

4.6-4.8 ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ (version 2-1-2016)

Ε1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του είναι ίση με τα $\frac{2}{3}$ μιας άλλης γωνίας του. Να υπολογισθούν όλες οι γωνίες του (δύο περιπτώσεις).

Λύση:

Εστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Προφανώς η $\hat{A} = 90^\circ$ ως μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου δεν μπορεί να είναι τα $\frac{2}{3} \cdot (\text{άλλης γωνίας του})$.

Εστω λοιπόν ότι η γωνία $\hat{B} = \frac{2}{3} \cdot (\text{άλλης γωνίας του})$. Τότε

- αν $\hat{B} = \frac{2}{3} \hat{A} = \frac{2}{3} 90^\circ = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ θα είναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{B} = 36^\circ = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

- αν $\hat{B} = \frac{2}{3} \hat{\Gamma}$, τότε αφού:

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{2}{3} \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{2}{3} \hat{\Gamma} + 3 \cdot \hat{\Gamma} = 3 \cdot 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + 3\hat{\Gamma} = 270^\circ \Leftrightarrow 5\hat{\Gamma} = 270^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 54^\circ$$

$$\text{οπότε } \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ.$$

Ε2. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) είναι $\hat{A} = \frac{\hat{B}}{2}$. Αν I το έγκεντρο (σημείο τομής των διχοτόμων) του τριγώνου να υπολογισθεί η γωνία $B\hat{I}\Gamma$. (Εφαρμογή 2 - § 4.8).

Λύση:

Από την Εφαρμογή 2 - § 4.8 γνωρίζουμε ότι $B\hat{I}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$. Αρα πρέπει να βρούμε την $\hat{A}$.

$$\text{Από } \hat{A} = \frac{\hat{B}}{2} \Leftrightarrow \hat{B} = 2\hat{A} \text{ και αφού } AB=A\Gamma \text{ θα είναι } \hat{B} = \hat{\Gamma} \text{ οπότε και } \hat{\Gamma} = 2\hat{A}.$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 2\hat{A} + 2\hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow 5\hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 36^\circ$$

$$\text{Αρα τελικά } B\hat{I}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} = 90^\circ + \frac{36^\circ}{2} = 90^\circ + 18^\circ = 108^\circ.$$

Ε3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\hat{A}$ είναι τριπλάσια της γωνίας $\hat{B}$. Αν $\hat{\Gamma}_{εξ} = 144^\circ$ να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του.

Λύση:

Σύμφωνα με τα δεδομένα: $\hat{A} = 3\hat{B}$.

Αφού $\hat{\Gamma}_{εξ} = 144^\circ$ θα είναι: $\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{\Gamma}_{εξ} = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$

Επομένως $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{B} + \hat{B} + 36^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 4\hat{B} = 180^\circ - 36^\circ \Leftrightarrow 4\hat{B} = 144^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 36^\circ$

Αφού $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ το ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Ε4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = \hat{\Delta\hat{A}\Gamma}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta\hat{A}B}$.

Λύση:

● Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

■ $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ **(1)** καθώς και

■ $\hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{B}$ **(2).**

● Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ έχουμε:

$\hat{\Delta\hat{A}\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ **(3)**

Από **(1)** και **(3)** προκύπτει ότι:

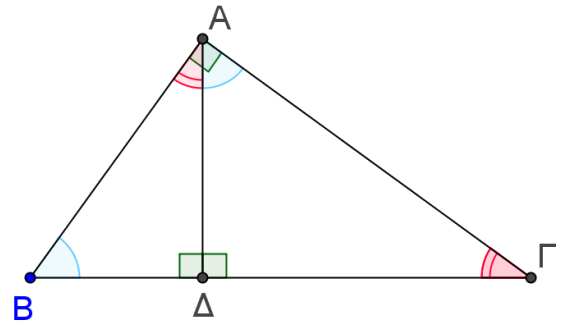
$\hat{B} = \hat{\Delta\hat{A}\Gamma}$

● Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ έχουμε:

$\hat{\Delta\hat{A}B} + \hat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta\hat{A}B} = 90^\circ - \hat{B}$ **(4)**

Από **(2)** και **(4)** προκύπτει ότι:

$\hat{\Gamma} = \hat{\Delta\hat{A}B}$



β' τρόπος:

Αφού $BA \perp AC$ και $BC \perp AD$ θα είναι $\hat{B} = \hat{\Delta\hat{A}\Gamma}$ ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες.

§4.7 Θεώρημα

Αφού $CA \perp AB$ και $CB \perp AD$ θα είναι $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta\hat{A}B}$ ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες.

§4.7 Θεώρημα

Ε5. Στο διπλανό σχήμα είναι: $AB = AG = \Delta B$ και

$$\hat{x}\hat{A}\hat{\Gamma} = 108^\circ.$$

Να υπολογισθεί η γωνία $\hat{\Delta}$.

Λύση:

Αφού η $\hat{x}\hat{A}\hat{\Gamma}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\Delta A \Gamma$

$$\text{θα ισχύει } \hat{x}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} + \hat{\Gamma}.$$

Αφού $AB = AG$ θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ οπότε

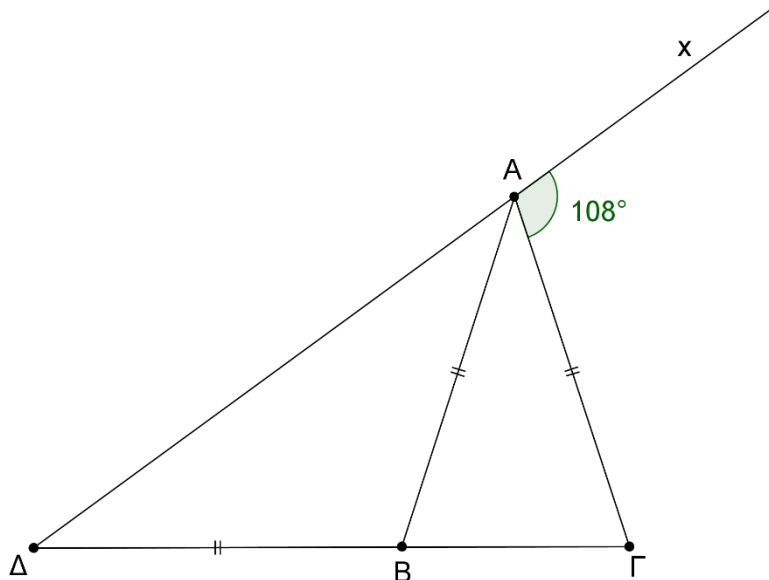
$$\hat{x}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} + \hat{B} \quad (1)$$

Η $\hat{B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\Delta A B$ οπότε

$$\hat{B} = \hat{\Delta} + \hat{A}_1. \text{ Ομως το } \Delta A B \text{ έχει } AB = B\Delta \text{ άρα θα}$$

$$\text{είναι } \hat{\Delta} = \hat{A}_1 \text{ κι έτσι } \hat{B} = \hat{\Delta} + \hat{\Delta} \Leftrightarrow \hat{B} = 2\hat{\Delta}$$

$$\text{Πλέον η (1) γράφεται: } \hat{x}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} + 2\hat{\Delta} \Leftrightarrow 108^\circ = 3\hat{\Delta} \Leftrightarrow 3\hat{\Delta} = 108^\circ \Leftrightarrow \frac{3\hat{\Delta}}{3} = \frac{108^\circ}{3} \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 36^\circ$$



Ε6. Στο παρακάτω σχήμα είναι: $\hat{A} = 90^\circ$, $A\Delta$ διχοτόμος, $\Delta E \parallel AB$. Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20° μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$ να υπολογίσετε τις γωνίες ω και ϕ .

Λύση:

Σύμφωνα με τα δεδομένα:

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} + 20^\circ \text{ και από } \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \text{ παίρνουμε}$$

$$\hat{\Gamma} + 20^\circ + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 35^\circ \text{ οπότε}$$

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} + 20^\circ = 55^\circ$$

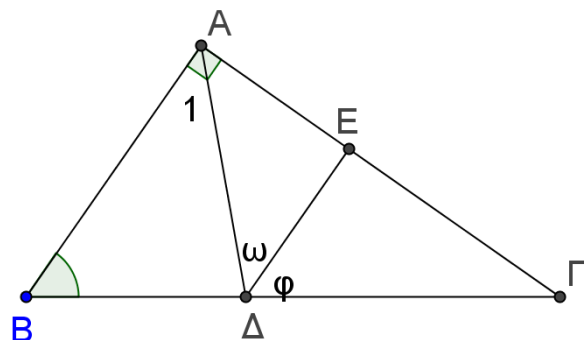
Αφού $\Delta E \parallel AB$ θα είναι $\phi = \hat{B} = 55^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων αυτών με τέμνουσα την $B\Gamma$.

Αφού $A\Delta$ διχοτόμος θα είναι $\hat{A}_1 = 45^\circ$ οπότε και $\omega = \hat{A}_1 = 45^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE και AB που τέμνονται από την $A\Delta$.

Παρατηρήσεις:

1. Το σχήμα στο σχολικό βιβλίο δεν είναι καλό αφού η $A\Delta$ δεν φαίνεται για διχοτόμος. Βέβαια όπως παρατήρησε ένας συνάδελφος

2. Μπορούμε να δημιουργήσουμε παρόμοιες ασκήσεις παίρνοντας: $0^\circ < \hat{A} < 180^\circ$ γωνία



Ε7. Το άθροισμα των γωνιών κυρτού πολυγώνου είναι 900° . Να βρεθεί το πλήθος των πλευρών του.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των πλευρών κυρτού n -γώνου είναι

$$ΑΓ \perp 2n - 4 \text{ ορθές δηλαδή } (2n - 4)90^\circ = 900^\circ \Leftrightarrow 2n - 4 = 10 \Leftrightarrow 2n = 14 \Leftrightarrow n = \frac{14}{2} \Leftrightarrow n = 7.$$

Αρα πρόκειται για κυρτό επτά-γωνο.