ΘΕΩΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο – ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Α. ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ

1. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μία συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

4. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$;

Απάντηση

Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_1 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν ισχύει

$$f(x) \leq f(x_1) \text{ , για κάθε } x \text{ που ανήκει σε μία περιοχή του } x_1$$

5. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$;

Απάντηση

Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_2 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν ισχύει

$$f(x) \geq f(x_2) \text{ , για κάθε } x \text{ που ανήκει σε μία περιοχή του } x_2$$

6. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

7. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; Τι ονομάζεται παράγωγος της f στο σημείο x_0 ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Δηλαδή $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

8. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

- **$f_1(x) = c$, όπου x πραγματικός και c σταθερά**
- **$f_2(x) = x$, όπου x πραγματικός**
- **$f_3(x) = x^\rho$, όπου ρ ρητός , $\rho > 0$**
- **$f_4(x) = \sqrt{x}$, όπου $x > 0$**
- **$f_5(x) = \dfrac{1}{x}$, όπου $x \neq 0$**
- **$f_6(x) = ημx$, όπου x πραγματικός**
- **$f_7(x) = συνx$, όπου x πραγματικός.**
- **$f_8(x) = εφx$**

Απάντηση

Ισχύουν οι επόμενοι τύποι για τις παραγώγους βασικών συναρτήσεων.

$(c)' = 0$	$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
$(x)' = 1$	$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$
$(x^{\rho})' = \rho x^{\rho-1}$	$(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	

9. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$cf(x)$, όπου c πραγματική σταθερά , $f(x)+g(x)$,

$f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, με $g(x) \neq 0$, $f(g(x))$

Απάντηση

Ισχύουν οι επόμενοι τύποι για τους κανόνες παραγώγισης.

• $(cf(x))' = c \cdot f'(x)$
• $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
• $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
• $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
• $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Β. ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ

10. Έστω $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$ και c σταθερός πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι $(c)' = 0$.

Απόδειξη

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$

και για $h \neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$

Άρα $(c)' = 0$.

11. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)-x=h$

και για $h\neq 0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h}{h}=1$$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$.

Άρα $(x)'=1$.

12. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^2$ είναι $f'(x)=2x$.

Απόδειξη

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=x^2+2xh+h^2-x^2=(2x+h)h$,

και για $h\neq 0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(2x+h)h}{h}=2x+h$$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$.

Άρα $(x^2)'=2x$.

13. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $c\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\left(cf(x)\right)'=cf'(x)$, $x\in\Delta$.

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $F(x)=cf(x)$.

Έχουμε $F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c\left(f(x+h)-f(x)\right)$

και για $h\neq 0$,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{c\left(f(x+h)-f(x)\right)}{h}=c\frac{f(x+h)-f(x)}{h} .$$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=cf'(x)$.

Άρα $\left(c\cdot f(x)\right)'=c\cdot f'(x)$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι: $F'(x)=f'(x)+g'(x)$

Απόδειξη

Έχουμε
$$F(x+h)-F(x)=\big(f(x+h)+g(x+h)\big)-\big(f(x)+g(x)\big)$$
$$=\big(f(x+h)-f(x)\big)+\big(g(x+h)-g(x)\big)$$

και για $h\neq 0$,
$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$.

Άρα $\big(f(x)+g(x)\big)'=f'(x)+g'(x)$.