

# ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**58.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^5 - x^3 + 1)$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

iii)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 1)^{100}$

iv)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x - 1}$

**59.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x}{x^5 + x}$

iii)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2}$

iv)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

**60.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x^2+5} - 3}$

iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$

iv)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+14} - 4}$

**61.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^2}{x^3 - 3x^2 + 2x}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$

iv)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x+15} - 4}$

**62.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 8}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - x^2}{x - 2}$

iii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x}{x^3 - x}$

iv)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x}{x^4 - 1}$

**63.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 6x + 8}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 8x + 15}$

iii)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{16 - x^2}$

iv)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{5x} - 5}{x^2 - 6x + 5}$

**64.** Αν  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 1$ , να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 3} [2f(x) + 3g(x)]$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3f(x)}{g(x) + 1}$

iii)  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{f(x) + 2g(x)}$

iv)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g^2(x)}{f^2(x) - x}$

**65.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{\sqrt{x-1} - 1}.$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

ii) Να υπολογίσετε τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

β)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x) + 4}}{f(x) - 5x}$

**66.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}, \quad x \in \mathbb{R} - \{\pm 3\}.$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

iii)  $\lim_{x \rightarrow -3} (x + 3)f(x)$

iv)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2}$

72. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & , \quad x \neq 3 \\ \alpha + 1 & , \quad x = 3 \end{cases}$$

Να βρείτε:

- i) το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- ii) την τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 3$ .

73. Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και τέτοια, ώστε

$$xf(x) = x^2 + 2x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής, να βρείτε:

- i) την τιμή  $f(0)$
- ii) το όριο  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 f(x)}{x + 2}$ .

74. Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και τέτοια, ώστε

$$(x - 5)f(x) = x^2 - 5x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής, να βρείτε:

- i) την τιμή  $f(5)$
- ii) το όριο  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5f(x)}{x - 5}$ .

75. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(5, 2)$ , να υπολογίσετε τα όρια:

- i)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$
- ii)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{f(x) + 14}}{1 - f(x)}$ .

## ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

82. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

i)  $f(x) = 5x^4$

ii)  $f(x) = 3x^{-2}$

iii)  $f(x) = -2\sqrt[3]{x}, \quad x > 0$

iv)  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}.$

83. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

i)  $f(x) = x + \eta\mu x$

ii)  $g(x) = e^x - x^2$

iii)  $h(x) = x^7 - x^8 + 4$

iv)  $f(x) = 2x^2 - 1.$

84. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

i)  $g(x) = 3x^3 + x$

ii)  $h(x) = 3x^4 - 6x^2$

iii)  $f(x) = x^3 \cdot e^x$

iv)  $g(x) = 5x \cdot \ln x$

85. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

i)  $h(x) = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

ii)  $f(x) = (x-1) \cdot x^2$

iii)  $g(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$

iv)  $f(x) = x^2 \cdot \eta\mu x.$

86. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

i)  $g(x) = (x-1)^2$

ii)  $h(x) = x^2 \cdot \ln x$

iii)  $f(t) = \frac{t-1}{t+2}$

iv)  $g(t) = \frac{t+1}{t+2}$

87. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

i)  $h(t) = \frac{t^2 + t}{t-1}$

ii)  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

iii)  $g(x) = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$

iv)  $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

**91.** Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + x + 4, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε:

- i) την παράγωγο συνάρτηση της  $f$ .
- ii) τους αριθμούς  $f'(0)$  και  $f'(1)$ .

**92.** Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να υπολογίσετε:

- i) τη συνάρτηση  $f'(x)$
- ii) τις τιμές  $f'(0)$  και  $f'(1)$ .

**93.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}, \quad x \neq 2.$$

- i) Να βρείτε τον τύπο της  $f'$ .
- ii) Να υπολογίσετε τους αριθμούς  $f'(0)$ ,  $f'(3)$ .

**94.** Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \eta\mu^2 x.$$

- i) Να υπολογίσετε τον τύπο της δεύτερης παραγώγου της  $f$ .
- ii) Να αποδείξετε ότι

$$f''(x) + 4f(x) = 2, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**95.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \eta\mu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να βρείτε τον τύπο της  $f''$ .
- ii) Να αποδείξετε ότι

$$f''(x) + f(x) = 2\eta\mu x, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**102.** Έστω συνάρτηση  $f$  η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$  και τέτοια, ώστε

$$f'(1) = 3 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5.$$

Αν  $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x^2 + 1}$ , να υπολογίσετε:

- i) το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$                       ii) την παράγωγο  $\varphi'(1)$ .

**103.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

Να βρείτε:

- i) τη συνάρτηση  $f'(x)$   
ii) το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της  $f$  στο σημείο της  $A(1, f(1))$ .

**104.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 1 - \frac{2}{\eta\mu x + 2}.$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .  
ii) Να αποδείξετε ότι η καμπύλη της  $f$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.  
iii) Να βρείτε τη συνάρτηση  $f'(x)$ .  
iv) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της  $f$  στην αρχή των αξόνων.

**106.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + x + \beta, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου  $\alpha, \beta$  σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

- i) Να βρείτε τη συνάρτηση  $f'(x)$ .
- ii) Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ , ώστε η εφαπτομένη της καμπύλης της  $f$  στο σημείο της  $M(1,0)$  να σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $60^\circ$ .

**107.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\alpha x - 1}{x^2 + 4}, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου  $\alpha$  σταθερός πραγματικός αριθμός.

- i) Να βρείτε τη συνάρτηση  $f'(x)$ .
- ii) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ , ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(3, f(3))$  να είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .
- iii) Για  $\alpha = \frac{6}{5}$  να βρείτε:
  - α) την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\eta$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $N(0, f(0))$
  - β) το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ( $\eta$ ) με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

**108.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + \alpha x + \beta, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου  $\alpha, \beta$  σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Η ευθεία με εξίσωση  $y = -5$  εφάπτεται στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο της  $A(1, f(1))$ .

- i) Να βρείτε τις τιμές  $f(1)$  και  $f'(1)$ .
- ii) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 12$  και  $\beta = -10$ .
- iii) Να λύσετε την εξίσωση  $f'(x) = 0$ .
- iv) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

## ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ

8. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α.  $f(x) = x^4 - 32x + 1$

β.  $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 27x - 2$

γ.  $f(x) = x^4 - 18x^2 + 5$

δ.  $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 3$

9. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α.  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

β.  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

γ.  $f(x) = 1 - x^2 - \frac{2}{x}$

δ.  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - 2019$

10. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α.  $f(x) = x + \sqrt{x - 2}$

β.  $f(x) = x^2 - 4x$ ,  $x \in [0, 5]$

### B. Ανισοτικές σχέσεις

11. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^4 - 4x + 5$  και  $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + 8x + 1$ .

α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις.

β. Να αποδείξετε ότι:

i.  $f(x) \geq 2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

ii.  $g(x) \geq -11$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

12. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ .

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία.

β. Να συγκρίνετε τις τιμές  $f(2017)$  και  $f(2018)$ .

13. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$ .

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq 4$ , για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .

14. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ .

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να αποδείξετε ότι αν  $x \in [3, 5]$ , τότε  $f(5) \leq f(x) \leq f(3)$ .

15. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + ax + 5$  .

Αν η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0 = 1$  , να βρείτε:

- α. την τιμή του  $a$
- β. το είδος του ακρότατου.

16. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = ax^2 - 6x + \beta$  .

Να βρείτε τις τιμές των  $a, \beta$  , για τις οποίες η  $f$  παρουσιάζει ακρότατο στο  $x_0 = 1$  το  $3$  .

17. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + ax + \beta - 1$  .

Αν η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 = -1$  τοπικό ακρότατο και η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(-2, -3)$  , τότε:

- α. Να βρείτε τις τιμές των  $a, \beta$  .
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία.
- γ. Να βρείτε το είδος του ακρότατου και την τιμή του.

18. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + 4ax + a^2$  ,  $a < 0$  .

Αν η τιμή του ακρότατου της  $f$  είναι  $-3$  , να βρείτε την τιμή του  $a$  , τη θέση του ακρότατου και το είδος του ακρότατου.

19. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3x + a$  .

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τα ακρότατα.
- β. Αν το τοπικό μέγιστο της συνάρτησης  $f$  είναι διπλάσιο από το τοπικό ελάχιστο, να βρείτε την τιμή του  $a$  .

20. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x+1)^2(x+a)$  .

- α. Να δείξετε ότι  $f'(x) = (x+1)(3x+2a+1)$  .
- β. Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0 = 5$  , να βρείτε την τιμή του  $a$  .
- γ. Για  $a = -8$  , να εξετάσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία.

## ΣΥΝΘΕΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

### Θέμα 39

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + \alpha x^2 - x + \beta$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Να βρείτε την παράγωγο  $f'$  της συνάρτησης  $f$ .
- Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$ ,  $\beta$  για τις οποίες η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από το σημείο της  $A(1, 0)$  και η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει ακρότατο στο  $x_0 = 1$ .
- Για  $\alpha = -1$  και  $\beta = 1$  να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1}$ .

### Θέμα 40

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta - 1$ .

Αν η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 = -1$  τοπικό ακρότατο και η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(-2, -3)$ , τότε:

- Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$ ,  $\beta$ .
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε το είδος του ακρότατου και την τιμή του.
- Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)}{x+3}$ .

### Θέμα 41

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - x + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης  $f$ , ως προς  $x$ , όταν  $x = 2$ .
- Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = -1$ .
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο της  $A(-1, f(-1))$ .
- Να βρείτε τα σημεία τομής της εφαπτομένης του προηγούμενου ερωτήματος με τους άξονες  $x'x$ ,  $y'y$ .

## Θέμα 42

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 3x^4 + 3x^2 - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $f$ .
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να συγκρίνετε τις τιμές  $f(2018)$  και  $f(2019)$ .
- Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq -2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

## Θέμα 43

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^4 - 4x + 5$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Να λύσετε την εξίσωση  $f'(x) = 0$ .
- Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τις θέσεις και το είδος των ακρότατων.
- Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq 2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

## Θέμα 44

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^5 - 3x^4 - x - 1$ .

- Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $f$ .
- Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης  $f$ , ως προς  $x$ , όταν  $x = -1$ .
- Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 1$ .
- Να υπολογίσετε το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ .

## Θέμα 45

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 4)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Να βρείτε την πρώτη παράγωγο  $f'(x)$  της συνάρτησης  $f(x)$ .
- Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο  $f''(x)$  της συνάρτησης  $f(x)$ .
- Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha$ , για τις οποίες ισχύει  $f'(1) + \alpha f''(-1) = 2$ .
- Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}$ .

### Θέμα 59

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - x + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α. Να εξετάσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$ , στο οποίο η εφαπτομένη της σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = 45^\circ$ .
- γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στην γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 1$ .
- δ. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{x - 2}$ .

### Θέμα 60

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^4 - 4x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α. Να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης  $f$ .
- β. Να αποδείξετε ότι  $x^4 - 4x \geq -3$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $A(1, f(1))$ .
- δ. Να υπολογίσετε το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$ .

### Θέμα 61

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων  $O$ .
- β. Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.
- δ. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 0$ .

## Θέμα 62

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$ .

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  και στη συνέχεια να δείξετε ότι

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}, \quad x \neq 0$$

β. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της  $f$  που εφαπτόμενες στα σημεία αυτά είναι παράλληλες στην ευθεία  $\zeta: y = -3x + 2$ .

γ. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x)}{f(x)}$ .

## Θέμα 63

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} + x$ .

α. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $f$ .

β. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της  $f$  στη σημείο που τέμνει τον άξονα  $y'y$ .

γ. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x - 2}{x - 1}$ .

## Θέμα 64

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ .

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

β. Να βρείτε την παράγωγο  $f'(x)$ .

γ. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης  $f$ , ως προς  $x$ , όταν  $x = 2$ .

δ. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = -2$ .

ε. Να βρείτε το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h}$ .