

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σε παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ φέρουμε $AE \perp ΔΓ$ και $ΓΖ \perp AB$. Να αποδείξετε ότι το $AZΓΕ$ είναι ορθογώνιο.
2. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με κέντρο O και $ΒΔ = 2ΑΓ$. Αν E, Z είναι τα μέσα των OB και OA αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $AEΓΖ$ είναι ορθογώνιο.
3. Να αποδείξετε ότι αν οι διχοτόμοι των γωνιών παραλληλογράμμου δε συντρέχουν, τότε σχηματίζουν ορθογώνιο.
4. Να αποδείξετε ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν και μόνο αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.
5. Δίνεται ρόμβος $ABΓΔ$ με κέντρο O . Παίρνουμε δύο σημεία E και Z της $ΑΓ$, ώστε $OE = OZ = OB = OA$. Να αποδείξετε ότι το $ΔEBZ$ είναι τετράγωνο.
6. Δίνεται τετράγωνο $ABΓΔ$. Στις πλευρές $AB, BΓ, ΓΔ$ και $ΔΑ$ παίρνουμε σημεία $K, Λ, Μ$ και N αντίστοιχα τέτοια, ώστε $AK = BL = ΓΜ = ΔN$. Να αποδείξετε ότι το $KΛΜN$ είναι τετράγωνο.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$, η διχοτόμος του $ΒΔ$ και M το μέσο της $ΒΔ$. Από το $Δ$ φέρουμε παράλληλη προς τη $BΓ$, που τέμνει την AB στο E . Αν η EM τέμνει τη $BΓ$ στο Z να αποδείξετε ότι το $ΔEBZ$ είναι ρόμβος.

2. Στις πλευρές AB και $BΓ$, τετραγώνου $ABΓΔ$ παίρνουμε σημεία E και Z αντίστοιχα, ώστε $AE = BZ$. Να αποδείξετε ότι
i) $AZ = ΔE$, ii) $AZ \perp ΔE$.
3. Σε ορθογώνιο $ABΓΔ$, E και Z είναι τα μέσα των $ΔΔ$ και $BΓ$ αντίστοιχα. Αν H είναι το σημείο τομής των AZ και BE και $Θ$ το σημείο τομής των $ΔZ$ και $ΓE$, να αποδείξετε ότι το $EΘZH$ είναι ρόμβος.
4. Να αποδείξετε ότι αν δύο κάθετα τμήματα έχουν τα άκρα τους στις απέναντι πλευρές τετραγώνου, τότε είναι ίσα.

Σύνθετα Θέματα

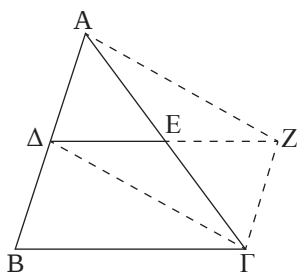
1. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με $\hat{B} = 45^\circ$. Από το μέσο M της $ΓΔ$ φέρουμε κάθετο πάνω στη $ΓΔ$ και έστω E και Z τα σημεία στα οποία αυτή τέμνει τις $ΔΔ$ και $BΓ$ αντίστοιχα (ή τις προεκτάσεις τους). Να αποδείξετε ότι το $ΔEΓZ$ είναι τετράγωνο.
2. Σε ορθογώνιο $ABΓΔ$ φέρουμε $BE \perp ΑΓ$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $ΔBE$ τέμνει τη $ΓΔ$ στο Z , να αποδείξετε ότι $BΓ = ΓZ$.
3. Να αποδείξετε ότι: i) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της βάσης ισοσκελούς τριγώνου από τις ίσες πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με ένα από τα ύψη του), ii) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου, που βρίσκεται στο εσωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου, από τις πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με το ύψος του).

Εφαρμογές των παραλληλογράμμων**5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα****ΘΕΩΡΗΜΑ I**

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τρίγωνο $ABΓ$ και τα μέσα $Δ, E$ των $AB, ΑΓ$ αντίστοιχα (σχ.20). Θα αποδείξουμε ότι $ΔE // \frac{BΓ}{2}$.



Σχήμα 20

Προεκτείνουμε τη ΔΕ κατά τμήμα $EZ = DE$. Το τετράπλευρο ΑΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Άρα $AD \parallel \Gamma Z$, οπότε $DB \parallel \Gamma Z$, αφού $AD = DB$. Έτσι το τετράπλευρο ΔΖΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:

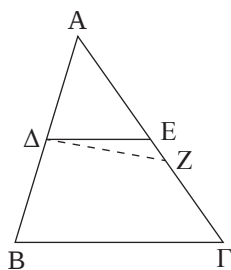
- (i) $\Delta Z \parallel B\Gamma$ άρα $\Delta E \parallel B\Gamma$ και
- (ii) $\Delta Z = B\Gamma$ ή $2\Delta E = B\Gamma$ ή $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ II

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας θεωρήσουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ας φέρουμε από το μέσο Δ της ΑΒ την παράλληλη προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ε (σχ.21). Θα αποδείξουμε ότι το Ε είναι το μέσο της ΑΓ. Έστω ότι το Ε δεν είναι μέσο της ΑΓ. Αν Ζ είναι το μέσο της ΑΓ, το τμήμα ΔΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα $\Delta Z \parallel B\Gamma$. Έτσι, όμως, έχουμε από το Δ δύο παράλληλες προς τη ΒΓ, που είναι άτοπο. Άρα το Ε είναι μέσο της ΑΓ.



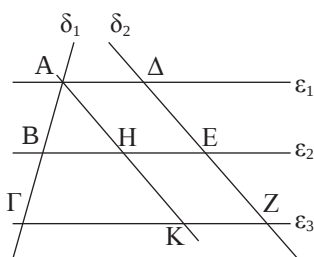
Σχήμα 21

ΘΕΩΡΗΜΑ III

Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ οι οποίες τέμνουν την δ_1 στα σημεία Α, Β, Γ και ορίζουν σε αυτή τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ (σχ.22). Αν μια άλλη ευθεία δ_2 τέμνει τις $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, θα αποδείξουμε ότι $DE = EZ$.

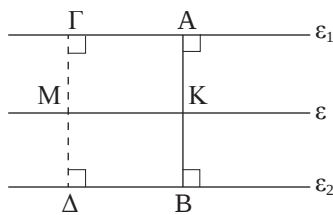


Σχήμα 22

Φέρουμε $AK \parallel \Delta Z$. Τότε τα τετράπλευρα ΑΔΕΗ και ΕΖΚΗ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε $AH = DE$ (1) και $HK = EZ$ (2). Στο τρίγωνο ΑΚΓ το Β είναι το μέσο της ΑΓ και $BH \parallel \Gamma K$. Άρα το Η είναι μέσο της ΑΚ, δηλαδή $AH = HK$ (3). Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $DE = EZ$.

► Η μεσοπαράλληλος δύο παραλλήλων

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 και ένα τμήμα $AB = u$ κάθετο προς αυτές, το οποίο έχει τα άκρα του στις



Σχήμα 23

ε_1 και ε_2 . Αν από το μέσο Κ της ΑΒ φέρουμε την ευθεία ε παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2 , παρατηρούμε ότι κάθε σημείο Μ της ε **ισαπέχει** από τις ε_1 και ε_2 , αφού $ΜΓ = ΜΔ = \frac{v}{2}$.

Αντίστροφα, αν ένα σημείο Μ ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2 , το Μ τότε είναι σημείο μεταξύ των παραλλήλων και ισχύει $ΜΓ + ΜΔ = ΓΔ = v$, οπότε $ΜΓ = ΜΔ = \frac{v}{2}$.

Έτσι τα τετράπλευρα ΜΓΑΚ και ΜΔΒΚ είναι παραλληλόγραμμα ($ΜΓ // ΑΚ$, $ΜΔ // ΚΒ$), οπότε $ΜΚ // \varepsilon_1, \varepsilon_2$. Επομένως, το Μ ανήκει στην ευθεία ε .

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι:

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 είναι μία ευθεία ε παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2 , η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δύο παράλληλες.

Η ευθεία ε λέγεται **μεσοπαράλληλος** των ε_1 και ε_2 .

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Απόδειξη

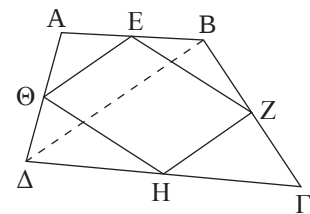
Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ, Η, Θ των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

Φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ (σχ.24α). Παρατηρούμε ότι τα Ε και Θ είναι τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΔ, οπότε $ΕΘ // \frac{ΒΔ}{2}$ (1).

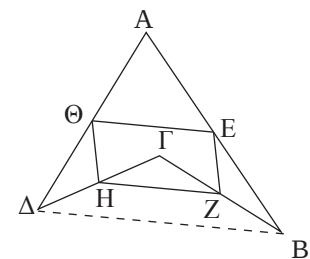
Όμοια από το τρίγωνο ΒΓΔ προκύπτει ότι $ΖΗ // \frac{ΒΔ}{2}$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $ΕΘ // ΖΗ$, οπότε το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει και σε μη κυρτό τετράπλευρο (σχ.24β).



Σχήμα 24α



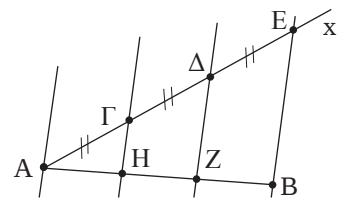
Σχήμα 24β

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα (σχ.25).

Λύση

Φέρουμε μια ημιευθεία Αx και παίρνουμε σε αυτή τα ίσα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ. Φέρουμε τη ΒΕ και από τα Δ, Γ και Α παράλληλες προς αυτή, οι οποίες τέμνουν την ΑΒ στα σημεία Ζ και Η. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα ΙΙΙ, σελ. 110, θα είναι $ΑΗ = ΗΖ = ΖΒ$.



Σχήμα 25