



«Οι εραστές» εκτίθενται στο Μουσείο Μοντέρνας Τέχνης στη Νέα Υόρκη.

ΛΥΣΕΙΣ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ
ΑΛΓΕΒΡΑ ΕΠΑ.Λ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ
20 Σεπτεμβρίου 2019

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

lisari team

ΛΥΣΕΙΣ

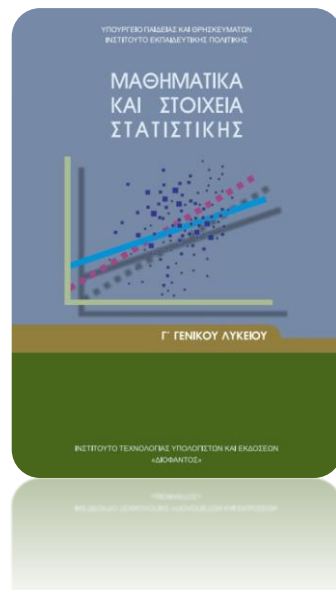
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
2019

2η έκδοση

Γιαννόπουλος Μιχάλης

Χατζόπουλος Μάκης

Συντονισμός
Χρήστος Κανάβης



Οι απαντήσεις - λύσεις είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς
των μελών της **lisari team**

2η έκδοση: 21 – 9 – 2019 (συνεχής ανανέωση)

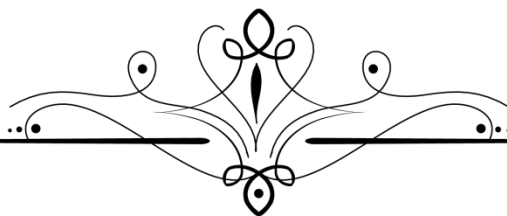


Οι λύσεις διατίθεται αποκλειστικά

από το μαθηματικό **blog**

<http://lisari.blogspot.com>





Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο περιλαμβάνονται οι λύσεις των Επαναληπτικών Εξετάσεων 2019 στο μάθημα **Μαθηματικά για τα ΕΠΑ.Λ.** Η παρουσίαση των λύσεων είναι πλήρης και αναλυτική στο μέγιστο δυνατό, προκειμένου οι μαθητές να μπορούν να μελετήσουν και να επεξεργαστούν εύκολα το αρχείο.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε αποκλειστικά από τη γνωστή **διαδικτυακή ομάδα Μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος, τη **lisari team**. Φέτος εστιάσαμε στη ποικιλία των λύσεων και όσο στο χρόνο που θα αναρτηθούν οι λύσεις.

Την αρχική συγγραφή των λύσεων ακολούθησαν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις με στόχο μια **πληρέστερη και πιο ποιοτική παρουσίαση**. Ζητούμε συγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες που ενδεχομένως θα έχουν διαφύγει της προσοχής μας, γεγονός αναπόφευκτο δεδομένων των στενών χρονικών περιθωρίων. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου η εν λόγω παρουσίαση θα βελτιωθεί, ίσως εμπλουτιστεί και με εναλλακτικές λύσεις. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις επί των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

lisari team

20 – 09 – 2019

lisari team

1. Αντωνόπουλος Νίκος (3^ο ΓΕΛ Άργους)
2. Αυγερινός Βασίλης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου "ΔΙΑΤΑΞΗ" - Ν. Σμύρνη)
3. Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο "ΒΕΛΛΩΡΑΣ" - Λιβαδειά Βοιωτίας)
4. Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο "Ευθύνη" - Ρέθυμνο)
5. Γιαννόπουλος Μιχάλης (Θεσσαλονίκη - Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)
6. Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο "Λύση" - Άρτα)
7. Δούδης Δημήτρης (3^ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)
8. Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια "Πουκαμισάς" Γλυφάδας)
9. Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο "Ωθηση" - Μαρούσι)
10. Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο "Παπαπαναγιώτου – Κάκανος" - Σέρρες)
11. Κανάβης Χρήστος (Αναπληρωτής Καθηγητής)
12. Καρδαμίτσης Σπύρος (Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων)
13. Κοπάδης Αθανάσιος (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου Μ.Ε «Φροντιστήριο 19+»)
14. Κουλούρης Ανδρέας (3^ο Λύκειο Γαλατσίου)
15. Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο "Στόχος" - Περιτέρι)
16. Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο "Ρηγάκης" - Κοζάνη)
17. Μαρούγκας Χρήστος (3^ο ΓΕΛ Κηφισιάς)
18. Δημήτρης Μπαδέμης (Φροντιστήριο "Πουκαμισάς" - Γλυφάδας)
19. Νάννος Μιχάλης (1^ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)
20. Νικολόπουλος Θανάσης (2^ο ΓΕΛ Ζακύνθου, Ζάκυνθος)
21. Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο "Εις τη ν" - Αγρίνιο)
22. Παπαδομανωλάκη Μαρία (Συνιδιοκτήτρια Πρότυπου Κέντρου Μάθησης "ΔΙΑΚΡΙΣΙΣ" - Ρέθυμνο)
23. Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός "Ρόμβος")
24. Πάτσης Ανδρέας (Βόνιτσα - Μαθηματικός)
25. Ποδηματάς Θωμάς (Σπουδαστήριο Μαθηματικών Θωμάς και Ρόζα Ποδηματά - Βόλος)
26. Γιώργος Πολύζος (τ. πάρεδρος στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, συγγραφέας)
27. Ράπτης Γιώργος (6^ο ΓΕΛ Βόλου)
28. Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο "Μπαχαράκης" - Θεσσαλονίκη)
29. Σκομπής Νίκος (Συγγραφέας – 1^ο Λύκειο Χαλκίδας)
30. Σπλήνης Νίκος (Φροντιστήριο "ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ" - Ηράκλειο Κρήτης)
31. Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)
32. Σταυρόπουλος Σταύρος (Πρόεδρος Ε.Μ.Ε Κορινθίας – ΓΕΛ Ζευγολατιό Κορινθίας)
33. Τρύφων Παύλος (1^ο Εσπερινό ΕΠΑΛ Περιστερίου)
34. Τσακαλάκος Τάκης (συνταξιούχος αλλά ενεργός μαθηματικός)
35. Χαράλάμπους Σταύρος (Μουσικό Λύκειο Θεσσαλονίκης)
36. Χασάπης Γεώργιος (Ιδιωτικός υπάλληλος)
37. Χατζόπουλος Μάκης (1^ο ΓΕΛ Ψυχικού, Αθήνα)

lisari team / Σχολικό έτος 2018 – 19
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη, σχολικό βιβλίο.

A2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο $\left(\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_v w_v}{w_1 + w_2 + \dots + w_v} \right)$

A3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο (Όταν το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός)

A4. (α) Σ (β) Λ (γ) Λ (δ) Σ (ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι, $\lambda = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x} = 2$

B2. Για $\lambda = 2$, έχουμε:

$$\bar{x} = 12 \Leftrightarrow \frac{13+12+7+9+14+15+\kappa+12+17+13}{10} = 12 \Leftrightarrow 112 + \kappa = 120 \Leftrightarrow \kappa = 8$$

B3. Για $\lambda = 2$ και $\kappa = 8$ είναι,

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{10} (t_i - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{2(13-12)^2 + 2(12-12)^2 + (7-12)^2 + (9-12)^2 + (14-12)^2 + (15-12)^2 + (8-12)^2 + (17-12)^2}{10} \\ &= \frac{2+0+25+9+4+9+16+25}{10} \\ &= 9 \\ \text{άρα } s^2 &= 9, \text{ οπότε } s = \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

B4. Επίσης $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25$ ή $25\% > 10\%$ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 - 4x - \alpha$

Για να σχηματίζεται γωνία 45° πρέπει

$$f'(0) = \tan 45^\circ \Leftrightarrow f'(0) = 1 \Leftrightarrow 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = -1$$

Γ2. Για $\alpha = -1$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = \frac{1}{3}$

Άρα ο πίνακας μεταβολής της f είναι ο ακόλουθος

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$		↗	↘	↗

Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$ και $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

Γ3. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1 = \frac{1}{3}$ το,

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 2 = \frac{58}{27}$$

παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2 = 1$ το,

$$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 + 2 = 2$$

Γ4. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ επομένως είναι

$$2019 > 1 \xRightarrow{f'} f(2019) > f(1) \quad (1) \quad \text{και} \quad 2020 > 1 \xRightarrow{f'} f(2020) > f(1) \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1),(2) προκύπτει ότι $f(2019) + f(2020) > 2f(1)$.



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο A , είναι ευθεία με εξίσωση της μορφής,

$$(ε): y = \alpha x + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ με } f'(0) = \alpha$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2(\lambda - 3)x - \lambda$ άρα

$$f'(0) = \alpha \Leftrightarrow 2(\lambda - 3) \cdot 0 - \lambda = \alpha \Leftrightarrow \alpha = -\lambda$$

Επίσης το σημείο επαφής $A(0, f(0))$ ανήκει και στην γραφική παράσταση της συνάρτησης και στην ευθεία (ε) δηλαδή επαληθεύει τις εξισώσεις τους:

$$f(0) = (\lambda - 3) \cdot 0^2 - \lambda \cdot 0 + \lambda^2 - 6\lambda = \lambda^2 - 6\lambda \text{ και } f(0) = -\lambda \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = f(0) \Leftrightarrow \beta = \lambda^2 - 6\lambda$$

Επομένως η εξίσωση της ευθείας εφαπτομένης είναι (ε): $y = -\lambda x + \lambda^2 - 6\lambda, 0 < \lambda < 3$.

Δ2. Τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες είναι:

- Για $x = 0$ έχουμε $y = \lambda^2 - 6\lambda$, άρα το σημείο τομής με τον άξονα των y είναι το σημείο

$$\Gamma(0, \lambda^2 - 6\lambda)$$

- Για $y = 0$ έχουμε

$$-\lambda x + \lambda^2 - 6\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda x = \lambda^2 - 6\lambda \xRightarrow{\lambda \neq 0} x = \frac{\lambda^2 - 6\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda(\lambda - 6)}{\lambda} = \lambda - 6,$$

άρα το σημείο τομής με τον άξονα των x είναι το σημείο $B(\lambda - 6, 0)$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΒΓ, ισούται με

$$(ΟΒΓ) = \frac{1}{2} |\lambda - 6| |\lambda^2 - 6\lambda| = \frac{1}{2} |(\lambda - 6)\lambda(\lambda - 6)| = \frac{1}{2} |\lambda(\lambda - 6)^2| = \frac{1}{2} |\lambda| |(\lambda - 6)^2| = \frac{1}{2} |\lambda| (\lambda - 6)^2 \text{ και}$$

επειδή $\lambda > 0$ έχουμε $(ΟΒΓ) = \frac{1}{2} \lambda (\lambda - 6)^2$.

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $E(\lambda) = \frac{1}{2} \lambda (\lambda - 6)^2$, $0 < \lambda < 3$. Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$ με

$$\begin{aligned} E'(\lambda) &= \left(\frac{1}{2} \lambda (\lambda - 6)^2 \right)' = \frac{1}{2} \left(\lambda' (\lambda - 6)^2 + \lambda [(\lambda - 6)^2]' \right) \\ &= \frac{1}{2} [(\lambda - 6)^2 + 2\lambda(\lambda - 6)] \\ &= (\lambda - 6) \left(\frac{\lambda - 6}{2} + \lambda \right) \\ &= (\lambda - 6) \left(\frac{3\lambda - 6}{2} \right) \end{aligned}$$

Λύνουμε την εξίσωση

$$E'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 6) \left(\frac{3\lambda - 6}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 6 \text{ απορρίπτεται ή } \lambda = 2 \text{ δεκτή}$$

Ο πίνακας μεταβολών για τη συνάρτηση E είναι ο εξής:

λ	0	2	3
$E'(\lambda)$		+	-
$E(\lambda)$			

Άρα η συνάρτηση E παρουσιάζει μέγιστο για $\lambda = 2$.

Δ4. Για $\lambda = 2$ η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται $y = -2x + 4 - 12 = -2x - 8$.

Σύμφωνα με την εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, είναι $s_y = |-2|s_x = 4$