

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

A. Ρυθμός μεταβολής στο x_0

3. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$.

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f ως προς x , όταν $x = 1$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f ως προς x , όταν $x = -2$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5\eta\mu x - \pi$.

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της παραγώγου της f ως προς x , όταν $x = 0$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - ax^2 - x + 1$.

Να βρείτε την τιμή του a , για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x , όταν $x = 2$ είναι 5.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (3x - 1)(ax - 2)$.

Να βρείτε την τιμή του a , για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x , μηδενίζεται, όταν $x = 2$.

B. Προβλήματα

8. Η αξία μίας δίκυκλης μηχανής (σε ευρώ) t χρόνια μετά την αγορά της δίνεται από τη σχέση

$$f(t) = 20.000 - 50t^2, \quad 0 \leq t \leq 15$$

- α. Ποια είναι η τιμή αγοράς της μηχανής;
- β. Ποια είναι η αξία της μηχανής μετά από 10 χρόνια;
- γ. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της αξίας της μηχανής οποιαδήποτε χρονική στιγμή και ποιος ο ρυθμός μεταβολής της αξίας της μετά από 7 χρόνια;

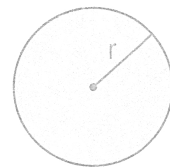
Γ. Ταχύτητα - Επιτάχυνση

9. Ένα σώμα αφήνεται να πέσει από την κορυφή ενός κτιρίου ύψους 45 m , τη χρονική στιγμή $t=0\text{ sec}$. Αν θεωρήσουμε την αντίσταση του αέρα αμελητέα, το διάστημα που διανύει το σώμα μετά από $t\text{ sec}$ πτώσης δίνεται από τη συνάρτηση $S(t)=5t^2\text{ m}$.
- α. Να υπολογίσετε το διάστημα που θα διανύσει το σώμα σε χρόνο $t=2\text{ sec}$.
 - β. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να φτάσει στο έδαφος, είναι $t=3\text{ sec}$.
 - γ. Να υπολογίσετε:
 - i. Τον τύπο της ταχύτητας $v(t)$ του σώματος κάθε χρονική στιγμή t .
 - ii. Την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή της πρόσκρουσης στο έδαφος.
10. Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x=x(t)=t(t-9)^2$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα και το x σε m .
- α. Να βρείτε την ταχύτητα σε χρόνο t .
 - β. Ποια είναι η επιτάχυνση σε χρόνο 2 sec ;
 - γ. Πότε το σημείο είναι (στιγμιαία) ακίνητο;
 - δ. Πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;
 - ε. Να βρείτε το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 4 s .

Δ. Προβλήματα Γεωμετρίας

11. Έστω κυκλικός δίσκος ακτίνας r και εμβαδού E .

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του E ως προς r , όταν $r=1$.



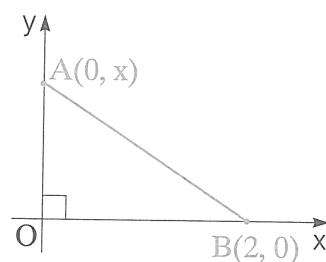
12. α. Η επιφάνεια μιας σφαίρας ακτίνας r είναι $E=4\pi r^2$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του E ως προς r , όταν $r=2$.
- β. Ο όγκος V μιας σφαίρας ακτίνας r είναι $V=\frac{4}{3}\pi r^3$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του V ως προς r , όταν $r=3$.
13. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ενός ορθογώνιου με διαστάσεις $\alpha=x^2$ και $\beta=x+1$ ως προς x , όταν $x=1$.

14. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει βάση τετράγωνο πλευράς $a = x + 1$ και ύψος $v = x$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου ως προς x , όταν $x = 1$.

15. Έστω τα σημεία $A(0, x)$, $x > 0$ και $B(2, 0)$.

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

- α. της απόστασης d των σημείων A και B ως προς x , όταν $x = 1$.
- β. του εμβαδού E του τριγώνου OAB ως προς x , όταν $x = 1$.



Ε. Γενικές

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{\lambda}{2}x^2 - 6x + \sqrt{5}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Αν ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x , όταν $x = 3$ είναι 0, τότε:

- α. Να δείξετε ότι $\lambda = -1$.

- β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x)}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$.

17. Σε μία άδεια δεξαμενή σχήματος κύβου ακμής 2 m προσθέτουμε πετρέλαιο.

Το ύψος h (σε m) της στάθμης του πετρελαίου στη δεξαμενή, ως συνάρτηση του χρόνου t (σε min) είναι $h(t) = \frac{t^2}{18}$.

- α. i. Να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου σε χρόνο $t = 3$ min.

- ii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ύψους του πετρελαίου σε χρόνο $t = 3$ min.

- β. i. Να δείξετε ότι ο όγκος του πετρελαίου στη δεξαμενή μετά από χρόνο t min είναι $V(t) = \frac{2t^2}{9} \text{ m}^3$.

- ii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου του πετρελαίου τη χρονική στιγμή $t = 5$ min.

- γ. Να βρείτε σε πόσο χρόνο θα γεμίσει η δεξαμενή.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$ της συνάρτησης f .
- γ. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x , όταν $x = 2$.
- δ. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = -2$.
- ε. Να βρείτε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{2 - \sigma\upsilon\nu x}$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{2\sigma\upsilon\nu x - 1}{(2 - \sigma\upsilon\nu x)^2}$.
- γ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x , όταν $x = \frac{\pi}{2}$.
- δ. Να βρείτε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f , στο σημείο της $A(0, f(0))$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 0$ είναι 9 και ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x , όταν $x = 1$ είναι 0.

- α. Να δείξετε ότι $\alpha = -6$ και $\beta = 9$.
- β. Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, δίνεται από τον τύπο $x = x(t) = f(t)$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα και το x σε μέτρα.
 - i. Να βρείτε την ταχύτητα του σημείου σε χρόνο t .
 - ii. Πότε το σημείο είναι (στιγμιαία) ακίνητο;
 - iii. Να βρείτε την επιτάχυνση του σημείου μετά από 5 sec.