πρόβλημα στη διαδικασία παραγωγής τους.

ΛΥΣΗ

Α) Δεδομένου ότι το δείγμα ακολουθεί κανονική ή περίπου κανονική κατανομή ισχύει: $\begin{cases}\bar{x} = \delta \\ \delta = 20\end{cases} \Rightarrow \overline{\chi}$ **=20** χιλιάδες ώρες. Το ποσοστό των 640 ηλεκτρικών συσκευών είναι: $f_i\% = \frac{640}{4000}100\% = 0{,}16\frac{100}{100} = \frac{16}{100} = 16\%$

16% είναι το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι τουλάχιστον 22 Από θεωρία γνωρίζουμε ότι:

16% είναι το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι τουλάχιστον $\bar{\chi}$ +S άρα $\bar{\chi}$ +S=22 (1) Για $\bar{\chi} = 20$ η (1) γίνεται 20+S=22⇔S=22-20⇔ **S=2** χιλιάδες ώρες

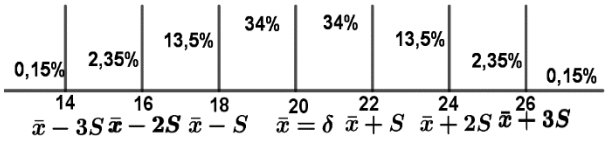
Το εύρος είναι **R≅6·S=6·2=12** χιλιάδες ώρες.

Β) Ο συντελεστής μεταβολής είναι: CV=$\frac{S}{|\bar{\chi}|}100\% = \frac{2}{20}100\% = 0{,}1\frac{100}{100} = \frac{10}{100} = 10\%$

Και το δείγμα είναι οριακά ομοιογενές.

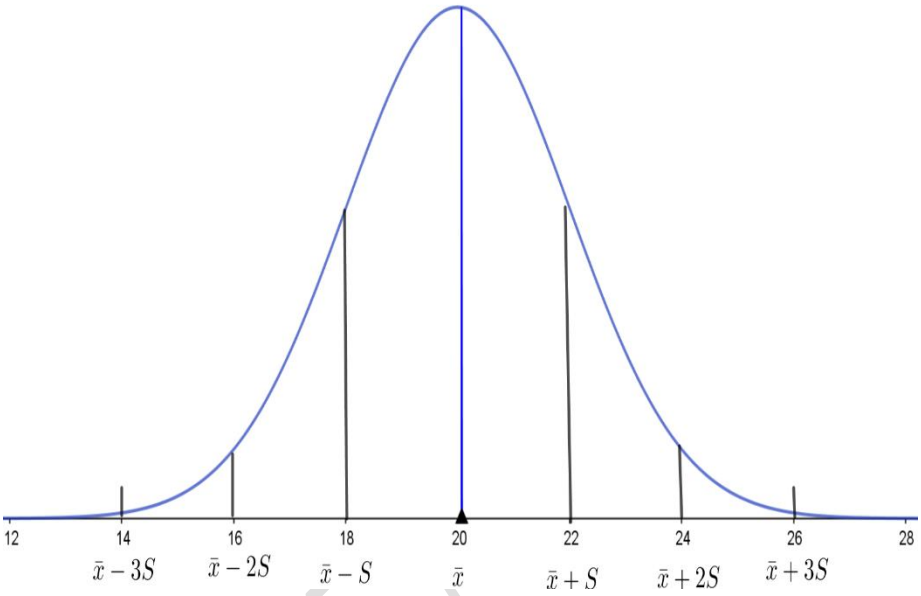
10 ΕΠΑΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ Α. ΚΑΤΣΑΡΟΣ

Γ) Υπολογίζουμε το ποσοστό από 16=20-4=20-2·2=$\bar{\chi} - 2S$ έως 20 = $\bar{\chi}$ που είναι:13,5%+34%=47,5% (ή $\frac{95\%}{2} = 47{,}5\%$) οπότε το πλήθος είναι: 47,5%·4000=$\frac{47{,}5}{100} 4000 = 47{,}5 \cdot 40 = 1900$



Δ) Θεωρούμε μια ηλεκτρική συσκευή ελαττωματική όταν έχει διάρκεια ζωής κάτω από 14=20-6 =20-3·2=$\bar{\chi} - 3S$ και το ποσοστό κάτω από $\bar{\chi} - 3S$ είναι 0,15% που αντιστοιχεί σε 0,15%·4000=$\frac{0{,}15}{100} 4000 = 0{,}15 \cdot 40 = 6$

συσκευές. Φυσιολογική λειτουργία του μηχανήματος θεωρείται η παραγωγή μέχρι και 6 ελαττωματικών συσκευών. Το μηχάνημα παράγει 10 ελαττωματικές συσκευές, άρα έχει βλάβη.



! ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ ≡ ⇜⇝ !

40) Ένα δείγμα αποτελείται από ακέραιες θετικές τιμές όχι κατ΄ανάγκη διαφορετικές μεταξύ τους. Η μέση τιμή του δείγματος είναι $\bar{x}$ =32 Όταν στο δείγμα βάλουμε και την τιμή 23 η νέα μέση τιμή γίνεται 31.

Α. Να βρεθεί το μέγεθος του αρχικού δείγματος .

Β. Αν η διάμεσος του δεύτερου δείγματος είναι33 , οι 3 μικρότερες παρατηρήσεις είναι ίσες μεταξύ τους και οι 4 μεγαλύτερες παρατηρήσεις είναι επίσης ίσες μεταξύ τους ,να βρεθεί η μεγαλύτερη δυνατή τιμή που μπορούν να πάρουν οι 4 μεγαλύτερες παρατηρήσεις.

ΛΥΣΗ

Α. Έστω $x_1, x_2, x_3, ..., x_\nu \in \mathrm{N}^*$ οι τιμές του δείγματος για τις οποίες ισχύει:

$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_\nu}{\nu} = 32 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + ... + x_\nu = 32\nu \ (1)$ όπου ν το μέγεθος του αρχικού δείγματος. Για τις τιμές του δεύτερου δείγματος έχουμε:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_\nu + 23}{\nu + 1} = 31 \Leftrightarrow \frac{32\nu + 23}{\nu + 1} = 31 \Leftrightarrow 32\nu + 23 = 31(\nu + 1) \Leftrightarrow 32\nu - 31\nu = 31 - 23 \Leftrightarrow \nu = 8$$

Άρα το μέγεθος του αρχικού δείγματος είναι 8.

Β. Το μέγεθος του δεύτερου δείγματος είναι ν=9

Έστω $x_1 = x_2 = x_3 = x$ οι μικρότερες παρατηρήσεις και $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = \psi$ οι 4 μεγάλες παρατηρήσεις.

Επειδή δ=33 (και χωρίζει το πλήθος σε δύο ίσα μέρη ,το 23 κατατάσσεται με το χ για να είναι 4 τιμές αριστερά της διαμέσου αφού τα ψ είναι 4 και ν=9 (περιττό πλήθος υπάρχει μεσαία παρατήρηση που ανήκει στις παρατηρήσεις). Τοποθετώντας σε αύξουσα σειρά έχουμε: χ , χ , χ , 23 , 33 , ψ , ψ , ψ , ψ με μέση τιμή $\bar{x}$ =31

10 ΕΠΑΛ ΑΡΑΓΕΣΩΝΑΣ

άρα $\frac{3x+23+33+4\psi}{9}=31 \Leftrightarrow 3x+56+4\psi=279 \Leftrightarrow 3x+4\psi=279-56 \Leftrightarrow 3x+4\psi=223$ Επειδή οι χ , ψ είναι **μη μηδενικοί φυσικοί** (1,2,3,4,…) το 4ψ γίνεται μέγιστο όταν το 3χ γίνεται ελάχιστο (δεδομένου ότι το άθροισμα παραμένει σταθερό) δηλαδή όταν χ=1 οπότε 3+4ψ=223 άρα ψ=55

41)

Το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής **X** των ετήσιων μισθών (σε εκατοντάδες Ευρώ) ενός δείγματος εργαζομένων, ομαδοποιημένης σε κλάσεις ίσου πλάτους, έχει κορυφές τα σημεία:

$\mathbf{A(20,0), B(40,5), \Gamma(60,10), \Delta(80,20), E(100,30), Z(120,\nu_5), H(140,10), \Theta(160,0).}$

Η κατακόρυφη γραμμή με εξίσωση $\mathbf{x=100}$ διαιρεί το χωρίο που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Ε1. Να αποδείξετε ότι $\mathbf{\nu_5=25}$.

Ε2. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων της κατανομής.

Ε3. Να υπολογίσετε τις τιμές των μέτρων θέσης της κατανομής.

Ε4. Αν σαν «όριο φτώχιας» θεωρήσουμε τον μισθό των **7.200** ευρώ, να εκτιμήσετε το ποσοστό επί τοις **%** των φτωχών του δείγματος.

Λύση:

Ε1. Έστω **α** το άκρο της πρώτης κλάσης και **c** το πλάτος κάθε κλάσης. Γνωρίζουμε ότι στο πολύγωνο συχνοτήτων θεωρούμε αριστερά και δεξιά δύο υποτιθέμενες κλάσεις με μηδενικές συχνότητες και συνδέουμε τα μέσα των άνω βάσεων του ορθογωνίου. Οπότε, η τετμημένη της πρώτης κλάσης είναι $\alpha-\frac{c}{2}$ και η τετμημένη της τελευταίας κλάσης είναι $\alpha+\frac{13c}{2}$. Επομένως έχουμε $\alpha-\frac{c}{2}=20$ και $\alpha+\frac{13c}{2}=160$.

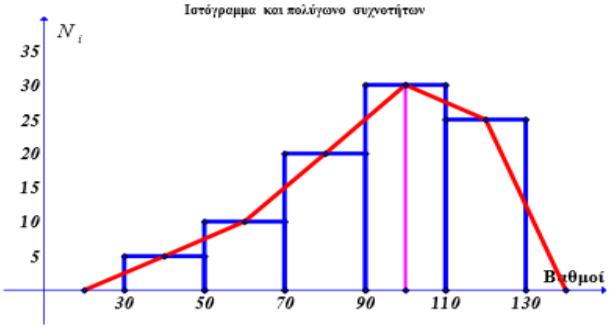
Λύνουμε το σύστημα και έχουμε $\begin{cases}\alpha+\frac{13c}{2}=160\\ \alpha-\frac{c}{2}=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=20\\ \alpha=30\end{cases}$

Έτσι οι κλάσεις είναι **[30,50),[50,70),[70,90),[90,110),[110,130),[130,150).**

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον οριζόντιο άξονα και το πολύγωνο συχνοτήτων, ισούται με το μέγεθος του δείγματος.
Έχουμε $\mathbf{v_1 = 5, v_2 = 10, v_3 = 20, v_4 = 30, v_6 = 10.}$
Επειδή η $\mathbf{x = 100}$ χωρίζει το χωρίο σε δυο ισοδύναμα χωρία έχουμε ότι

$$\mathbf{v_1 + v_2 + v_3 + \frac{v_4}{2} = \frac{v_4}{2} + v_5 + v_6 \Leftrightarrow 5 + 10 + 20 = v_5 + 10 \Leftrightarrow v_5 = 25.}$$

Ε2. Έτσι σχηματίζεται το ακόλουθο πολύγωνο συχνοτήτων

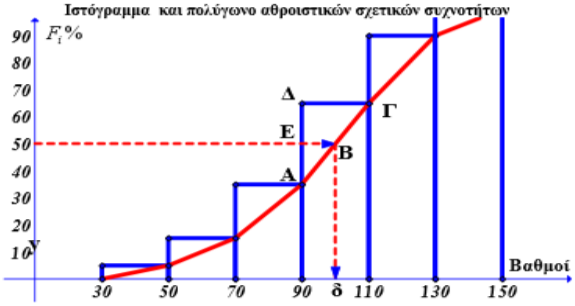


Ε3. Αφού η κατακόρυφη γραμμή με εξίσωση $\mathbf{x = 100}$ διαιρεί το χωρίο που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα σε δύο ισεμβαδικά χωρία, έχουμε ότι η διάμεσος είναι το **100.**

Β΄ τρόπος:
Φτιάχνοντας το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, από την ομοιότητα των τριγώνων $\overset{\Delta}{\mathbf{ABE}} \simeq \overset{\Delta}{\mathbf{A\Gamma\Delta}}$ έχουμε

$$\mathbf{\frac{BE}{\Gamma\Delta} = \frac{EA}{\Delta A} \Leftrightarrow \frac{\delta - 90}{110 - 90} = \frac{50 - 35}{65 - 35} \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow \frac{\delta - 90}{20} = \frac{15}{30} \Leftrightarrow \delta - 90 = 10 \Leftrightarrow \delta = 100}$$



Σχηματίζουμε τον πίνακα

I	Κλάσεις	Κέντρο κλάσης	v_i	F_i %	$v_i\, x_i$
1	[30, 50)	40	5	5	200
2	[50 ,70)	60	10	15	600
3	[70 , 90)	80	20	35	1600
4	[90 , 110)	100	30	65	3000
5	[110 , 130)	120	25	90	3000
6	[130,150)	140	10	100	1400
Σύνολα		100			9800

Οπότε $\mathbf{\bar{x} = \frac{9800}{100} = 98.}$

Ε4. Ψάχνουμε να βρούμε το ποσοστό των ατόμων, που παίρνουν κάτω από

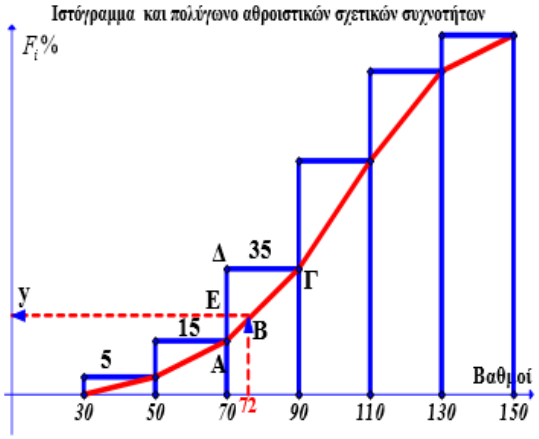
7.200€. Στο διάστημα **[70,90)** βρίσκεται το **20%** οπότε θεωρώντας ότι κατανέμονται ομοιόμορφα στο διάστημα **[70,72)** θα βρίσκεται το **2%.** Επομένως το συνολικό ποσοστό που ζει κάτω από το όριο της φτώχειας είναι $\mathbf{5\%+10\%+2\%=17\%}$.

Β΄ τρόπος:

Φτιάχνοντας το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, από την ομοιότητα των τριγώνων $\overset{\Delta}{\mathbf{ABE}} \simeq \overset{\Delta}{\mathbf{A\Gamma\Delta}}$ έχουμε

$$\frac{\mathbf{BE}}{\mathbf{\Gamma\Delta}}=\frac{\mathbf{EA}}{\mathbf{\Delta A}} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{72-70}}{\mathbf{90-70}}=\frac{\mathbf{y-15}}{\mathbf{35-15}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{20}}=\frac{\mathbf{y-15}}{\mathbf{20}} \Leftrightarrow \mathbf{y=17}$$



Επομένως το συνολικό ποσοστό που ζει κάτω από το όριο της φτώχειας είναι **17%.**

1ο ΕΠΑΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ