

## ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

42. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ .

α. Να βρείτε τις παραγώγους  $f'(x)$  και  $f''(x)$ .

β. Να δείξετε ότι  $f'(1) + f''(1) = 0$ .

γ. Να λύσετε την εξίσωση  $f'(x) = 0$ .

δ. Να βρείτε το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ .

43. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\alpha x}{x^2 + 1}, \quad \text{όπου} \quad \alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

β. Να δείξετε ότι  $\alpha = 2$ .

γ. Να βρείτε την παράγωγο  $f'(x)$ .

δ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f'$  με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

44. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + \alpha x + \beta$ .

α. Να βρείτε την παράγωγο  $f'(x)$ .

β. Αν  $f'(0) = 1$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(2, 8)$ , να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ .

Για  $\alpha = 1$  και  $\beta = -2$ :

γ. Να αποδείξετε ότι  $f'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

δ. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ .



B2. Εφαπτομένη ε με γνωστό  $\lambda_c$

12. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - \sqrt{3}x + 1$ .

- α. Να βρείτε το σημείο της καμπύλης της  $f$  που η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\frac{2\pi}{3}$
- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$ .

13. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \sqrt{3}x - 1$ .

- α. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της καμπύλης της συνάρτησης  $f$  που οι εφαπτομένες σχηματίζουν με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $60^\circ$ .
- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$ .

14. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ,  $x \neq 1$ .

- α. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της καμπύλης της συνάρτησης  $f$ , στα οποία οι εφαπτομένες σχηματίζουν με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = 135^\circ$ .
- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(2, f(2))$ .

15. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ .

- α. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της  $f$ , στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon: y = 2x + 3$ .
- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $x_0 = 1$ .

16. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ ,  $x \neq -1$ .

- α. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της καμπύλης της συνάρτησης  $f$ , στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στην ευθεία  $y = 2x + 5$ .
- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x = -2$ .

17. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 5$ .

- α. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της καμπύλης της συνάρτησης  $f$ , στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στον άξονα  $x'x$ .
- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$ .

18. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 1$ .

- α. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της καμπύλης της συνάρτησης  $f$ , στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στον άξονα  $x'x$ .
- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x = 2$ .

19. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ ,  $x \neq 0$ .

- α. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης  $f$ , στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στον άξονα  $x'x$ .
- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $x_0 = 1$ .

20. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ .

- α. Να βρείτε το σημείο της καμπύλης της συνάρτησης  $f$ , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στη διχοτόμο της γωνίας  $x\hat{O}y$ .
- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο του ερωτήματος α..

21. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 5x - 1$ .

- α. Να βρείτε τα σημεία στα οποία οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της  $f$  είναι παράλληλες στη διχοτόμο της γωνίας  $x'\hat{O}y$ .
- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της  $f$  στο  $A(2, f(2))$ .

### Γ. Γενικές

22. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = ax^3 - 8$ , όπου  $a$  ένας πραγματικός αριθμός.

α. Αν  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3$ , να βρεθεί η τιμή του  $a$ .

β. Έστω  $a = 1$ .

i. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2}$ .

ii. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο με τετμημένη  $x_0 = 2$ .

## ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

23. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ .

α. Να βρείτε την παράγωγο  $f'(x)$  της συνάρτησης  $f$ .

β. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της  $f$  στο  $x_0 = 2$ .

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του προηγούμενου ερωτήματος.

δ. Να βρείτε το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ .

24. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + kx + 2$ .

α. Αν ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της  $f$  στο  $x_0 = 1$  είναι 5, να βρείτε το  $k$ .

Για  $k = 2$ :

β. Να βρείτε την εφαπτομένη  $\varepsilon$  στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο της  $A(2, f(2))$ .

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες της εφαπτομένης  $\varepsilon$  του προηγούμενου ερωτήματος.

δ. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x^2 - 1}$ .

25. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x + 3)(x - 2)^2$ .

α. Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = (x - 2)(3x + 4)$ .

β. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της  $f$ , στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στον άξονα  $x'x$ .

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο της  $A(1, f(1))$ .

δ. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$ .