



COPYLEFT
Μια άλλη μορφή αντίθετη
στο copyright



ΛΥΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΠΑ.Λ. Ι

ΣΑΒΒΑΤΟ

09 – 06 – 18

.... : Π.Μ



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

lisari team

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

2018

1η έκδοση

**Κανάβης Χρήστος
Μανώλης Ανδρέας**

**Σίσκας Χρήστος
Τσακαλάκος Τάκης
Χασάπης Γιώργος**

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς
των μελών της **lisari team**

<http://lisari.blogspot.gr/>

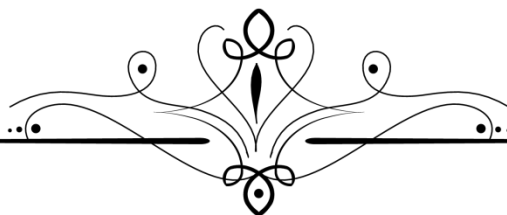
1η έκδοση: 09 – 06 – 2018 (συνεχής ανανέωση)

Οι λύσεις διατίθεται **αποκλειστικά**

από το μαθηματικό blog

<http://lisari.blogspot.gr>





Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο περιλαμβάνονται οι λύσεις των Πανελλαδικών Εξετάσεων 2018 στο μάθημα **Μαθηματικά Ι ΕΠΑΛ**. Η παρουσίαση των λύσεων είναι πλήρης και αναλυτική στο μέγιστο δυνατό, προκειμένου οι μαθητές να μπορούν να μελετήσουν και να επεξεργαστούν εύκολα το αρχείο.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε αποκλειστικά από τη γνωστή **διαδικτυακή ομάδα Μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος, τη **lisari team**. Φέτος εστιάσαμε στη ποικιλία των λύσεων και όσο στο χρόνο που θα αναρτηθούν οι λύσεις.

Την αρχική συγγραφή των λύσεων ακολούθησαν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις με στόχο μια **πληρέστερη και πιο ποιοτική παρουσίαση**. Ζητούμε συγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες που ενδεχομένως θα έχουν διαφύγει της προσοχής μας, γεγονός αναπόφευκτο δεδομένων των στενών χρονικών περιθωρίων. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου η εν λόγω παρουσίαση θα βελτιωθεί, ίσως εμπλουτιστεί και με εναλλακτικές λύσεις. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις επί των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

lisari team

09 – 06 – 2018

lisari team

1. Αντωνόπουλος Νίκος (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου "Κατεύθυνση" - Αργος)
2. Αυγερινός Βασίλης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου "ΔΙΑΤΑΞΗ" - Ν. Σμύρνη και Νίκαια)
3. Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο "ΒΕΛΛΩΡΑΣ" - Λιβαδειά Βοιωτίας)
4. Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο "Ευθύνη" - Ρέθυμνο)
5. Γιαννόπουλος Μιχάλης (Θεσσαλονίκη - Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)
6. Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο "Αστρολάβος" - Άρτα)
7. Δούδης Δημήτρης (3ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)
8. Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια "Πουκαμισάς" Γλυφάδας)
9. Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο "Ωθηση" - Μαρούσι)
10. Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο "Παπαπαναγιώτου – Παπαπαύλου" - Σέρρες)
11. Κανάβης Χρήστος (Διδακτορικό στο ΕΜΠ – 2ο ΣΔΕ φυλακών Κορυδαλλού)
12. Καρδαμίτσης Σπύρος (Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων)
13. Κουλούρης Ανδρέας (3ο Λύκειο Γαλατσίου)
14. Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο "Στόχος" - Περιστερί)
15. Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο "Ρηγάκης" - Κοζάνη)
16. Μαρούγκας Χρήστος (3ο ΓΕΛ Κηφισιάς)
17. Δημήτρης Μπαδέμης (Φροντιστήριο "Πουκαμισάς" - Γλυφάδας)
18. Νάννος Μιχάλης (1ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)
19. Νικολόπουλος Θανάσης (Λύκειο Κατασταρίου, Ζάκυνθος)
20. Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο "Φάσμα" - Αγρίνιο)
21. Παπαδομανωλάκη Μαρία (Συνιδιοκτήτρια Πρότυπου Κέντρου Μάθησης "ΔΙΑΚΡΙΣΙΣ" - Ρέθυμνο)
22. Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός "Ρόμβος")
23. Πάτσης Ανδρέας (Βόνιτσα - Μαθηματικός)
24. Ποδηματάς Θωμάς (Σπουδαστήριο Μαθηματικών Θωμάς και Ρόζα Ποδηματά - Βόλος)
25. Ράπτης Γιώργος (6ο ΓΕΛ Βόλου)
26. Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο "Μπαχαράκης" - Θεσσαλονίκη)
27. Σκομπής Νίκος (Συγγραφέας – 1ο Λύκειο Χαλκίδας)
28. Σπλήνης Νίκος (Φροντιστήριο "ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ" - Ηράκλειο Κρήτης)
29. Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)
30. Σταυρόπουλος Σταύρος (Γραμματέας Ε.Μ.Ε Κορινθίας - Γυμνάσιο Α.Τ. Λεχαίου Κορινθίας)
31. Τρύφων Παύλος (1ο Εσπερινό ΕΠΑΛ Περιστερίου)
32. Τσακαλάκος Τάκης (συνταξιούχος αλλά ενεργός μαθηματικός)
33. Χαράλάμπος Σταύρος (Θεσσαλονίκη - Μουσικό Λύκειο)
34. Χασάπης Γεώργιος (Ιδιωτικός Υπάλληλος)
35. Χατζόπουλος Μάκης (1ο ΓΕΛ Πετρούπολης)

lisari team / Σχολικό έτος 2017 – 18
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. α) Σχολικό βιβλίο σελ. 65 β) Σχολικό βιβλίο σελ. 65 γ) Σχολικό βιβλίο σελ. 65

A2. Σχολικό βιβλίο σελ. 22

A3. α) Σωστό β) Λάθος γ) Λάθος δ) Σωστό ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Αφού το πλήθος του δείγματος είναι περιττό η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση και επειδή $\delta = 15$, στη μέση δεν μπορεί να βρίσκεται κανένας από τους αριθμούς 12, 14, 16, 18 και κατ' ανάγκη βρίσκεται ο αριθμός $4\alpha - 1$.
Έτσι λοιπόν έχουμε ότι

$$\delta = 4\alpha - 1 \Leftrightarrow 4\alpha - 1 = 15 \Leftrightarrow 4\alpha = 16 \Leftrightarrow \alpha = \frac{16}{4} \Leftrightarrow \alpha = 4$$

B2. Για $\alpha = 4$ το δείγμα γίνεται:

12, 14, 15, 16, 18

Η διασπορά s^2 υπολογίζεται από τον τύπο $s^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{x})^2$

Πρώτα λοιπόν θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή. Είναι,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 t_i}{5} = \frac{12 + 14 + 15 + 16 + 18}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

Άρα,

$$s^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{5} [(12-15)^2 + (14-15)^2 + (15-15)^2 + (16-15)^2 + (18-15)^2]$$

$$\Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{5} [(-3)^2 + (-1)^2 + 0 + 1^2 + 3^2] = \frac{1}{5} (20) = \frac{20}{5} = 4$$

B3. Αφού η διασπορά ισούται με 4 η τυπική απόκλιση ισούται με τη θετική τετραγωνική ρίζα της.

Δηλαδή $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$

Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος ισούται με $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{15} = 0,1333$ ή 13,33%

Επειδή είναι $CV = 13,33\% > 10\%$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

B4. Α' τρόπος

Οι αρχικές παρατηρήσεις t_i μετά τις μετατροπές θα γίνουν $-2t_i + 5$

Δηλαδή

$$-2 \cdot 12 + 5, -2 \cdot 14 + 5, -2 \cdot 15 + 5, -2 \cdot 16 + 5, -2 \cdot 18 + 5$$

και άρα

$$-19, -23, -25, -27, -31$$

Άρα η νέα μέση τιμή είναι $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 t_i}{5} = \frac{-19 - 23 - 25 - 27 - 31}{5} = -\frac{125}{5} = -25$

και η νέα διασπορά

$$s^2 = \frac{1}{5} [(-19 - (-25))^2 + (-23 - (-25))^2 + (-25 - (-25))^2 + (-27 - (-25))^2 + (-31 - (-25))^2] \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{1}{5} [6^2 + 2^2 + 0^2 + (-2)^2 + (-6)^2] = \frac{1}{5} (80) = 16$$

Άρα $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$

Επομένως $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{|-25|} = \frac{4}{25} = 0,16$ ή 16%

Β' τρόπος

Από την εφαρμογή του βιβλίου έχουμε πως η νέα μέση τιμή και η νέα τυπική απόκλιση για τις νέες τιμές y_i , θα ισούται με,

$$\bar{y} = -2\bar{x} + 5 = -2 \cdot 15 + 5 = -25$$

$$s_y = |-2|s = 2 \cdot 2 = 4$$

Επομένως $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{|-25|} = \frac{4}{25} = 0,16$ ή 16%



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x \in \mathbb{R}$ και $\kappa \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (2x^3 - 3\kappa x^2 + \kappa)' = (2x^3)' - (3\kappa x^2)' + (\kappa)' = 2(x^3)' - 3\kappa(x^2)' + 0 \\ = 2 \cdot 3x^2 - 3\kappa \cdot 2x = 6x^2 - 6\kappa x$$

Η εφαπτομένη στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στο άξονα $x'x$, οπότε

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 1^2 - 6\kappa \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 6 - 6\kappa = 0 \Leftrightarrow 6\kappa = 6 \Leftrightarrow \kappa = 1$$

Γ2. Για $\kappa = 1$ είναι

$$f'(x) = 6x^2 - 6x \text{ και } f''(x) = 12x - 6$$

Ελέγχουμε πότε ο ρυθμός μεταβολής της f' γίνεται ελάχιστος, οπότε

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 6 = 0 \Leftrightarrow 12x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 12x - 6 > 0 \Leftrightarrow 12x > 6 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 12x - 6 < 0 \Leftrightarrow 12x < 6 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f'	$\searrow$		$\nearrow$

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα έχουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος όταν $x = \frac{1}{2}$.

Γ3. Έχουμε

$$f''(-1) = 12(-1) - 6 = -12 - 6 = -18 \text{ και}$$

$$f'(-1) = 6 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 6 + 6 = 12$$

Έστω $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράτασης της f' στο σημείο $(-1, f'(-1))$

Τότε

$$\lambda = f''(-1) = -18, \text{ άρα } y = -18x + \beta$$

Συνεπώς

$$(-1, f'(-1)) \in (\varepsilon) \Rightarrow f'(-1) = -18 \cdot (-1) + \beta \Rightarrow 12 = 18 + \beta \Rightarrow \beta = 12 - 18 \Rightarrow \beta = -6$$

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$y = -18x - 6$$



ΘΕΜΑ Δ

$$\begin{aligned}\Delta 1. \text{ Είναι } f'(x) &= (\sqrt{x^2+4} + 2018)' = (\sqrt{x^2+4})' + (2018)' = \frac{(x^2+4)'}{2\sqrt{x^2+4}} \\ &= \frac{(x^2)' + (4)'}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}, \quad x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Δ2. Έχουμε ότι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} > 0 \stackrel{\sqrt{x^2+4} > 0, x \in \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} x > 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} < 0 \stackrel{\sqrt{x^2+4} > 0, x \in \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} x < 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
f	↘		↗

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [0, +\infty)$.
- Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1 = 0$ με τιμή $f(0) = \sqrt{4} + 2018 = 2 + 2018 = 2020$

$$\begin{aligned}\Delta 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+4)f'(x) - 2x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+4) \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+4})^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 2x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x^2+4} - 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x^2+4} - 2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+4} - 2)(\sqrt{x^2+4} + 2)}{x(\sqrt{x^2+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}^2 - 2^2}{x(\sqrt{x^2+4} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4 - 4}{x(\sqrt{x^2+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+4} + 2} = \frac{0}{4} = 0\end{aligned}$$

