

A. Μονοτονία - Ακρότατα της f'

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 12x + 15$. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία η f έχει το μέγιστο ρυθμό μεταβολής ως προς x .

2. Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$$

η εφαπτομένη έχει το μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης;

B. Προβλήματα

3. Η αξία ενός αυτοκινήτου (σε χιλιάδες ευρώ) t χρόνια μετά την αγορά του δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = 30 - t^2, \quad 0 \leq t \leq 5$$

- α. Ποια είναι η αρχική αξία του αυτοκινήτου και ποια θα είναι η αξία του μετά από 3 χρόνια;
- β. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της αξίας του αυτοκινήτου οποιαδήποτε χρονική στιγμή και ποιος ο ρυθμός μεταβολής της αξίας του μετά από 4 χρόνια;
- γ. Να αποδείξετε ότι η αξία του αυτοκινήτου συνεχώς μειώνεται με την πάροδο του χρόνου.

4. Το ύψος (σε m) που βρίσκεται ένα τηλεκατευθυνόμενο μοντέλο αεροπλάνου, μετά από χρόνο πτήσης t (sec) δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -3t^2 + 30t, \quad \text{όπου } 0 \leq t \leq 10$$

- α. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ύψους του αεροπλάνου τη χρονική στιγμή $t = 2$.
- β. Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το αεροπλάνο ανεβαίνει, καθώς και το χρονικό διάστημα κατά το οποίο κατεβαίνει.
- γ. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το αεροπλάνο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος, καθώς και το ύψος αυτό.

Γ. Προβλήματα Γεωμετρίας

9. Ένα ορθογώνιο με διαστάσεις x και y έχει εμβαδόν 400 m^2 .
- α. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος Π , του ορθογωνίου, ως συνάρτηση του x είναι $\Pi(x) = 2\left(x + \frac{400}{x}\right)$, $x > 0$.
- β. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου, που έχει την μικρότερη περίμετρο.

10. Η περίμετρος ενός οικοπέδου, σχήματος ορθογωνίου, είναι 400 μέτρα. Αν το μήκος του είναι x μέτρα:

- α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου, ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = -x^2 + 200x, \quad 0 < x < 200$$

- β. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο;

- γ. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.

11. Θεωρούμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ανοικτό από πάνω με βάση τετράγωνο πλευράς $x \text{ cm}$ και όγκο 32 cm^3 .

- α. Να αποδείξετε ότι η συνολική επιφάνεια του κουτιού ως συνάρτηση του x είναι $f(x) = x^2 + \frac{128}{x}$, $x > 0$.

- β. Να βρείτε, για ποια τιμή του x το κουτί έχει ελάχιστη επιφάνεια.

