

Ιδιότητες των Ορίων

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή, αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$, όπου $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_1 + \ell_2$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (\kappa f(x)) = \kappa \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \kappa \ell_1$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$, όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^v = \ell_1^v$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[v]{f(x)} = \sqrt[v]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \sqrt[v]{\ell_1}$, όταν $f(x) \geq 0$ σε μια περιοχή του x_0 .

Συνεχής συνάρτηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **συνεχής**, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

- ▶ Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_0 .
- ▶ Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη.
- ▶ Οι παρακάτω συναρτήσεις, αλλά και όσες προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών, είναι συνεχείς συναρτήσεις.

- $f(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_0$
- $f(x) = \eta \mu x$ $g(x) = \sigma \upsilon \nu x$ $h(x) = \epsilon \phi x$ $t(x) = \sigma \phi x$

▶ Άρα:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_0) = \alpha_v x_0^v + \alpha_{v-1} x_0^{v-1} + \dots + \alpha_0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon \phi x = \epsilon \phi x_0$ ($\sigma \upsilon \nu x_0 \neq 0$)
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma \upsilon \nu x = \sigma \upsilon \nu x_0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma \phi x = \sigma \phi x_0$ ($\eta \mu x_0 \neq 0$)

B2. Άρρητες συναρτήσεις

12. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-\sqrt{3x+1}}$$

$$\varepsilon. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{5-x}$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1-\sqrt{x}}$$

13. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-4x}{\sqrt{x}-2}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$$

$$\varepsilon. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+4x+4}{\sqrt{x+3}-1}$$

14. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2-2x+1}-1}{x-1}$$

15. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-x}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{\sqrt{x^2+5}-3}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x^2-5x+4}$$

Γ. Παραμετρικά όρια

16. Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες ισχύει:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\alpha x^2 - 9\alpha}{x^2 - 3x} = 4$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha\sqrt{x} - \alpha}{x-1} = 6$$

17. Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες ισχύει:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + \alpha x - \alpha}{x-1} = 5$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4 + \alpha x - 2\alpha}{x-2} = 3$$

Δ. Συνέχεια συνάρτησης

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{αν } x \neq 3 \\ 6 & , \text{αν } x = 3 \end{cases}$.

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}, & \text{αν } x > 1 \\ \frac{1}{2} & , \text{αν } x = 1 \end{cases}$.

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}, & \text{αν } x \neq 4 \\ 3\alpha - 1 & , \text{αν } x = 4 \end{cases}$.

Να βρείτε την τιμή του α , για την οποία η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 4$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ \alpha^2 + 1 & , \text{αν } x = 1 \end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

22. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 3$ και ισχύει

$$xf(x) = 3f(x) + x^2 - 9, \text{ για κάθε } x \neq 3$$

α. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

β. Να βρείτε την τιμή του α , για την οποία ισχύει $f(3) = \alpha^3 + 7$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2\alpha}{x^2 - 2x}$ με $\alpha = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{2x-1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να δείξετε ότι $\alpha = -2$.

γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\sqrt{f(x)} + \frac{1}{f(x)} \right)$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x + \alpha}{\sqrt{x+1} - 1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να βρείτε την τιμή του α , για την οποία η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(3, 6)$.

Για $\alpha = 0$:

γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

δ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$ και διέρχεται από το σημείο $M(-1, f(-1))$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ \alpha - 3, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να δείξετε ότι $f(2) + f(1) = \alpha - 4$.

γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$.

δ. Να βρείτε την τιμή του α , για την οποία η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

ε. Για $\alpha = 1$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε , που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $M(1, f(1))$.