

Θέμα 65

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax + 6$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Αν $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 8$, να βρείτε το a .

Για $a = 5$:

β. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

γ. Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^2 - 1}$.

Θέμα 66

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 2a - 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$.

α. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}$.

β. Να βρείτε την τιμή του a , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

γ. Για $a = \frac{3}{4}$, να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε $3 + f(-1) + 2\lambda f(1) > 0$.

Θέμα 67

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax + 1}{x - 1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και την $f'(x)$.

β. Αν η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(2, f(2))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$, να βρείτε την τιμή του a .

γ. Για $a = -2$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

δ. Για $a = -2$ να συγκρίνετε τις τιμές $f(156)$ και $f(157)$.

Θέμα 68

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}, \text{ για } x \neq 0.$$

β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = -1$.

γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f'(x)}{x^3 + x - 2}$.

Θέμα 69

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x^2 + \alpha}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

α. Αν $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1}{2}$, να βρείτε το α .

Για $\alpha = 3$:

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(4)$ και $f(\pi)$.

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1}$.

Θέμα 70

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x - 1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να αποδείξετε ότι η $f'(x) = -\frac{\alpha + \beta}{(x - 1)^2}$, $x \neq 1$.

γ. Αν η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(2, -1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y = 2x + 1$, να βρείτε τα α και β .

δ. Για $\alpha = 1$ και $\beta = -3$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Θέμα 71

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(0, f(0))$.

γ. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ο ρυθμός μεταβολής της f , ως προς x , είναι θετικός.

δ. Να βρείτε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$.

Θέμα 72

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ. Να βρείτε τις θέσεις ακρότατων και να υπολογίσετε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(-1, f(-1))$.

Θέμα 73

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 - 4$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = -2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-2, 0)$.

α. Να αποδείξετε ότι $a=1$ και $b=3$.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

δ. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{5}}$.

Θέμα 74

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- β. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.
- γ. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2018)$ και $f(2019)$.
- δ. Να δείξετε ότι $f(2020) \leq \frac{3}{2}$.

Θέμα 75

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$ και ισχύει $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0$, να βρείτε τις τιμές των α και β .

Για $\alpha = -2$ και $\beta = 1$:

- β. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της f , ως προς x .
- γ. Αν η συνάρτηση θέσης ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα (πάνω στον άξονα $x'x$) είναι $x(t) = f(t)$, να βρείτε:
 - i. την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 2$ s.
 - ii. πότε το κινητό είναι ακίνητο.

Θέμα 76

Η περίμετρος ενός οικοπέδου, σχήματος ορθογωνίου, είναι 400 μέτρα. Αν το μήκος του είναι x μέτρα με $0 < x < 200$.

- α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου, ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = -x^2 + 200x, \quad 0 < x < 200$$

- β. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο;
- γ. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.

Θέμα 77

Ένας κήπος, σχήματος ορθογωνίου, με διαστάσεις x και y έχει εμβαδόν 100 m^2 , με $0 < x < 100$.

α. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του κήπου δίνεται από τη συνάρτηση

$$\Pi(x) = 2x + \frac{200}{x}, \quad 0 < x < 100$$

β. Να βρείτε την τιμή του x , ώστε ο κήπος να έχει ελάχιστη περίμετρο, την οποία και να υπολογίσετε.

γ. Για την τιμή του x , που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να υπολογίσετε το κόστος της περιφράξης του κήπου, αν η περιφράξη στοιχίζει 10 € ανά μέτρο.

Θέμα 78

Έχουμε περιφράξει με συρματοπλέγμα μήκους 100 m μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές.

Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x , με $0 < x < 100$.



α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από τον τύπο $f(x) = 50x - \frac{x^2}{2}$, $0 < x < 100$.

β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματοπλέγμα των 100 m .

Θέμα 79

Το κόστος σε ευρώ ενός βιομηχανικού προϊόντος σε σχέση με το χρόνο t σε ώρες που χρειάζεται για την παραγωγή του δίνεται από τον τύπο:

$$C(t) = 10t^2$$

ενώ η τιμή πώλησης του σε ευρώ είναι

$$R(t) = 10 \left(80 - \frac{16}{t} \right), \quad \frac{1}{5} < t \leq \frac{5}{2}$$

α. Να βρείτε το κέρδος P από την πώληση ενός προϊόντος ως συνάρτηση του χρόνου που χρειάζεται για την παραγωγή του.

β. Πότε το κέρδος είχε μείωση;

γ. Να βρείτε το μέγιστο δυνατό κέρδος.