

28. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x > 0$

β. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x > 0$

γ. $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$, $x > 0$

δ. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$

ε. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$, $x > 0$

στ. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $x > 0$

ΣΤ. Εύρεση ορίου από τον ορισμό της παραγώγου

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x + 5$.

α. Να βρείτε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

β. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

ii. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - 5}{h}$

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax + 1$.

Αν $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2$, να βρείτε το a .

Z. Τιμές - Σχέσεις μεταξύ των παραγώγων

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)(x^2 - 2x)$.

Να δείξετε ότι $f'(-1) + f''(-1) = -1$.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x+2}$.

Να δείξετε ότι $5f(0) + 2f'(-3) - f''(-3) = 0$.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + 3x^2 - \beta x + \sqrt{5}$.

Να βρείτε τις τιμές των a , β , για τις οποίες ισχύουν

$$f'(0) = -5 \quad \text{και} \quad f''(-2) = -18$$

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις παραγώγους $f'(x)$ και $f''(x)$.

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f''(x) + f'(x) - 17}{5x^2 - 10x}$.

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το κ , ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(-1, 5)$.

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{1-x}$.

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 - 2ax + \beta$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις παραγώγους $f'(x)$ και $f''(x)$.

β. Να δείξετε ότι $xf''(x) - f'(x) = 2a$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - ax + 3$, όπου $a = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x} - 1}$.

α. Να δείξετε ότι $a = 4$.

β. Να δείξετε ότι $xf''(x) - f'(x) = 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x - x \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις παραγώγους $f'(x)$ και $f''(x)$.

β. Να δείξετε ότι $f''(x) + f(x) = 2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

β. Να υπολογίσετε την $f'(x)$.

γ. Να δείξετε ότι $f(x) + (x+1)f'(x) = 1$, για κάθε $x \in A$.

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις παραγώγους $f'(x)$, $f''(x)$.

β. Να δείξετε ότι $f''(x) + 4f(x) = 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x + 5\eta\mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις παραγώγους $f'(x)$ και $f''(x)$.

β. Να δείξετε ότι $f''(x) + 4f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΣΥΝΔΥΑΣΤ

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

β. Να δείξετε ότι $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.

δ. Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της f στο A .

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

β. Να δείξετε ότι $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.

γ. Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της f στο A .

δ. Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της f στο A .

44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

β. Αν $f'(0) = 2$, να βρείτε το σημείο A της f .

Για $a = 1$ και $b = 2$, να βρείτε το σημείο A της f .

γ. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.

δ. Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της f στο A .

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

αι από το

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

α. Να βρείτε τις παραγώγους $f'(x)$ και $f''(x)$.

β. Να δείξετε ότι $f'(1) + f''(1) = 0$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.

δ. Να βρείτε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$.

43. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\alpha x}{x^2 + 1}, \text{ όπου } \alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να δείξετε ότι $\alpha = 2$.

γ. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

δ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f' με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x + \beta$.

α. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

β. Αν $f'(0) = 1$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(2, 8)$, να βρείτε τις τιμές των α και β .

Για $\alpha = 1$ και $\beta = -2$:

γ. Να αποδείξετε ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$.