ΘΕΩΡΙΑ

► Τι λέγεται **επίκεντρη** γωνία και τι αντίστοιχο τόξο της;

Απάντηση:

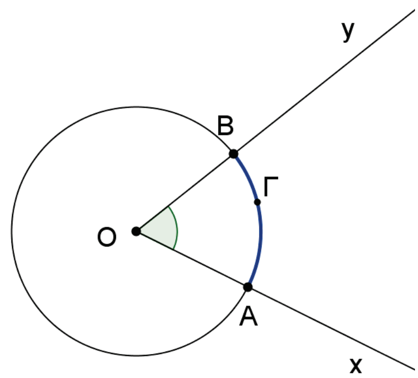
i) Μια γωνία λέγεται **επίκεντρη**, όταν η κορυφή της είναι το κέντρο ενός κύκλου.

Το τόξο του κύκλου που:

α) έχει άκρα τα σημεία τομής των πλευρών της γωνίας με τον κύκλο και

β) περιέχεται στο εσωτερικό της γωνίας

λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της επίκεντρης γωνίας



• Επίσης λέμε ότι η επίκεντρη γωνία $\mathrm{A\hat{O}B}$ **βαίνει** στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma B}}$.

Σημείωση: *Το σημείο Γ έχει τοποθετηθεί για να καθορίζεται σε ποιό από τα δύο τόξα που ορίζουν στον κύκλο τα σημεία Α και Β αναφερόμαστε.*

► **α)** Πως ορίζεται το τόξο 1 μοίρας (το οποίο χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης τόξων);

β) Πως ορίζεται το μέτρο μιας γωνίας;

Απάντηση:

α) Το τόξο μιας μοίρας ορίζεται ως το $\frac{1}{360}$ του τόξου ενός κύκλου και συμβολίζεται με $1°$.

β) Θεωρούμε μια γωνία $x\hat{O}y$ που την καθιστούμε επίκεντρη σε έναν κύκλο (O,ρ) και έστω $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ το τόξο στο οποίο βαίνει.Ορίζουμε ως μέτρο της γωνίας $x\hat{O}y$ το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$.

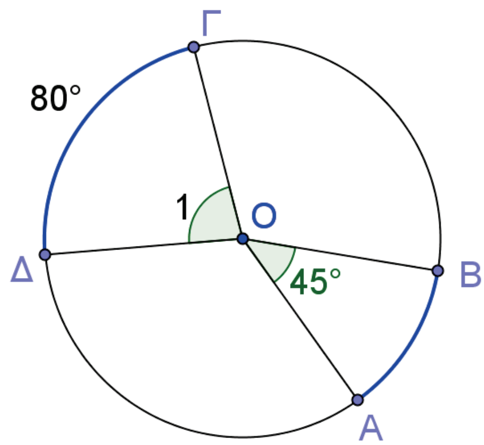
Το μέτρο της $x\hat{O}y$ το συμβολίζουμε με $\left(x\hat{O}y\right)$ ή απλά με $x\hat{O}y$.

► Στο διπλανό σχήμα βρείτε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ και το μέτρο της γωνίας $\hat{\mathrm{O}}_1$.

Απάντηση:

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 45°$

$\hat{\mathrm{O}}_1 = 80°$

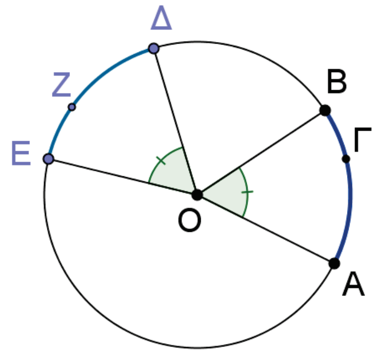


► Αν $Α\hat{Ο}Β = Δ\hat{Ο}Ε$,τι συμπεραίνετε για τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΓΒ}$ και $\overset{\frown}{ΔΖΕ}$;

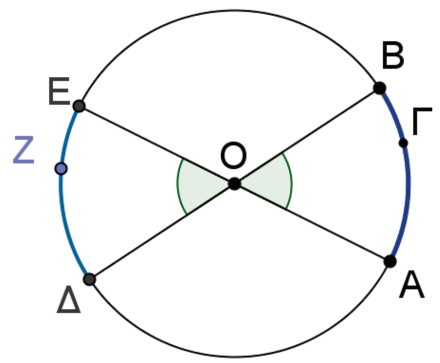
Απάντηση:

$\overset{\frown}{ΑΓΒ} = \overset{\frown}{ΔΖΕ}$

Αφού σε ίσες επίκεντρες γωνίες ενός κύκλου αντιστοιχούν ίσα τόξα.



► Στο διπλανό σχήμα οι ΔΒ και ΕΑ είναι διάμετροι του κύκλου.Τι συμπεραίνετε για τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΓΒ}$ και $\overset{\frown}{ΔΖΕ}$; Εξηγείστε:

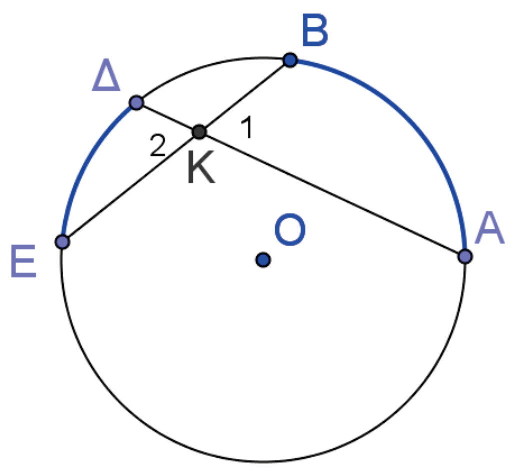


Απάντηση:

Αφού οι ΔΒ και ΕΑ είναι διάμετροι του κύκλου, το Ο είναι κέντρο του κύκλου άρα οι γωνίες $Α\hat{Ο}Β$ και $Δ\hat{Ο}Ε$ είναι επίκεντρες.Είναι επιπλέον και ίσες ως κατακορυφήν. Επομένως και τα αντίστοιχα τόξα τους θα είναι ίσα δηλαδή $\overset{\frown}{ΑΓΒ} = \overset{\frown}{ΔΖΕ}$

► Στο διπλανό σχήμα οι ΔΒ και ΕΒ είναι χορδές του κύκλου.

Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\overset{\frown}{ΑΒ} = \overset{\frown}{ΔΕ}$; Δικαιολογείστε.

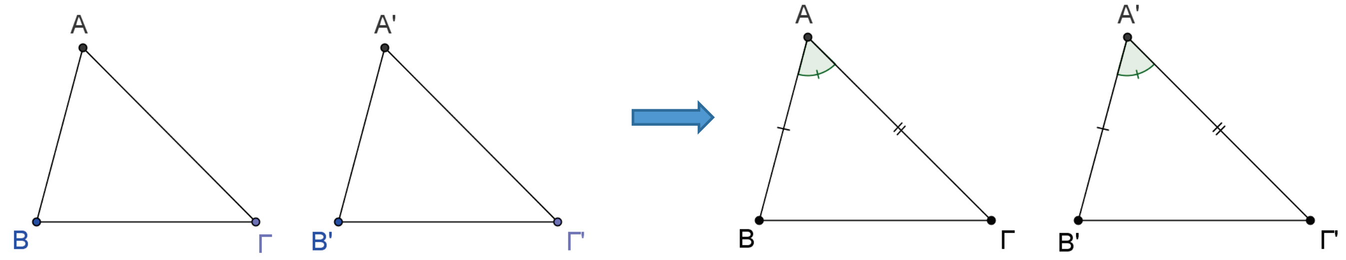


Απάντηση:

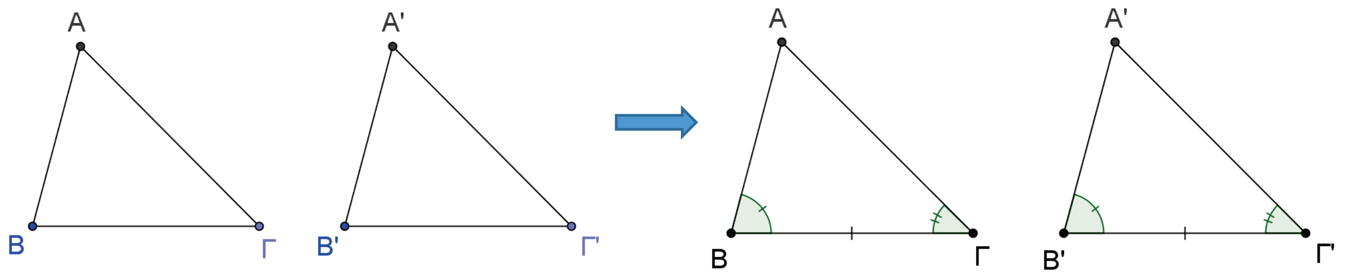
Οχι, γιατί ναί μεν οι γωνίες $\hat{Κ}_1 = \hat{Κ}_2$ ως κατακορυφήν, αλλά δεν είναι επίκεντρες ώστε να μπορώ να συμπεράνω την ισότητα των αντίστοιχων τόξων τους.

Σημειώστε με μονές, διπλές ή και τριπλές γραμμούλες τα κατάλληλα ίσα κύρια στοιχεία ώστε τα τρίγωνα αυτά να είναι ίσα σύμφωνα με καθένα από τα 3 κριτήρια ισότητας τριγώνων.

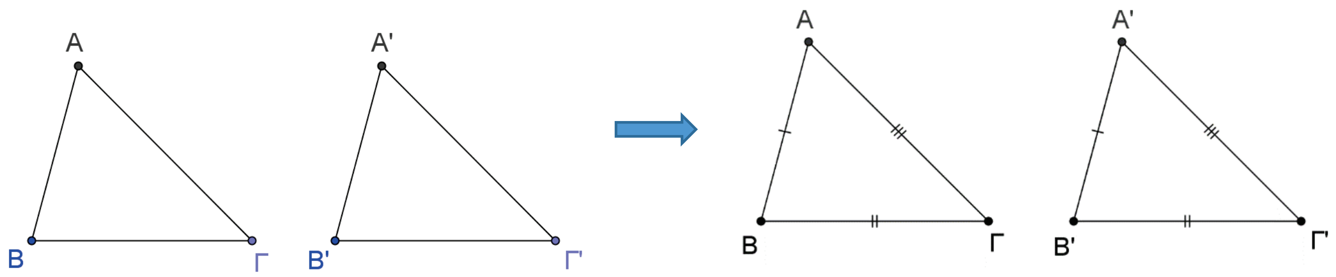
ΛΥΣΗ



ΠΓΠ

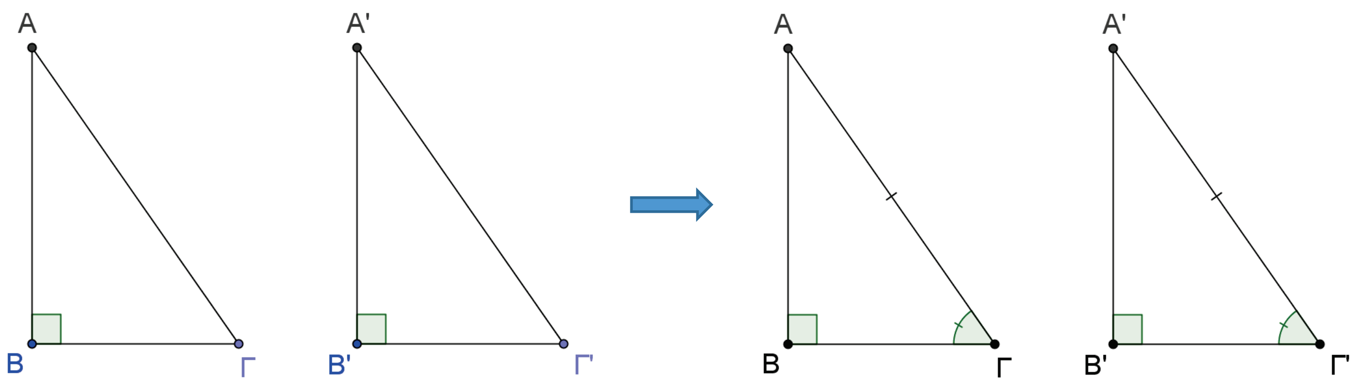


ΓΠΓ

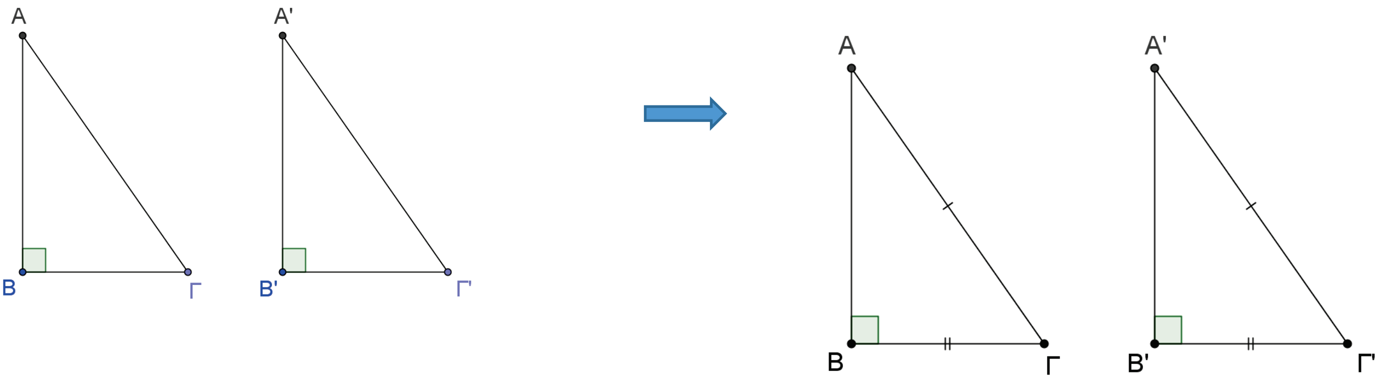


ΠΠΠ

Σημειώστε με μονές, διπλές γραμμούλες τα ίσα στοιχεία ώστε τα ορθογώνια τρίγωνα να είναι ίσα σύμφωνα με καθένα από τα **2** κριτήρια ισότητας **ορθογωνίων** τριγώνων



Ath. Kranas

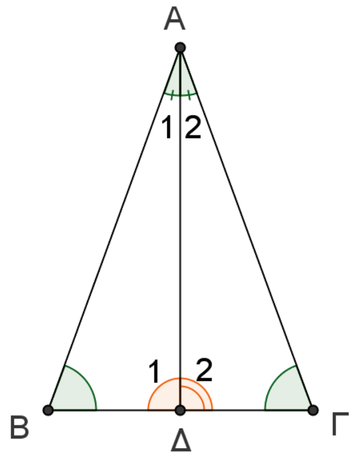


ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

i) Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.

ii) Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.



Απόδειξη:

i) Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ . Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} \\ \hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_2 \\ \mathrm{A\Delta}\ \text{κοινή} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Π-Γ-Π είναι ίσα.Αρα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα}$$

στοιχεία τους ίσα $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$.

ii) Από την ίδια ισότητα τριγώνων παίρνουμε ότι ΒΔ = ΔΓ, οπότε η ΑΔ είναι διάμεσος.

Τέλος από την ισότητα των ΑΔΒ και ΑΔΓ παίρνουμε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από την τελευταία αυτή ισότητα και επειδή $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180°$ προκύπτει $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90°$, οπότε το ΑΔ είναι και ύψος του τριγώνου.

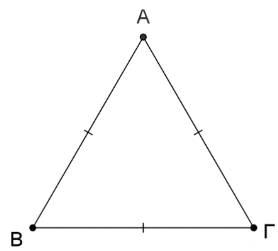
<u>Σημείωση</u>: Πλέον για κάθε **ισοσκελές** τρίγωνο πρέπει να γνωρίζουμε και μπορούμε να το χρησιμοποιούμε στις ασκήσεις ότι **ύψος-διχοτόμος-διάμεσος** που <u>αντιστοιχούν στην βάση</u> **ταυτίζονται** *(είναι ένα και το αυτό τμήμα)*

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

Απόδειξη:

Εστω ισόπλευρο ΑΒΓ.



Αφού ΑΒ=ΑΓ από το προηγούμενο Πόρισμα Ι θα ισχύει $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$ **(1)**

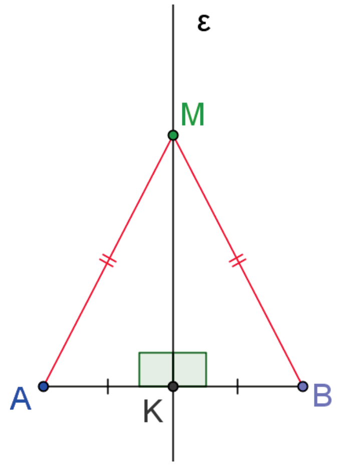
Αφού ΒΑ=ΒΓ από το προηγούμενο Πόρισμα Ι θα ισχύει $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\Gamma}$ **(2)**

Από **(1)** και **(2)** προκύπτει το ζητούμενο $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$

► Ποιά είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της **μεσοκαθέτου** ενός ευθυγράμμου τμήματος; Κάντε πρόχειρο σχήμα.

Απάντηση:

Τα σημεία της **μεσοκαθέτου** ενός ευθυγράμμου τμήματος έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος.



Εφαρμογή 2η *(§3.10-§3.12)*

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ. Αν ισχύουν δύο από τις επόμενες προτάσεις:

(i) το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος,

(ii) το τμήμα ΑΔ είναι διχοτόμος,

(iii) το τμήμα ΑΔ είναι ύψος,

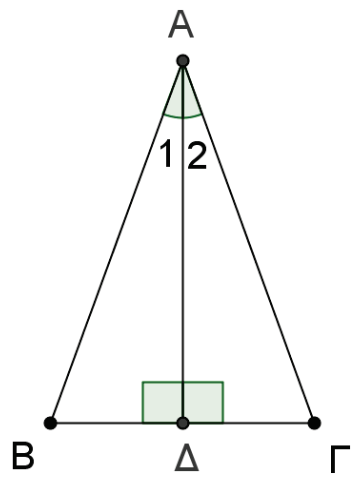
τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ.

Απόδειξη:

● Έστω ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος.Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\hat{A}_2\\ \text{ΑΔ κοινή}\\ \hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_2=(90^\circ)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Γ-Π-Γ είναι ίσα.Αρα θα έχουν και τα υπόλοιπα}$$

αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, ΑΒ=ΑΓ οπότε το ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ *(και φυσικά η ΑΔ είναι και διάμεσος)*.

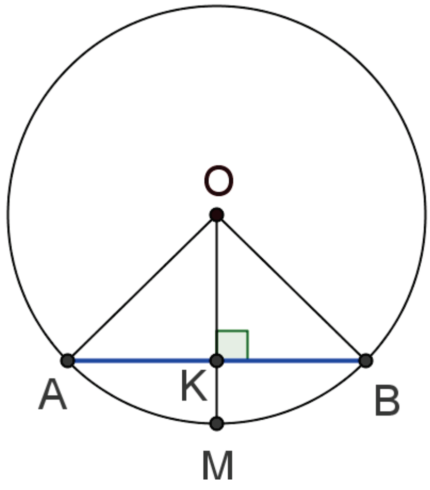


● Η απόδειξη της περίπτωση διάμεσος και ύψος αποδεικνύεται ανάλογα με χρήση του κριτηρίου Π-Γ-Π.

● Η περίπτωση διάμεσος και διχοτόμος απαιτεί γνώση του «Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές» *(§3.11 Πόρισμα ii)*

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ *(§ 3.6)*

Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.



Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (Ο,ρ), μια χορδή του ΑΒ και την κάθετη ΟΚ της ΑΒ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ . Επειδή ΟΑ= ΟΒ = ρ το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές οπότε *(Σημείωση)* το ύψος ΟΚ είναι διάμεσος άρα Κ μέσο του ΑΒ, αλλά και διχοτόμος *(Σημείωση)*, δηλαδή $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

Αφού $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ προκύπτει ότι $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$. *(§ 2.18 Θεώρημα Ι)* δηλαδή Μ μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$.

►Συνοψίζοντας τα :

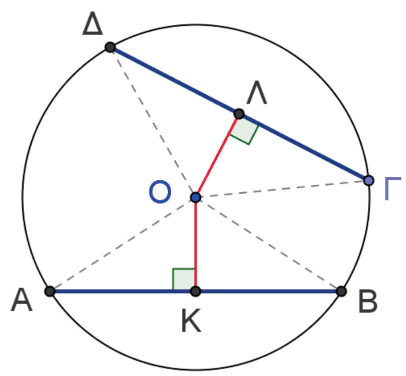
§2.18 Θεώρημα Ι το

§3.2 Πόρισμα IV το

§3.3 Πόρισμα ΙΙΙ και IV

§3.6 Θεώρημα ΙΙΙ

Μπουρούμε να γράψουμε την εξής «αλυσίδα» ισοδυναμιών που αναφέρονται στο διπλανό σχήμα:



$$A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow OK = O\Lambda$$

Λεκτικά:

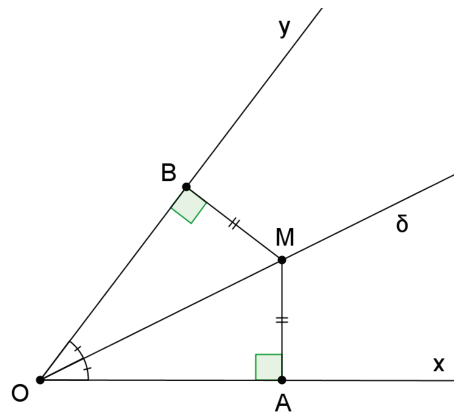
Ισες επίκεντρες γωνίες⇔ Ισα τόξα ⇔Ισες χορδές⇔ Ισα αποστήματα.

όπου τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ είναι και τα δύο μικρότερα ή και τα δύο μεγαλύτερα του ημικυκλίου

►Ποιά είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της **διχοτόμου** μιας γωνίας;Κάντε πρόχειρο σχήμα.

Απάντηση:

Τα σημεία της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχουν από τις πλευρές τις γωνίας.



►Τι λέγεται γεωμετρικός τόπος (locus);

Απάντηση:

Γεωμετρικός τόπος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα.

Βρείτε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος και σημειώστε στο αντίστοιχο τετράγωνο

			ΣΧΟΛΙΑ
1. Δύο τρίγωνα που έχουν τις τρείς γωνίες τους ίσες μία προς μία είναι ίσα		ΛΑΘΟΣ	Θα δούμε του χρόνου ότι αυτά τα τρίγωνα λέγονται «όμοια».
2.Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν ΑΒ=ΔΕ, ΒΓ=ΕΖ και $\hat{B} = \hat{E}$ τότε είναι ίσα	ΣΩΣΤΟ		Κριτήριο Π-Γ-Π
3.Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στην βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής	ΣΩΣΤΟ		(Πόρισμα ΙΙ §3.6)
4.Κάθε ύψος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι διχοτόμος και διάμεσος		ΛΑΘΟΣ	Προσοχή! Υπάρχει μια «πονηριά» σε αυτή την ερώτηση.Ενώ μοιάζει στην δατύπωση με την προηγούμενη ερώτηση 4, είναι λάθος γιατί μόνο το ύψος προς την βάση και όχι όλα τα ύψη του ισοσκελούς έχουν αυτή την ιδιότητα Είναι όμως ένα ωραίο παράδειγμα του ότι δεν πρέπει να μένουμε στην φαινομενική ομοιότητα και να μην αποφασίζουμε βιαστικά, αλλά να διαβάζουμε προσεκτικά την εκφώνηση και να είμαστε προετοιμασμένοι και για «παγίδες»
5.Ολα τα σημεία της διαμέσου ενός τριγώνου ισαπέχουν από τα άκρα της αντίστοιχης πλευράς		ΛΑΘΟΣ	Αυτή είναι ιδιότητα της μεσοκαθέτου της πλευράς και όχι της διαμέσου.
6. Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες **αν και μόνο αν τα** αποστήματά τους είναι ίσα	ΣΩΣΤΟ		
7. Δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες	ΣΩΣΤΟ		
8. Το μέσο μιας χορδής, το μέσο του αντίστοιχου τόξου της και το κέντρο του κύκλου είναι σημεία συνευθειακά.	ΣΩΣΤΟ		

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του ΒΑ, ΓΑ θεωρούμε **ίσα** τμήματα ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα. Αν Μ το μέσο της βάσης ΒΓ, τα τμήματα ΜΔ και ΜΕ τέμνουν τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ στα Ζ και Η αντιστοίχως.Να αποδείξετε ότι:

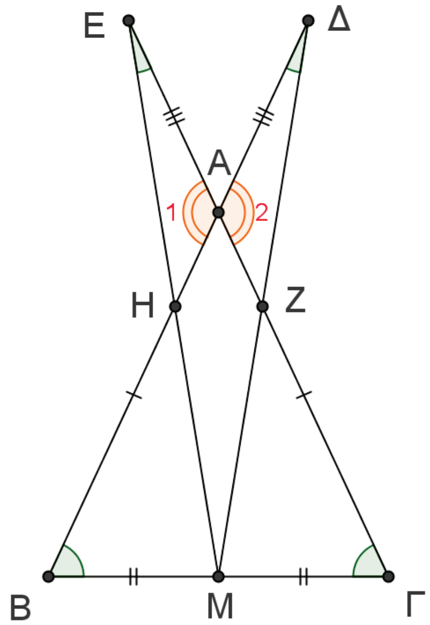
i) το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

ii) Τα τρίγωνα ΕΗΑ και ΔΖΑ είναι ίσα.

iii) Τα τρίγωνα ΕΒΜ και ΖΓΜ είναι ίσα.

Παρατήρηση: *Σε κάθε σύγκριση τριγώνων να γράφετε τις ισότητες όλων των αντίστοιχων στοιχείων που μας δίνει.*

Λύση:



Σκέψη: *Αρκεί να δείξουμε ότι ΜΔ=ΜΕ.*

Ετσι βρίσκω δύο τρίγωνα που να έχουν ως πλευρές τα τμήματα ΜΔ και ΜΕ και θα δείξω ότι είναι ίσα.Θεωρώ τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ.

i) Επειδή το ΑΒΓ ισοσκελές θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ *(§3.2 Πόρισμα Ι)*

ΒΔ=ΑΒ+ΑΔ=ΑΓ+ΕΑ=ΓΕ *(ή με λόγια: ΒΔ=ΓΕ ως άθροισμα ίσων τμημάτων)*

Τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{MB} = \mathrm{M\Gamma} \text{ αφού Μ μέσο του ΒΓ} \\ \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} \text{ προσκείμενες στην βάση ισοσκελούς τριγώνου} \\ \mathrm{B\Delta} = \Gamma\mathrm{E} \text{ αθροίσματα ίσων τμημάτων} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Π-Γ-Π είναι}$$

ίσα, άρα ΜΕ=ΜΔ δηλαδή το ΜΕΔ είναι ισοσκελές.

Από την ισότητα προκύπτει ότι $\hat{\Delta} = \hat{E}$ καθώς και $\Delta\hat{M}B = E\hat{M}\Gamma$.

ii) Τα τρίγωνα ΕΗΑ και ΔΖΑ έχουν.

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{AE} = \mathrm{A\Delta} \text{ δεδομένα} \\ \hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_2 \text{ ως κατακορυφήν} \\ \hat{\mathrm{E}} = \hat{\Delta} \text{ από i)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Γ-Π-Γ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και ΕΗ=ΔΖ, ΑΗ=ΑΖ και } E\hat{H}A = \Delta\hat{Z}A$$

iii) Αφού ΑΒ=ΑΓ από δεδομένα και ΑΗ=ΑΖ όπως δείξαμε στο **ii)** θα είναι και **ΗΒ=ΖΓ** ως διαφορές ίσων τμημάτων. Τα τρίγωνα ΕΒΜ και ΖΓΜ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{MB} = \mathrm{M\Gamma} \text{ αφού Μ μέσο του ΒΓ} \\ \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} \text{ προσκείμενες στην βάση ισοσκελούς τριγώνου} \\ \mathrm{HB} = \mathrm{Z\Gamma} \text{ ως διαφορές ίσων τμημάτων} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Π-Γ-Π είναι ίσα.}$$

Αρα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα: $\left.\begin{array}{l} \mathrm{MH} = \mathrm{MZ} \\ B\hat{H}M = \Gamma\hat{Z}M \\ B\hat{M}H = \Gamma\hat{M}Z \end{array}\right\}$

§ 3.3-3.4 Εφαρμογή 1η

Θεωρούμε γωνία $x\hat{O}y$ και δύο κύκλους (Ο,ρ), (Ο, R) με ρ<R. Αν ο πρώτος κύκλος τέμνει τις πλευρές Οx, Οy στα Α, Β ο δεύτερος στα Γ, Δ και Μ είναι το σημείο τομής των ΑΔ, ΒΓ να αποδειχθεί ότι:

i) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ είναι ίσα

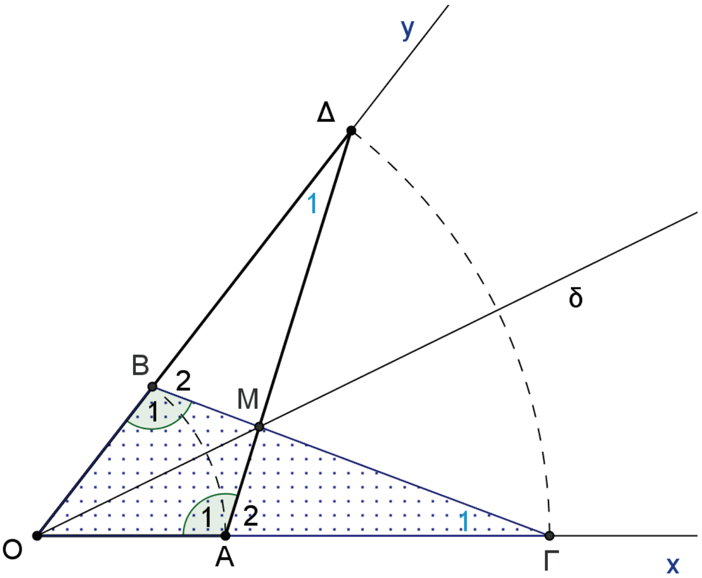
ii) τα τρίγωνα ΜΑΓ και ΜΒΔ είναι ίσα

iii) τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ είναι ίσα

iv) η ΟΜ είναι διχοτόμος της xΟy.

***<u>Παρατήρηση</u>**: Σε κάθε σύγκριση τριγώνων να γράφετε τις ισότητες όλων των αντίστοιχων στοιχείων που μας δίνει.*

ΛΥΣΗ:



i) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ έχουν

1. ΟΑ=ΟΒ (ως ακτίνες του κύκλου (Ο,ρ))
2. ΟΔ=ΟΓ (ως ακτίνες του κύκλου (Ο, R))
3. $\hat{O}$ κοινή

Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας Π-Γ-Π είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα δηλαδή:

4. ΑΔ=ΒΓ **5.** $\hat{\Delta}_1=\hat{\Gamma}_1$ **6.** $\hat{A}_1=\hat{B}_1$

ii) Τα τρίγωνα ΜΑΓ και ΜΒΔ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{1}.\text{ΑΓ} = \text{ΟΓ} - \text{ΟΑ} = \text{ΟΔ} - \text{ΟΒ} = \text{ΔΒ}\ \left(\text{ή ΑΓ=ΔΒ ως διαφορές ίσων τμημάτων}\right) \\ \mathbf{2}.\ \text{από το } \mathbf{i}) \\ \mathbf{3}.\hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{A}_1 \overset{\text{i)}}{=} 180^\circ - \hat{B}_1 = \hat{B}_2\ (\text{ή } \hat{A}_2 = \hat{B}_2 \text{ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$ *Γ-Π-Γ είναι ίσα και*

επομένως θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους είσα δηλαδή:

4.ΑΜ=ΒΜ **5.**ΜΓ=ΜΔ **6.** $A\hat{M}\Gamma = B\hat{M}\Delta$ *(που έτσι κι αλλιώς είναι ίσες ως κατακορυφήν)*

iii) **Τ**α τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ είναι ίσα γιατί έχουν:

1. ΟΑ=ΟΒ (ως ακτίνες του κύκλου (Ο,ρ))
2. ΟΜ κοινή
3. ΑΜ=ΒΜ (από το ερώτημα **ii**)

Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας Π-Π-Π είναι ίσα και επομένως θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους είσα δηλαδή:

4. $\hat{O}_1=\hat{O}_2$ **5.** $\hat{M}_1=\hat{M}_2$ **6.** $O\hat{A}M = O\hat{B}M$

iv) Από την $\hat{O}_1=\hat{O}_2$ προκύπτει ότι η ΟΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$.

Σημείωση: *Στην πιο κάτω άσκηση δεν είναι απαραίτητο να μάθετε και να γράψετε την σκέψη.Την αφήνω όμως μήπως βοηθήσει να καταλάβουμε πως μπορούμε να λύσουμε αυτή ή παρόμοιες ασκήσεις*

Α2. Να αποδείξετε ότι αν σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και $\mathrm{A'B'\Gamma'}$ είναι $\alpha = \alpha'$, $\upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}$, και $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

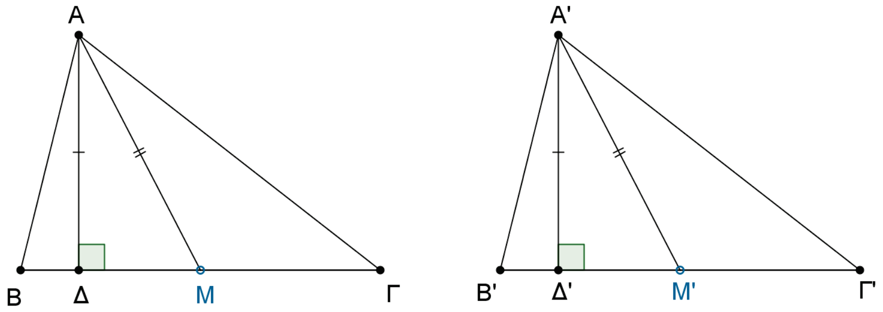
*Υπενθυμίζω ότι με **α** συμβολίζουμε την πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την κορυφή Α, δηλαδή α=ΒΓ, με υ_α το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά **α** και με μ_α την **διάμεσο** που αντιστοιχεί στην πλευρά **α**.*

*Προσοχή!: **1.** Σε κάθε ισότητα τριγώνων (εκτός της τελευταίας) να γράφετε τις ισότητες όλων των αντίστοιχων στοιχείων που αυτή μας δίνει εκτός κι αν δεν είναι απαραίτητο.*

***2.** Αν δεν μπορείτε να αποδείξετε κάποιο ερώτημα μπορείτε παραταύτα να το θεωρείτε δεδομένο στην επεξεργασία των επόμενων ερωτημάτων.*

Σημείωση: Μόνο με λόγια η άσκηση μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

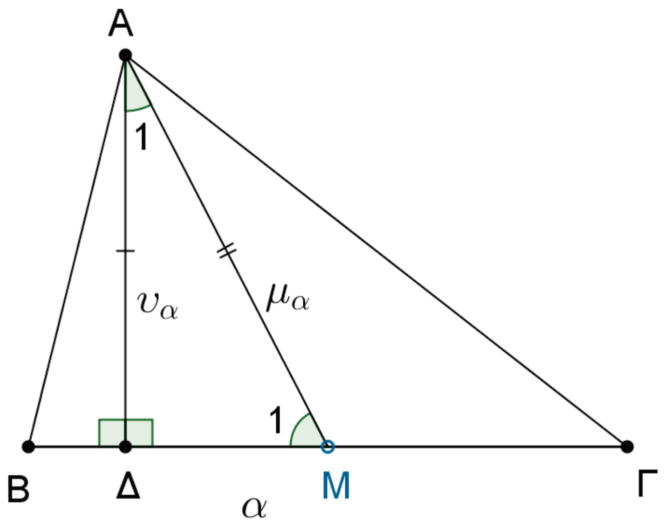
Αν δύο τρίγωνα έχουν: μια πλευρά του ενός ίση με μια πλευρά του άλλου και τα ύψη και τις διαμέσους που αντιστοιχούν σε αυτές τις ίσες πλευρές αντιστοίχως ίσες τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

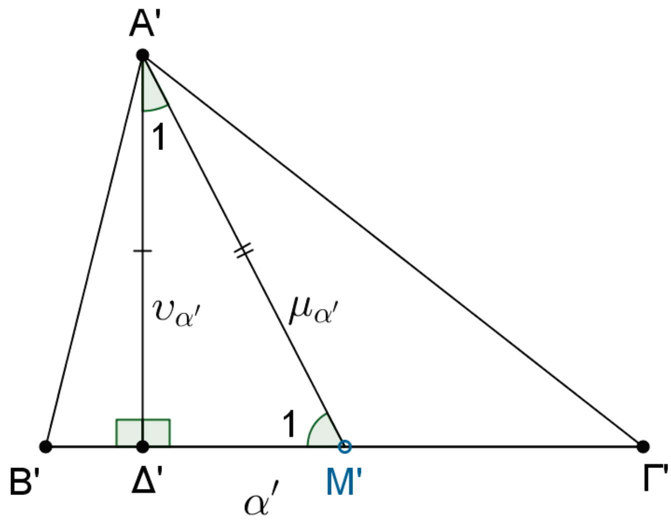


ΛΥΣΗ:

Σκέψη: *Και τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων θέλουν ισότητα τριών κύριων στοιχείων των προς σύγκριση τριγώνων.Από τα δεδομένα έχω μόνο ότι* $\mathrm{B\Gamma = B'\Gamma'}$, *οπότε θα προσπαθήσω να βρώ και ισότητα επιπλέον πλευρών και γωνιών από σύγκριση άλλων τριγώνων.Ας θυμηθούμε εδώ το σχόλιο της σελ 38 του σχολικού ότι «η ισότητα τριγώνων είναι η βασική μέθοδος για την απόδειξη της ισότητας τμημάτων ή γωνιών»*

Δεδομένου ότι $\mathrm{A\Delta = A'\Delta'}$ *και* $\mathrm{AM = A'M'}$ *οδηγούμαστε σχεδόν αυτονόητα στην σύγκριση των ορθογωνίων τριγώνων ΔΑΜ και* $\mathrm{\Delta'A'M'}$





▶ Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΜ και $\Delta'A'M'$ (με $A\hat{\Delta}M = A'\hat{\Delta}'M' = 90^o$).Αυτά έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{\Delta}M = A'\hat{\Delta}'M' = 90^o \\ i)\, A\Delta = A'\Delta' \ (\text{δεδομένα}) \\ AM = A'M' \ (\text{δεδομένα}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

§ 3.6 Θεώρημα ΙΙ *«Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα»* τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα.

Επομένως θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα δηλαδή:

i) $\Delta M = \Delta'M'$

ii) $\hat{M}_1 = \hat{M}'_1$

iii) $\hat{A}_1 = \hat{A}'_1$

Σκέψη: *Δυστυχώς καμμιά από τις ισότητες που μου έδωσε η σύγκριση των ορθογωνίων τριγώνων δεν με βοηθάει άμεσα στην σύγκριση των ΑΒΓ και $A'B'\Gamma'$.Ομως μπορώ να τις χρησιμοποιήσω σε μια ακόμα σύγκριση τριγώνων που ελπίζουμε θα είναι πιο αποδοτική.*

● Τα τρίγωνα ΑΜΒ και $A'M'B'$ έχουν :

$$\left.\begin{array}{l} AM = A'M' \ (\text{δεδομένα}) \\ \hat{M}_1 = \hat{M}'_1 \ \text{όπως δείξαμε στο i)} \\ BM = B'M' \ \text{ως μισά των ίσων πλευρών } B\Gamma \text{ και } B'\Gamma' \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Π-Γ-Π είναι ίσα.}$$

Επομένως θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα δηλαδή:

i) $BA = B'A'$

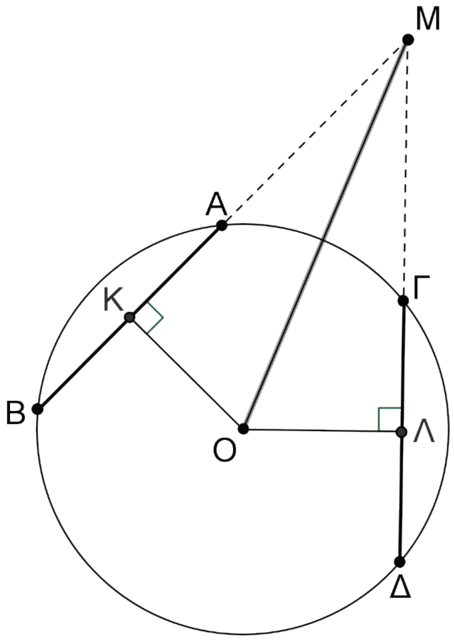
ii) $\hat{B} = \hat{B}'$

iii) $B\hat{A}M = B'\hat{A}'M'$

▶ Τα τρίγωνα ΑΒΓ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} BA = B'A' \left(\textit{από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων}\right) \\ \hat{B} = \hat{B}' \ \left(\textit{από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων}\right) \\ B\Gamma = B'\Gamma' \ \text{δεδομένα} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Π-Γ-Π τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα.}$$

Α5. Δίνεται κύκλος (Ο,R), οι ίσες χορδές του ΑΒ και ΓΔ και τα αποστήματά τους ΟΚ και ΟΛ αντίστοιχα.Αν οι προεκτάσεις των ΒΑ και ΔΓ τέμνονται στο Μ, να αποδείξετε ότι:



i) Τα τρίγωνα ΜΟΚ και ΜΟΛ είναι ίσα και να γράψετε τις ισότητες των υπόλοιπων αντίστοιχων στοιχείων τους.

ii) ΜΑ=ΜΓ

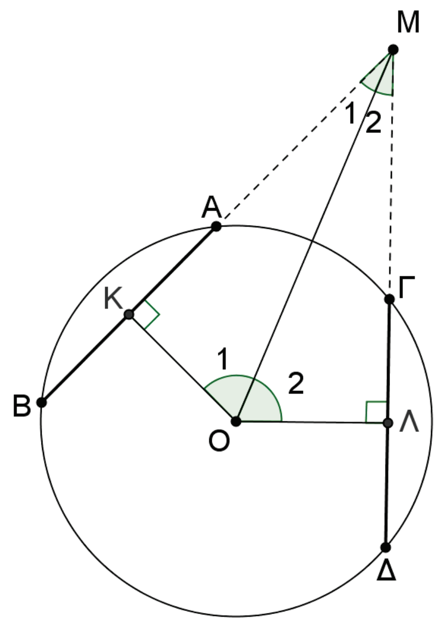
iii) ΜΒ=ΜΔ.

iv) Φέρτε τα ΟΑ και ΟΓ και αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ΜΑΟ και ΜΓΟ είναι ίσα. ***(Μονάδες 7,3)***

*<u>Προσοχή!</u>: **1.** Σε κάθε ισότητα τριγώνων (εκτός της τελαυταίας) να γράφετε τις ισότητες όλων των αντίστοιχων στοιχείων που αυτή μας δίνει εκτός κι αν δεν είναι απαραίτητο.*

***2.** Αν δεν μπορείτε να αποδείξετε κάποιο ερώτημα μπορείτε παραταύτα να το θεωρείτε δεδομένο στην επεξεργασία των επόμενων ερωτημάτων.*

Λύση:



i) Αφού οι χορδές είναι ίσες, *(από Θεώρημα ΙΙΙ)* και τα αποστήματα θα είναι ίσα δηλαδή ΟΚ=ΟΛ.

• Τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΟΜ και ΛΟΜ έχουν

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\mathrm{K}}=\hat{\Lambda}=90^\circ\\ \mathrm{OK}=\mathrm{O}\Lambda\\ \mathrm{OM}\ \textit{κοινή}\end{array}\right\}\Rightarrow$$ *Θεώρημα ΙΙ* είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα

αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\mathrm{M}}_1=\hat{\mathrm{M}}_2\\ \mathrm{MK}=\mathrm{M}\Lambda\ \ (\mathbf{1})\\ \hat{\mathrm{O}}_1=\hat{\mathrm{O}}_2\end{array}\right\}$$

ii) Από *§ 3.10-11 Πόρισμα ii* τα Κ και Λ είναι μέσα των ίσων χορδών ΑΒ και ΓΔ, οπότε ΚΑ=ΓΛ **(2)** ως μισά ίσων τμημάτων.

Από **(1)** και **(2)** συμπεραίνω ότι: ΜΑ=ΜΓ ως διαφορές ίσων τμημάτων.

iii) Αφού στο **ii)** δείξαμε ότι ΜΑ=ΜΓ και από τα δεδομένα ισχύει ΑΒ=ΓΔ, θα είναι και ΜΒ=ΜΔ ως αθροίσματα ίσων τμημάτων.

β' τρόπος

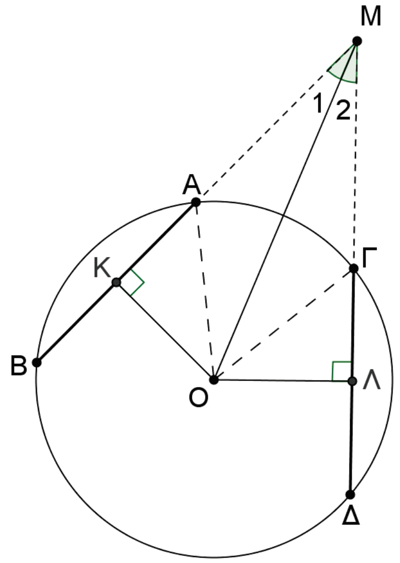
Αφού στο **i)** δείξαμε ότι ΜΚ=ΜΛ και ΚΒ=ΛΔ ως μισά των ίσων χορδών ΑΒ και ΓΔ, έχουμε:

ΜΒ=ΜΚ+ΚΒ=ΜΛ+ΛΔ=ΜΛ

Παρατήρηση: *Οπως ορθά παρατήρησε κάποιος μαθητής (Γ.Σ) μπορούμε να λύσουμε πρώτα το iii) ερώτημα και μετά το ii)*

iv) Τα τρίγωνα ΜΑΟ και ΜΓΟ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \text{ΟΜ κοινή} \\ \text{ΟΑ} = \text{ΟΓ ως ακτίνες του κύκλου} \\ \text{ΜΑ} = \text{ΜΓ από ii)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Π-Π-Π είναι ίσα.}$$



β' τρόπος

iv) Τα τρίγωνα ΜΑΟ και ΜΓΟ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \text{ΟΜ κοινή} \\ \hat{\text{Μ}}_1 = \hat{\text{Μ}}_2 \text{ από i)} \\ \text{ΜΑ} = \text{ΜΓ από ii)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Π-Γ-Π είναι ίσα.}$$