

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.

- α. Να βρείτε τα διαστήματα που η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα που είναι γνησίως φθίνουσα.
- β. Να βρείτε τις θέσεις τοπικών ακρότατων της συνάρτησης f , το είδος των ακρότατων και την τιμή τους.
- γ. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(3)$ και $f(\pi)$.
- δ. Για κάθε $x \geq 1$, να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 1$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-3)(x^2+3)$.

- α. Να δείξετε ότι $f'(x) = 3(x-1)^2$.
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f(\sqrt{3})$.
- δ. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$.
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στην ευθεία ζ με εξίσωση $y = \frac{1}{2}x + 5$.

δ. Να βρείτε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$.