

Σχήμα 17

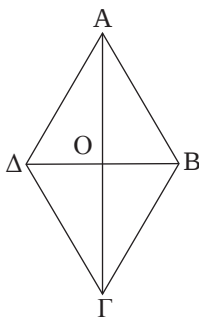
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $AB\Gamma\Delta$ ρόμβος. Επειδή το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές, η διάμεσος του AO είναι ύψος του και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Επομένως $AG \perp BD$ και η AG διχοτομεί την $\hat{A}$. Όμοια η AG διχοτομεί τη $\hat{\Gamma}$ και η BD τις $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$.

► Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος

Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- i) Έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
- ii) Είναι παραλληλόγραμμο και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- iii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
- iv) Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.



Σχήμα 18

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) και ii) Προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του ρόμβου.

iii) Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο με $AG \perp BD$.

Στο τρίγωνο $AB\Delta$ η AO είναι διάμεσος, αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Επίσης, η AO είναι και ύψος, επειδή $AG \perp BD$. Άρα το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές, οπότε $AB = AD$. Επομένως το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

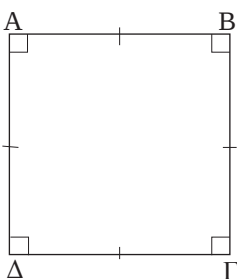
iv) Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο και AG διχοτόμος της $\hat{A}$. Τότε πάλι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές (αφού AO διχοτόμος και διάμεσος), οπότε το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

5.5 Τετράγωνο**Ορισμός**

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

► Ιδιότητες τετραγώνου

Από τον ορισμό προκύπτει ότι το τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες του ορθογωνίου και όλες τις ιδιότητες του ρόμβου. Επομένως, σε κάθε τετράγωνο:



Σχήμα 19

- i) Οι απέναντι πλευρές του είναι **παράλληλες**.
- ii) Όλες οι πλευρές του είναι **ίσες**.
- iii) Όλες οι γωνίες του είναι **ορθές**.
- iv) Οι διαγώνιοί του είναι **ίσες**, τέμνονται **κάθετα**, **διχοτομούνται** και **διχοτομούν** τις γωνίες του.

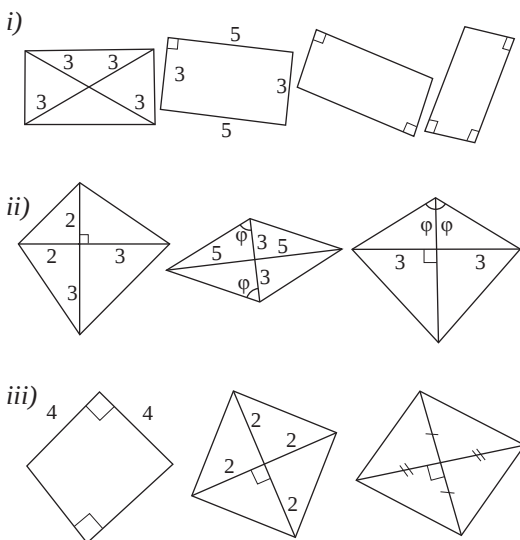
► Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο

Για να αποδείξουμε ότι ένα **τετράπλευρο** είναι **τετράγωνο**, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι **ορθογώνιο** και **ρόμβος**. Αποδεικνύεται ότι ένα **παράλληλόγραμμο** είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- i) Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- ii) Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
- iii) Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες.
- iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- v) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του.
- vi) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι
i) ορθογώνια, ii) ρόμβοι, iii) τετράγωνα,
ποια όχι και γιατί;



2. Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα **τετράπλευρο** είναι:
- i) Ορθογώνιο ii) Ρόμβος
3. Σε τι είδους τρίγωνα χωρίζονται τα παρακάτω σχήματα από τις διαγωνίους τους;
- i) Ορθογώνιο ii) Ρόμβος iii) Τετράγωνο
4. Να αναφέρετε δύο ομοιότητες και δύο διαφορές που αφορούν πλευρές, γωνίες ή διαγωνίους μεταξύ των ζευγών των σχημάτων:
- i) Τετράγωνο – Ρόμβος
 - ii) Τετράγωνο – Ορθογώνιο
 - iii) Ορθογώνιο – Ρόμβος
5. Σημειώστε x σε κάθε σωστή πρόταση:
- i) Οι διαγώνιοι του ρόμβου δεν είναι ίσες. ☐
 - ii) Όλες οι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες. ☐
 - iii) Ένας ρόμβος με μία ορθή γωνία είναι τετράγωνο. ☐
 - iv) Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος. ☐

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σε παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ φέρουμε $AE \perp ΔΓ$ και $ΓΖ \perp AB$. Να αποδείξετε ότι το $AZΓΕ$ είναι ορθογώνιο.
2. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με κέντρο O και $ΒΔ = 2ΑΓ$. Αν E, Z είναι τα μέσα των OB και $ΟΔ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $ΑΕΓΖ$ είναι ορθογώνιο.
3. Να αποδείξετε ότι αν οι διχοτόμοι των γωνιών παραλληλογράμμου δε συντρέχουν, τότε σχηματίζουν ορθογώνιο.
4. Να αποδείξετε ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν και μόνο αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.
5. Δίνεται ρόμβος $ABΓΔ$ με κέντρο O . Παίρνουμε δύο σημεία E και Z της $ΑΓ$, ώστε $OE = OZ = OB = OD$. Να αποδείξετε ότι το $ΔΕΒΖ$ είναι τετράγωνο.
6. Δίνεται τετράγωνο $ABΓΔ$. Στις πλευρές $AB, ΒΓ, ΓΔ$ και $ΔΑ$ παίρνουμε σημεία $K, Λ, Μ$ και N αντίστοιχα τέτοια, ώστε $AK = BL = ΓΜ = ΔN$. Να αποδείξετε ότι το $KΛΜN$ είναι τετράγωνο.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$, η διχοτόμος του $ΒΔ$ και M το μέσο της $ΒΔ$. Από το $Δ$ φέρουμε παράλληλη προς τη $ΒΓ$, που τέμνει την AB στο E . Αν η $ΕΜ$ τέμνει τη $ΒΓ$ στο Z να αποδείξετε ότι το $ΔΕΒΖ$ είναι ρόμβος.

2. Στις πλευρές AB και $ΒΓ$, τετραγώνου $ABΓΔ$ παίρνουμε σημεία E και Z αντίστοιχα, ώστε $AE = BZ$. Να αποδείξετε ότι
i) $AZ = ΔΕ$, ii) $AZ \perp ΔΕ$.
3. Σε ορθογώνιο $ABΓΔ$, E και Z είναι τα μέσα των $ΑΔ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα. Αν H είναι το σημείο τομής των AZ και $ΒΕ$ και $Θ$ το σημείο τομής των $ΔΖ$ και $ΓΕ$, να αποδείξετε ότι το $ΕΘΖΗ$ είναι ρόμβος.
4. Να αποδείξετε ότι αν δύο κάθετα τμήματα έχουν τα άκρα τους στις απέναντι πλευρές τετραγώνου, τότε είναι ίσα.

Σύνθετα Θέματα

1. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με $\hat{B} = 45^\circ$. Από το μέσο M της $ΓΔ$ φέρουμε κάθετο πάνω στη $ΓΔ$ και έστω E και Z τα σημεία στα οποία αυτή τέμνει τις $ΑΔ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα (ή τις προεκτάσεις τους). Να αποδείξετε ότι το $ΔΕΓΖ$ είναι τετράγωνο.
2. Σε ορθογώνιο $ABΓΔ$ φέρουμε $BE \perp ΑΓ$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $ΔΒΕ$ τέμνει τη $ΓΔ$ στο Z , να αποδείξετε ότι $ΒΓ = ΓΖ$.
3. Να αποδείξετε ότι: i) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της βάσης ισοσκελούς τριγώνου από τις ίσες πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με ένα από τα ύψη του), ii) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου, που βρίσκεται στο εσωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου, από τις πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με το ύψος του).

Εφαρμογές των παραλληλογράμμων**5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα****ΘΕΩΡΗΜΑ I**

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τρίγωνο $ABΓ$ και τα μέσα $Δ, Ε$ των $AB, ΑΓ$ αντίστοιχα (σχ.20). Θα αποδείξουμε ότι $ΔΕ // ΒΓ = \frac{ΒΓ}{2}$.