

Γ1. Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά τμήματα AB, BΓ, ΓΔ, ώστε $AB < \frac{A\Gamma}{2}$, $B\Gamma < \frac{B\Delta}{2}$ και

ονομάζουμε Ε, Ζ τα μέσα των ΑΓ, ΒΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$EZ = \frac{A\Delta - B\Gamma}{2}$$



Λύση:

Εστω Ο το μέσο του ΑΒ.

Τότε

$$EZ = OZ - OE \quad (1)$$

Αλλά:

$$OZ = OB + BZ = \frac{AB}{2} + \frac{B\Delta}{2} = \frac{AB + B\Delta}{2} = \frac{A\Delta}{2} \quad (2) \text{ και}$$

$$OE = AE - AO = \frac{A\Gamma}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2} = \frac{B\Gamma}{2} \quad (3)$$

$$EZ = \frac{A\Delta}{2} - \frac{B\Gamma}{2} = \frac{A\Delta - B\Gamma}{2}$$

Λύση μου (26-9-2015)

$$EZ = A\Delta - AE - Z\Delta$$

$$B\Gamma = BE + E\Gamma$$

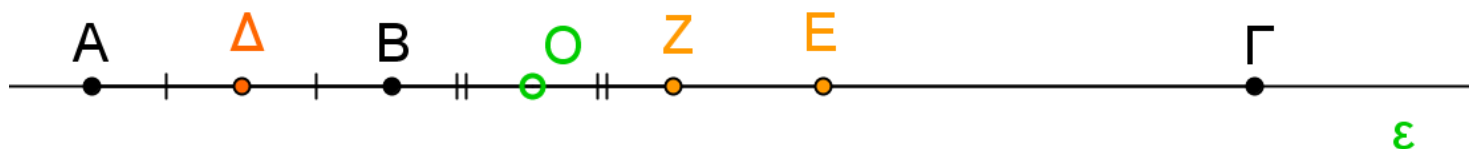
Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$EZ + B\Gamma = A\Delta + BE - Z\Delta$$

$$EZ + B\Gamma = A\Delta + BE - Z\Delta \Leftrightarrow EZ = A\Delta - B\Gamma + BE - BZ \Leftrightarrow EZ = A\Delta - B\Gamma + EZ \Leftrightarrow 2EZ = A\Delta - B\Gamma$$

$$\Leftrightarrow EZ = \frac{A\Delta - B\Gamma}{2}$$

Γ2. Σε ευθεία ε παίρνουμε δύο διαδοχικά τμήματα AB, BΓ. Αν Δ,Ε,Ζ είναι τα μέσα των AB, BΓ, ΓΑ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΔΕ, ΒΖ έχουν κοινό μέσο.



Λύση:

Εστω Ο το μέσο του ΒΖ. Τότε $ΒΟ=ΟΖ$. Για να είναι το Ο μέσο και του ΔΕ αρκεί $ΔΒ=ΖΕ$ (αφού $ΟΒ=ΟΖ$).

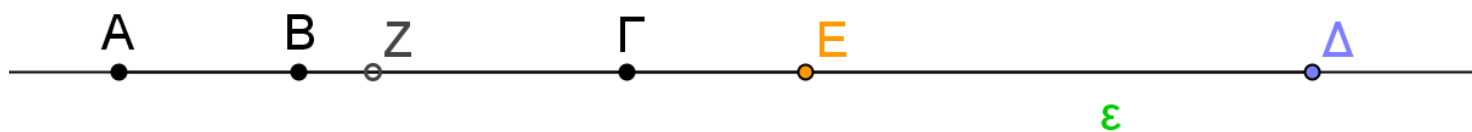
Πράγματι:

$$\Delta B = \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma - B\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma}{2} - \frac{B\Gamma}{2} = \Gamma Z - \Gamma E = ZE$$

Γ3. Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά τμήματα AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ονομάζουμε E το μέσο του BA . Να

αποδείξετε ότι $AE > \frac{A\Gamma}{2}$.

Λύση:



(Λύση σχολικού) Έχουμε:

$$\begin{aligned} AE &= AB + BE = AB + \frac{BA}{2} = \frac{2AB}{2} + \frac{BA}{2} = \frac{2AB + BA}{2} = \frac{AB + AB + B\Gamma + \Gamma\Delta}{2} = \frac{AB + B\Gamma}{2} + \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \\ &= \frac{A\Gamma}{2} + \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} > \frac{A\Gamma}{2} \end{aligned}$$

Λύση μου: (9/8/2005)

$$AE > \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2AE > A\Gamma$$

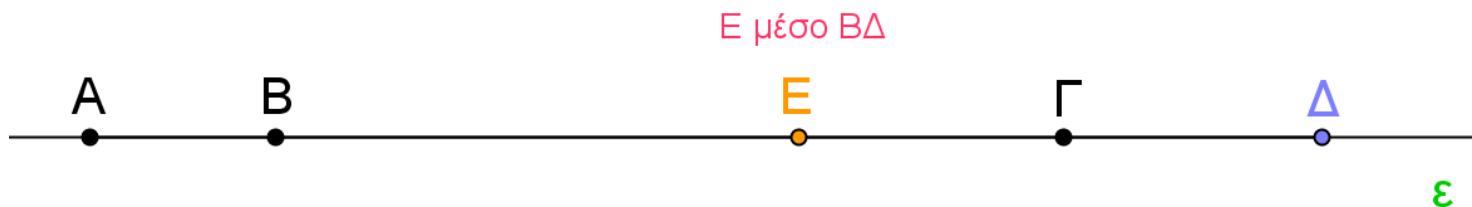
$$2AE = AE + AE = AE + (AB + BE) = AE + (AB + \Delta E) = (AE + \Delta E) + AB = A\Delta + AB > A\Gamma + AB > A\Gamma$$

Λύση μου: (26/9/2015)

$$\begin{aligned} AE > \frac{A\Gamma}{2} &\Leftrightarrow AB + BE > \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow AB + \frac{BA}{2} > \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow \frac{AB}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{BA}{2} > \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow \frac{AB}{2} + \frac{AB + BA}{2} > \frac{A\Gamma}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{AB}{2} + \frac{A\Delta}{2} > \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow AB + A\Delta > A\Gamma \end{aligned}$$

Παρατήρηση:

Ισχύουν οι αποδείξεις και στην περίπτωση που το Γ βρίσκεται μετά το E .



Γ4. Θεωρούμε κύκλο (Ο, R) και τα διαδοχικά σημεία του Α, Β, Γ και Δ, ώστε $\widehat{AB} = 150^\circ$, $\widehat{\Gamma\Delta} = 45^\circ$ και $\widehat{\Delta\Lambda} = 105^\circ$. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\hat{O}\Gamma}$ είναι αντικείμενη ημιευθεία της ΟΑ.

Λύση:

Εχουμε:

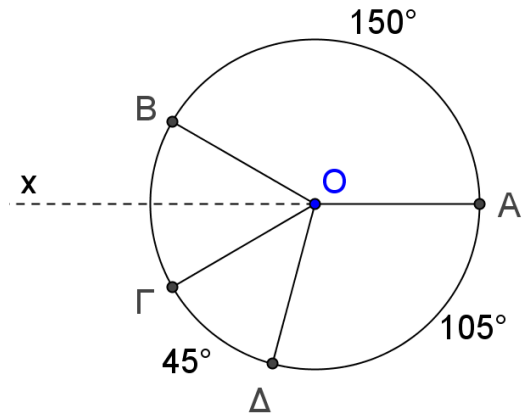
$$\widehat{AB} + \widehat{B\Gamma} + \widehat{\Gamma\Delta} + \widehat{\Delta\Lambda} = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\Gamma} = 360^\circ - \widehat{AB} - \widehat{\Gamma\Delta} - \widehat{\Delta\Lambda} \Leftrightarrow$$

$$\widehat{B\Gamma} = 360^\circ - 150^\circ - 45^\circ - 105^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\Gamma} = 360^\circ - 300^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\Gamma} = 60^\circ$$

Αφού Οχ διχοτόμος της $\widehat{B\hat{O}\Gamma}$ είναι $\widehat{B\hat{O}x} = \frac{\widehat{B\hat{O}\Gamma}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

Επομένως:

$\widehat{A\hat{O}B} + \widehat{B\hat{O}x} = 150^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\hat{O}x} = 180^\circ$ δηλαδή η γωνία $\widehat{A\hat{O}x}$ είναι ευθεία που σημαίνει ότι οι ημιευθείες ΟΑ και Οχ είναι αντικείμενες ημιευθείες.



Γ5. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ, Μ το μέσο του τόξου $\widehat{AB}$ και Κ τυχαίο σημείο του τόξου ΒΜ. Αν Γ και Δ είναι τα μέσα των τόξων $\widehat{AK}$ και $\widehat{MK}$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε το μέτρο του τόξου ΓΔ.

Λύση:

$$\widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{\Gamma K} - \widehat{K\Delta}$$

$$\widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{\Gamma M} + \widehat{M\Delta}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη:

$$2\widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{\Gamma K} + \widehat{\Gamma M}$$

$$2\widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{AK} + \widehat{\Gamma M}$$

$$2\widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{AM}$$

$$\widehat{\Gamma\Delta} = \frac{\widehat{AM}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

Λύση σχολικού:

$$\widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{AK} - \widehat{AK} = \widehat{AM} + \widehat{M\Delta} - \widehat{AK} = \widehat{AM} + \frac{\widehat{MK}}{2} - \frac{\widehat{AK}}{2} = \widehat{AM} - \left(\frac{\widehat{AK}}{2} - \frac{\widehat{MK}}{2} \right) = \widehat{AM} - \frac{\widehat{AM}}{2} = \frac{\widehat{AM}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

