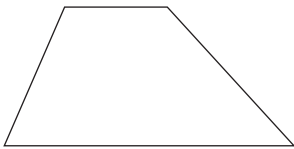


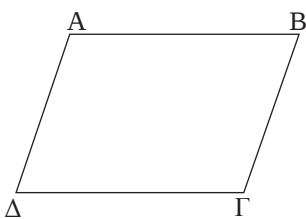
Σχήμα 1



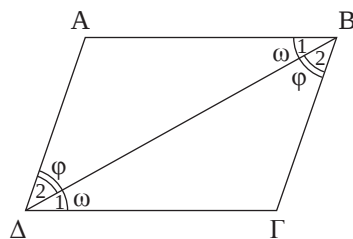
Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4



Σχήμα 5

5.1 Εισαγωγή

Όπως είδαμε στην §2.20, το ευθύγραμμο σχήμα που έχει τέσσερις πλευρές λέγεται τετράπλευρο. Κάθε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ.1) έχει δύο διαγωνίους ΑΓ και ΒΔ, οι οποίες τέμνονται σε εσωτερικό σημείο τους.

Στα επόμενα, όταν λέμε τετράπλευρο, θα εννοούμε **κυρτό** τετράπλευρο.

Το τετράπλευρο που έχει δύο μόνον πλευρές παράλληλες λέγεται **τραπέζιο** (σχ.2), ενώ το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες λέγεται **παραλληλόγραμμο** (σχ.3).

5.2 Παραλληλόγραμμο

Παραλληλόγραμμο

Ορισμός

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, όταν $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$.

► Ιδιότητες παραλληλογράμμων

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- ii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- iii) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ των i), ii)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ (σχ.5). Έχουμε:

$$\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \omega \text{ (εντός εναλλάξ).}$$

ΒΔ κοινή πλευρά.

$$\hat{B}_2 = \hat{A}_2 = \varphi \text{ (εντός εναλλάξ).}$$

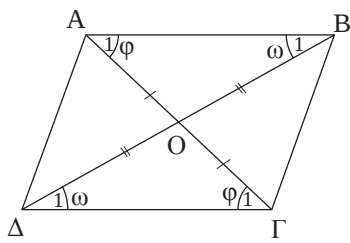
Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ είναι ίσα, οπότε $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$. Επίσης έχουμε $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi + \omega$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ της ιδιότητας iii)

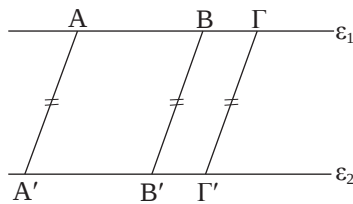
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ. Έχουμε:

$$AB = \Gamma\Delta$$

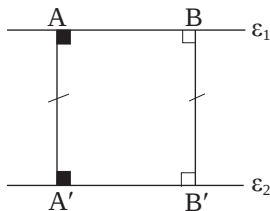
$$\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \omega \text{ (εντός εναλλάξ).}$$



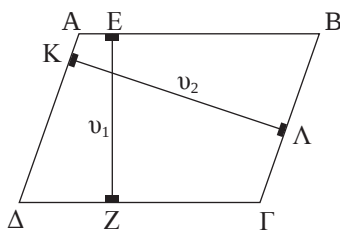
Σχήμα 6



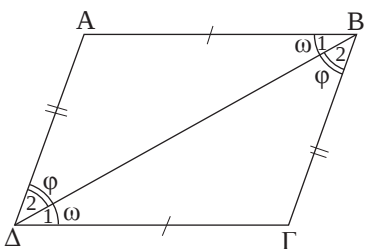
Σχήμα 7



Σχήμα 8



Σχήμα 9



Σχήμα 10

$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \varphi$ (εντός εναλλάξ).

Άρα, τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ είναι ίσα, οπότε ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ I

Το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του.

Για το λόγο αυτό λέγεται **κέντρο** του παραλληλογράμμου.

ΠΟΡΙΣΜΑ II

Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ίσα (σχ.7).

Αν τα τμήματα (σχ.8) είναι **κάθετα** στις παράλληλες, το κοινό μήκος τους λέγεται **απόσταση** των παραλλήλων. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις ευθείες των απέναντι πλευρών παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σε αυτές λέγεται **ύψος** του παραλληλογράμμου, ενώ οι απέναντι πλευρές του λέγονται **βάσεις** ως προς αυτό το ύψος (σχ.9).

► Κριτήρια για παραλληλόγραμμο

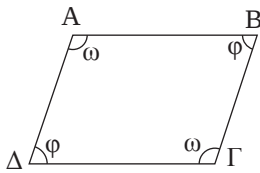
Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε προτάσεις (κριτήρια) οι οποίες εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο: Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- i) Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες.
- ii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
- iii) Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες.
- iv) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

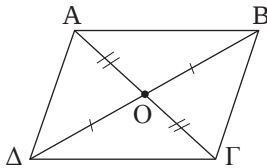
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Για να αποδείξουμε τα κριτήρια, θα πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό να αποδείξουμε ότι σε κάθε περίπτωση, οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου είναι παράλληλες.

- i) Έστω $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$ (σχ.10). Αν φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ, τότε σχηματίζονται τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ που είναι ίσα, γιατί $AB = \Gamma\Delta$, $A\Delta = B\Gamma$ και ΒΔ κοινή πλευρά. Άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ και $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \varphi$, οπότε $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 11



Σχήμα 12

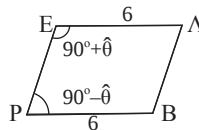
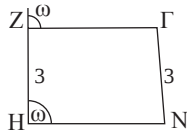
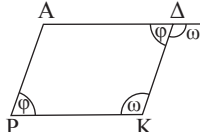
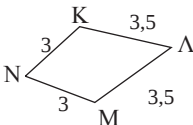
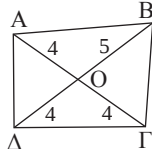
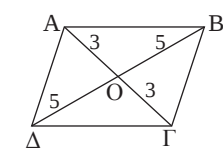
ii) Έστω $AB \parallel \Gamma\Delta$ (σχ.10). Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ είναι ίσα, γιατί $AB = \Gamma\Delta$, $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ και η $B\Delta$ είναι κοινή πλευρά. Επομένως, όμοια με το i), το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

iii) Αν $\hat{A} = \hat{\Gamma} = \omega$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi$ (σχ.11) η σχέση $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 4L$ γράφεται $2\omega + 2\varphi = 4L$ ή $\varphi + \omega = 2L$. Επομένως, έχουμε ότι $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2L$, οπότε $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\hat{A} + \hat{B} = 2L$, οπότε $A\Delta \parallel B\Gamma$, δηλαδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

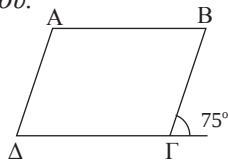
iv) Έστω $AO = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$ (σχ.12). Τα τρίγωνα AOB και $\Gamma O\Delta$, καθώς και τα τρίγωνα $AO\Delta$ και $BO\Gamma$ είναι ίσα. Επομένως, όμοια με το i), θα είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$, δηλαδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ
Ερωτήσεις Κατανόησης

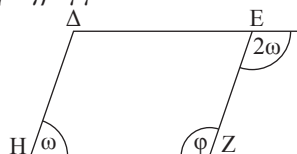
1. Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα, ποια όχι και γιατί;



2. Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμα;
3. Να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου.



4. Να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ του παραλληλογράμμου ΔEZH .



5. Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν:

- i) Δύο απέναντι γωνίες είναι ίσες. ☐
- ii) Οι διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές. ☐
- iii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες. ☐
- iv) Δύο απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες. ☐
- (Σημειώστε x σε κάθε σωστή πρόταση).

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι $\Delta E = B\Gamma$.
2. Έστω O το κέντρο παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Αν E και Z σημεία των OA και OG αντίστοιχα, ώστε $OE = OZ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BE\Delta Z$ είναι παραλληλόγραμμο.
3. Έστω E και Z , τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:
- i) το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.
- ii) οι $ΑΓ, ΒΔ$ και EZ συντρέχουν.
4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του $\hat{A}$. Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει την $ΑΓ$ στο E . Αν η παράλληλη από το E προς τη $B\Gamma$ τέμνει την AB στο Z , να αποδείξετε ότι $AE = BZ$.