

Σχήμα 14

► Ιδιότητες ορθογωνίου

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

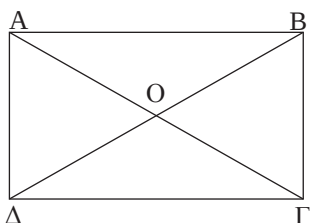
Έστω $AB\Gamma\Delta$ ορθόγωνιο. Θα αποδείξουμε ότι οι διαγώνιοι $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι ίσες (σχ. 14).

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $A\Delta$ κοινή, $AB = \Delta\Gamma$), οπότε $A\Gamma = B\Delta$.

► Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθόγωνιο

Ένα τετράπλευρο είναι ορθόγωνιο, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- i) Είναι **παραλληλόγραμμο** και έχει **μία ορθή** γωνία.
- ii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και οι **διαγώνιοί** του είναι **ίσες**.
- iii) Έχει **τρεις** γωνίες **ορθές**.
- iv) Όλες οι γωνίες του είναι **ίσες**.



Σχήμα 15

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- i) Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του παραλληλογράμμου.
- ii) Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο με $A\Gamma = B\Delta$. Τότε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα ($AB = \Delta\Gamma$, $A\Gamma = B\Delta$, $A\Delta$ κοινή), οπότε $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Αλλά $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2\angle$, οπότε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 1\angle$. Επομένως, το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθόγωνιο.
- iii) Αν έχει τρεις ορθές γωνίες θα είναι και η άλλη ορθή, αφού το άθροισμα των γωνιών κάθε τετραπλεύρου είναι $4\angle$.
- (iv) Αν όλες οι γωνίες είναι ίσες, προφανώς όλες είναι ορθές.

5.4 Ρόμβος

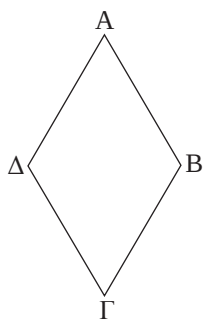
Ορισμός

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

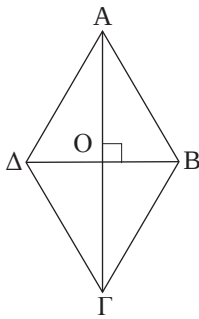
Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες προκύπτει ότι **όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες**.

► Ιδιότητες του ρόμβου

- i) Οι διαγώνιοι του ρόμβου **τέμνονται κάθετα**.
- ii) Οι διαγώνιοι του ρόμβου **διχοτομούν τις γωνίες του**.



Σχήμα 16



Σχήμα 17

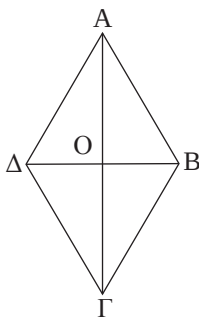
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $AB\Gamma\Delta$ ρόμβος. Επειδή το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές, η διάμεσος του AO είναι ύψος του και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Επομένως $AG \perp BD$ και η AG διχοτομεί την $\hat{A}$. Όμοια η AG διχοτομεί τη $\hat{\Gamma}$ και η BD τις $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$.

► Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος

Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- i) Έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
- ii) Είναι παραλληλόγραμμο και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- iii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
- iv) Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.



Σχήμα 18

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) και ii) Προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του ρόμβου.

iii) Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο με $AG \perp BD$.

Στο τρίγωνο $AB\Delta$ η AO είναι διάμεσος, αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Επίσης, η AO είναι και ύψος, επειδή $AG \perp BD$. Άρα το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές, οπότε $AB = AD$. Επομένως το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

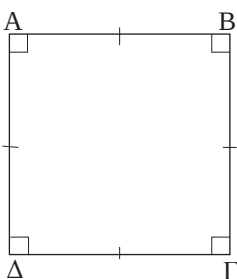
iv) Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο και AG διχοτόμος της $\hat{A}$. Τότε πάλι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές (αφού AO διχοτόμος και διάμεσος), οπότε το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

5.5 Τετράγωνο**Ορισμός**

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

► Ιδιότητες τετραγώνου

Από τον ορισμό προκύπτει ότι το τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες του ορθογωνίου και όλες τις ιδιότητες του ρόμβου. Επομένως, σε κάθε τετράγωνο:



Σχήμα 19