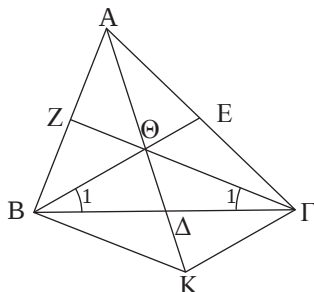


5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 26

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τις δύο διαμέσους ΒΕ και ΓΖ. Επειδή $\hat{B}_1 + \hat{G}_1 < \hat{B} + \hat{G} < 2L$, οι δύο διάμεσοι τέμνονται σε ένα εσωτερικό σημείο Θ του τριγώνου. Αν η ΑΘ τέμνει τη ΒΓ στο Δ, θα αποδείξουμε ότι i) η ΑΔ είναι η τρίτη διάμεσος του τριγώνου, δηλαδή $BD = \Delta\Gamma$ και ii) $A\Theta = \frac{2}{3} A\Delta$.

i) Στην ημιευθεία ΘΔ παίρνουμε τμήμα $\Theta K = A\Theta$. Παρατηρούμε ότι τα σημεία Ε και Θ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΚΓ, οπότε $E\Theta \parallel \frac{GK}{2}$ (1).

Όμοια από το τρίγωνο ΑΒΚ έχουμε $Z\Theta \parallel \frac{BK}{2}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $BE \parallel \Gamma K$ και $\Gamma Z \parallel BK$, δηλαδή το ΒΘΓΚ είναι παραλληλόγραμμο (3). Άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, οπότε $BD = \Delta\Gamma$.

Το σημείο Θ, στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι του ΑΒΓ, λέγεται **βαρύκεντρο** (ή **κέντρο βάρους**) του τριγώνου.

ii) Από το παραλληλόγραμμο ΒΘΓΚ έχουμε ακόμη

$$\Theta\Delta = \Delta K = \frac{\Theta K}{2}, \text{ άρα } \Theta\Delta = \frac{A\Theta}{2} \text{ ή } A\Theta = 2\Theta\Delta.$$

Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι

$$E\Theta = \frac{\Gamma K}{2} = \frac{B\Theta}{2} \text{ ή } B\Theta = 2\Theta E.$$

Όμοια από τις (2) και (3) έχουμε $\Gamma\Theta = 2\Theta Z$. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το βαρύκεντρο έχει την ιδιότητα να χωρίζει κάθε διάμεσο σε δύο τμήματα που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου. Επίσης έχουμε ότι $A\Delta = A\Theta + \Theta\Delta = 2\Theta\Delta + \Theta\Delta = 3\Theta\Delta$. Άρα

$$\Theta\Delta = \frac{1}{3} A\Delta, \text{ οπότε } A\Theta = \frac{2}{3} A\Delta.$$

Όμοια προκύπτει ότι $B\Theta = \frac{2}{3} BE$ και $\Gamma\Theta = \frac{2}{3} \Gamma Z$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Η απόσταση του βαρυκέντρου Θ ενός τριγώνου ΑΒΓ από κάθε κορυφή του ισούται με τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

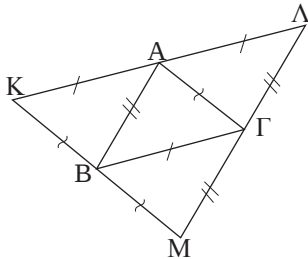
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην παραπάνω πρόταση θεωρήσαμε το σημείο τομής Θ των δύο διαμέσων ΒΕ και ΓΖ και αποδείξαμε ότι η ΑΘ αν προεκταθεί είναι η τρίτη διάμεσος ΑΔ. Αυτός ο τρόπος αποτελεί μια **βασική μέθοδο** για να αποδεικνύουμε ότι τρεις ευθείες **συντρέχουν** σε κάποιο σημείο.

5.8 Το ορθόκεντρο τριγώνου

Λήμμα

Οι παράλληλες, που άγονται από τις κορυφές ενός τριγώνου προς τις απέναντι πλευρές του, σχηματίζουν τρίγωνο, το οποίο έχει ως μέσα των πλευρών του τις κορυφές του αρχικού τριγώνου.



Σχήμα 27

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

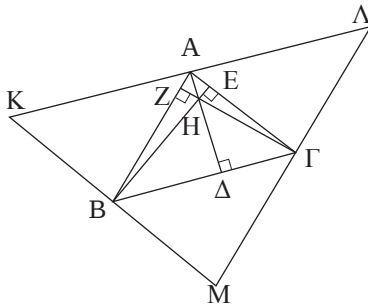
Από τις κορυφές Α, Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές του, οι οποίες ορίζουν ένα νέο τρίγωνο ΚΛΜ (σχ.27).

Λόγω των σχηματιζόμενων παραλληλογράμμων ΚΑΓΒ, ΛΑΒΓ και ΜΒΑΓ έχουμε: $KA = BG = AL$, $LG = AB = GM$ και $KB = AG = BM$.

Επομένως τα σημεία Α, Β, Γ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΚΛΜ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.



Σχήμα 28

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

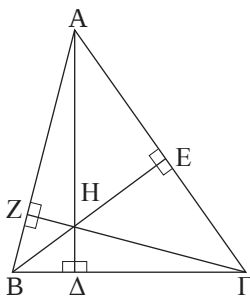
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Από τις κορυφές του Α, Β, Γ φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές (σχ.28). Σύμφωνα με το Λήμμα, στο τρίγωνο ΚΛΜ τα σημεία Α, Β, Γ είναι τα μέσα των πλευρών του. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι κάθετες στις ΚΛ, ΚΜ και ΜΛ αντίστοιχα (αφού είναι κάθετες στις ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ) και μάλιστα είναι κάθετες στα μέσα τους. Δηλαδή οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου ΚΛΜ, οπότε θα διέρχονται από το ίδιο σημείο Η. Το σημείο Η λέγεται **ορθόκεντρο** του τριγώνου ΑΒΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Οι κορυφές Α, Β, Γ, τριγώνου ΑΒΓ και το ορθόκεντρό του Η αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα, δηλαδή κάθε ένα από αυτά τα σημεία είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, που ορίζεται από τα άλλα τρία σημεία.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, το ορθόκεντρο είναι η κορυφή της ορθής γωνίας, ενώ σε αμβλυγώνιο τρίγωνο το ορθόκεντρο βρίσκεται εκτός του τριγώνου.



Σχήμα 29

Πράγματι οι κορυφές π.χ. Β, Γ και το ορθόκεντρο Η του τριγώνου ΑΒΓ ορίζουν το τρίγωνο ΒΗΓ.

Τα ύψη ΗΔ, ΒΖ και ΓΕ του τριγώνου ΒΗΓ τέμνονται στο Α, οπότε το Α είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΗΓ.