

δείξετε ότι η κάθετη από το M στην AB , η κάθετη από το A στην EG και η BD συντρέχουν.

7. Αν K και L είναι οι προβολές της κορυφής A τριγώνου $AB\Gamma$ στην εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- Το $AKBL$ είναι ορθογώνιο.
- Η ευθεία KL διέρχεται από το μέσο της AG .

8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) το ύψος του AD και η διάμεσός του AM . Αν E, Z οι προβολές του Δ στις AB και AG αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

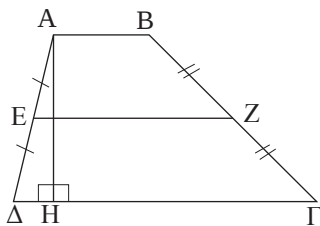
- $AD = EZ$,
- $AM \perp EZ$,
- Η διάμεσος AM το τμήμα DZ και η παράλληλη προς την EZ από το B συντρέχουν.

Τραπεζίδια

5.10 Τραπεζίδιο

Ορισμός

Τραπεζίδιο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.



Σχήμα 34

Οι παράλληλες πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ (σχ.34) του τραπεζίδιου $AB\Gamma\Delta$ λέγονται **βάσεις** του τραπεζίδιου.

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στις βάσεις του τραπεζίδιου με τα άκρα του στους φορείς των βάσεων λέγεται **ύψος** του τραπεζίδιου. Το ευθύγραμμο τμήμα EZ που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται **διάμεσος** του τραπεζίδιου.

ΘΕΩΡΗΜΑ I

Η διάμεσος του τραπεζίδιου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημίθροισμά τους.

Δηλαδή, αν EZ διάμεσος του τραπεζίδιου $AB\Gamma\Delta$, τότε:

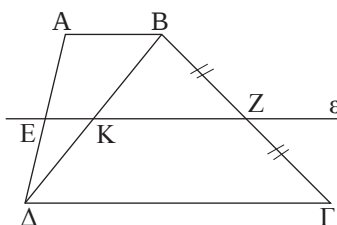
$$i) EZ \parallel AB, \Gamma\Delta \text{ και } ii) EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

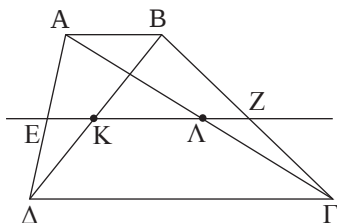
Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) (σχ.35), τη διαγώνιο του $B\Delta$ και E το μέσο της AD . Από το E φέρουμε ευθεία ϵ παράλληλη των AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνει τις $B\Delta$ και $B\Gamma$ στα K και Z αντίστοιχα. Τότε:

Στο τρίγωνο $AB\Delta$ το E είναι μέσο της AD και $EK \parallel AB$, οπότε το K είναι το μέσο της $B\Delta$ και $EK = \frac{AB}{2}$ (1).

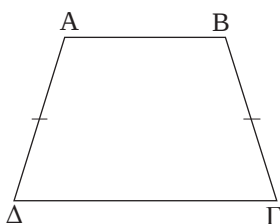
Επίσης στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ το K είναι μέσο της $B\Delta$ και $KZ \parallel \Gamma\Delta$, οπότε το Z είναι το μέσο της $B\Gamma$ και $KZ = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ (2).



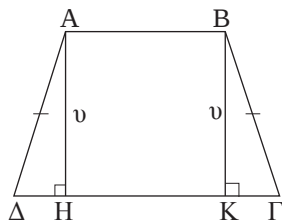
Σχήμα 35



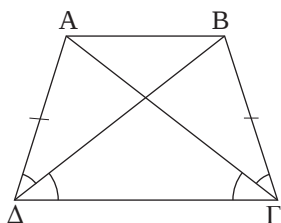
Σχήμα 36



Σχήμα 37



Σχήμα 38



Σχήμα 39

Επομένως η EZ είναι διάμεσος του τραπέζιου και

- i) $EZ \parallel AB, \Gamma\Delta$ (από κατασκευή).
 - ii) Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι
- $$EK + KZ = \frac{AB}{2} + \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad \text{ή} \quad EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Η διάμεσος EZ τραπεζίου ABΓΔ διέρχεται από τα μέσα K και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα KΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αποδείξαμε παραπάνω ότι το K είναι μέσο της BΔ (σχ.35). Όμοια, αν φέρουμε την ΑΓ (σχ.36), στο τρίγωνο ΑΔΓ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και $ΕΛ \parallel \Gamma\Delta$, οπότε το Λ είναι μέσο της ΑΓ και $ΕΛ = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ (3).

Επομένως, η διάμεσος EZ του τραπεζίου διέρχεται από τα μέσα K, Λ των διαγωνίων του και προφανώς $K\Lambda \parallel AB, \Gamma\Delta$. Επίσης από τις (1) και (3) προκύπτει ότι:

$$ΕΛ - ΕΚ = \frac{\Gamma\Delta}{2} - \frac{AB}{2} \quad \text{ή} \quad K\Lambda = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2} \quad (\text{με } \Gamma\Delta > AB).$$

5.11 Ισοσκελές τραπέζιο

Ορισμός

Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

► Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου

Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:

- i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.
- ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Έστω ABΓΔ ισοσκελές τραπέζιο ($AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AD = BG$). Φέρουμε τα ύψη ΑΗ και ΒΚ. Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΒΚΓ είναι ίσα ($\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ$, $AD = BG$ και $AH = BK = v$), οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$. Επειδή $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), έχουμε και $\hat{A} = \hat{B}$.

ii) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΔΓ (σχ.39) είναι ίσα ($AD = BG$, $\Gamma\Delta$ κοινή και $\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$), οπότε $AG = BD$.

► Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις.

- i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.
- ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

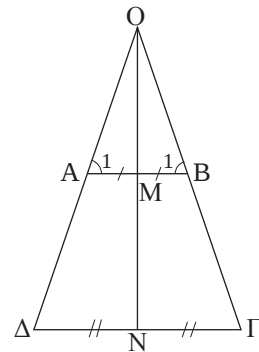
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχθεί ότι σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο:

- i) αν προεκτείνουμε τις μη παράλληλες πλευρές του σχηματίζονται δύο ισοσκελή τρίγωνα,
- ii) η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι μεσοκάθετος της κάθε βάσης.

Απόδειξη

- i) Έστω $AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τραπέζιο ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και O το σημείο τομής των $A\Delta$ και $B\Gamma$. Τα τρίγωνα OAB και $O\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελή, αφού $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ ($AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τραπέζιο).
- ii) Η μεσοκάθετος ε της βάσης AB διέρχεται από το O , επειδή το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές. Η ε είναι κάθετος και στη $\Gamma\Delta$ επειδή $\Gamma\Delta \parallel AB$. Αφού η ε διέρχεται από το O , είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $O\Gamma\Delta$, άρα μεσοκάθετος και στη $\Gamma\Delta$.

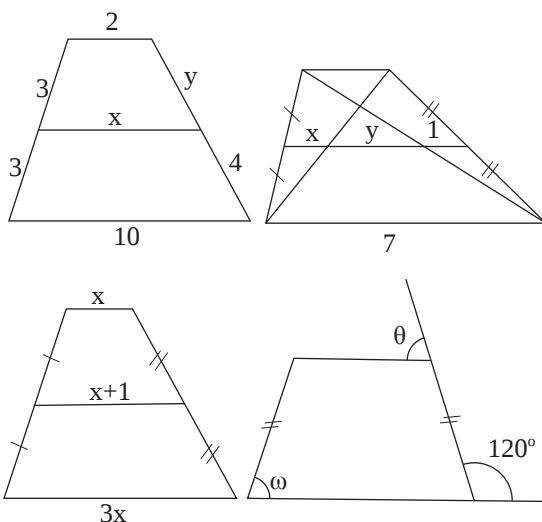


Σχήμα 40

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

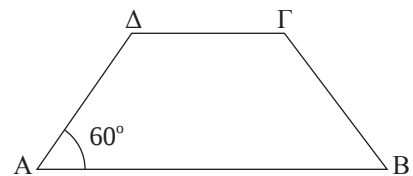
Ερωτήσεις Κατανόησης

- Από τα παρακάτω τραπέζια να βρείτε τα x , y , ω και θ .



- Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι ισοσκελές τραπέζιο;

- Τι ονομάζεται διάμεσος τραπέζιου; Ποιες ιδιότητες έχει;
- Στο ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι: $AB = 5x$, $\Delta\Gamma = 3x$ και $\hat{A} = 60^\circ$. Η περίμετρος του τραπέζιου είναι:



- i) $10x$ ii) $11x$ iii) $12x$
- iv) $13x$ v) $14x$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

- Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και η διάμεσός του EZ . Αν οι μη παράλληλες πλευρές του $A\Delta$, $B\Gamma$ τέμνονται στο K και H , Θ είναι τα μέσα των KA και KB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα E , Z , H , Θ είναι κορυφές τραπέζιου.

2. Αν Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα ισοσκελούς τριγώνου ABG ($AB = AG$), να αποδείξετε ότι το ΔEGB είναι ισοσκελές τραπέζιο.
3. Οι διαγώνιοι ισοσκελούς τραπέζιου $ABGD$ ($AB \parallel GD$) τέμνονται στο O . Αν E, Z, H, Θ είναι τα μέσα των OA, OB, OG, OD αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $EZH\Theta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
4. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABGD$ και το ύψος του AE . Αν K, Λ είναι τα μέσα των AD και BG αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $K\Lambda GE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
5. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ABGD$ ($AB \parallel GD$) με $AB < GD$ και τα ύψη του AE και BZ . Να αποδείξετε ότι $DE = \Gamma Z = \frac{GD - AB}{2}$.
6. Από την κορυφή A τριγώνου ABG φέρουμε ευθεία ε που δεν τέμνει το τρίγωνο και α ς είναι BB' και $\Gamma\Gamma'$ οι αποστάσεις των B και Γ από την ευθεία ε . Αν M είναι το μέσο της $B'\Gamma'$ και K το μέσο της διαμέσου AD να αποδείξετε ότι $MK = \frac{AD}{2}$.
7. Αν σε τραπέζιο η μία βάση είναι διπλάσια της άλλης, να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι χωρίζουν τη διάμεσο σε τρία ίσα τμήματα.
8. Δίνεται τραπέζιο $ABGD$ ($AB \parallel GD$) με $GD = 3AB$ και K, Λ τα μέσα των διαγωνίων του ΔB και AG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το $AK\Lambda B$ είναι παραλληλόγραμμο. Πότε αυτό είναι ορθογώνιο;
9. Δίνεται τραπέζιο $ABGD$ ($AB \parallel GD$) με $GD = \frac{3}{2}AB$. Αν E, Z, H είναι τα μέσα των AB, BG και DE αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $ABZH$ είναι παραλληλόγραμμο. Αν η προέκταση της AH τέμνει τη GD στο Θ , τότε $\Theta\Delta = \Delta\Gamma - AB$.
10. Αν $A', B', \Gamma', \Delta', K'$ είναι οι προβολές των κορυφών και του κέντρου K παραλληλογράμμου $ABGD$ αντίστοιχα σε ευθεία ε που αφήνει όλες τις κορυφές του προς το ίδιο μέρος της, να αποδείξετε ότι $AA' + BB' + \Gamma\Gamma' + \Delta\Delta' = 4KK'$.

Σύνθετα Θέματα

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Σε τραπέζιο $ABGD$ ($AB \parallel GD$) η διχοτόμος της γωνίας του B τέμνει τη διάμεσο του EZ στο H . Να αποδείξετε ότι $B\hat{H}\Gamma = 90^\circ$.
2. Σε ισοσκελές τρίγωνο ABG ($AB = AG$) M είναι το μέσο της AB . Αν η μεσοκάθετος της AB τέμνει την AG στο Z και η παράλληλη από το Z προς τη BG τέμνει την AB στο H , να αποδείξετε ότι $\Gamma H = AZ$.
3. Δίνεται τραπέζιο $ABGD$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 120^\circ$. Αν $AB = 2\alpha$ και $BG = \alpha$ να υπολογίσετε τη διάμεσο EZ , ως συνάρτηση του α .
4. Σε ένα τραπέζιο $ABGD$, η μία από τις μη παράλληλες πλευρές του AD είναι ίση με το άθροισμα των βάσεων. Αν M είναι το μέσο της BG , να αποδείξετε ότι $\hat{A}M\Delta = 90^\circ$.
5. Από το μέσο E της πλευράς BG ισοσκελούς τραπέζιου $ABGD$ ($AB \parallel GD$) φέρουμε παράλληλη προς την AD που τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο M . Να αποδείξετε ότι $BM \perp \Delta\Gamma$.
6. Δίνεται τρίγωνο ABG και το ύψος του AH . Αν Δ, E, Z είναι τα μέσα των AB, AG και BG αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο.
1. Σε τραπέζιο $ABGD$ ($AB \parallel GD$) έχουμε $AD = AB + GD$. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ τέμνονται στη BG .
2. Δίνεται τραπέζιο $ABGD$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $BG = 2GD$. Αν M είναι το μέσο της BG , να αποδείξετε ότι $\hat{A}M\Gamma = 3\hat{M}\Delta B$.
3. Μια ευθεία ε διέρχεται από την κορυφή Δ ενός παραλληλογράμμου $ABGD$ και έχει εκατέρωθεν αυτής τις κορυφές B και Γ . Αν A', B' και Γ' οι προβολές των A, B και Γ αντίστοιχα στην ευθεία ε , να αποδείξετε ότι $AA' - \Gamma\Gamma' = BB'$ (με $AA' > \Gamma\Gamma'$).
4. Δίνεται ορθογώνιο ABG ($\hat{A} = 90^\circ$) και Δ, E τα μέσα των AB και BG αντίστοιχα. Από το μέσο Z του AD φέρουμε παράλληλη προς την AG που τέμνει τη BG στο H . Αν $ZH = \frac{3}{8}BG$, να υπολογισθεί η γωνία $\hat{B}$.
5. Σε τραπέζιο $ABGD$ ($AB \parallel GD$) με $AB < GD$, έστω M το μέσο της BG . Να αποδείξετε ότι
 - i) αν $\Delta M = \Delta\Gamma$ και η παράλληλη από το A προς τη BG τέμνει τη ΔM στο E , τότε $AM = BE$,
 - ii) αν E είναι το μέσο της ΔM , τότε $AE = \frac{3}{4}BG$.