

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Α. Μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης

3. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^2 - 6x + 1$

β. $f(x) = \frac{3x^2}{2} - 5x + 1$

γ. $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

δ. $f(x) = -3x^2 + 12x$

4. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 2$

β. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

γ. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - \sqrt{2}$

δ. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 5$

ε. $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + 1$

στ. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x - 2$

5. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = -x^3 + x^2 + x + 3$

β. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 1$

γ. $f(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 5$

δ. $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5x - 11$

ε. $f(x) = -3x^3 + 3x^2 - x + 2$

στ. $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - x - 4$

6. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

β. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3$

γ. $f(x) = -x^3 + 12x - 5$

δ. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$

ε. $f(x) = 2x^3 + x - 1$

στ. $f(x) = -x^3 - x + 4$

ζ. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 7$

η. $f(x) = -\frac{7}{3}x^3 + 10$

7. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^3 + x + 1$

β. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

γ. $f(x) = x^3 + 5$

δ. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1$

8. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^4 - 32x + 1$

β. $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 27x - 2$

γ. $f(x) = x^4 - 18x^2 + 5$

δ. $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 3$

9. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

β. $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

γ. $f(x) = 1 - x^2 - \frac{2}{x}$

δ. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - 2019$

10. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x + \sqrt{x - 2}$

β. $f(x) = x^2 - 4x, x \in [0, 5]$

B. Ανισοτικές σχέσεις

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^4 - 4x + 5$ και $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + 8x + 1$.

α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις.

β. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii. $g(x) \geq -11$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2017)$ και $f(2018)$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 4$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να αποδείξετε ότι αν $x \in [3, 5]$, τότε $f(5) \leq f(x) \leq f(3)$.

15. Δίνεται η συνάρτηση

Αν η συνάρτηση

α. την τιμή του

β. το είδος του

16. Δίνεται η συνάρτηση

Να βρείτε τις τιμές του $x_0 = 1$ το 3.

17. Δίνεται η συνάρτηση

Αν η συνάρτηση f έχει παράσταση της

α. Να βρείτε τις τιμές του

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση

γ. Να βρείτε τις τιμές του

18. Δίνεται η συνάρτηση

Αν η τιμή του f στο x_0 είναι η μέση τιμή της f στο $[0, x_0]$, τότε η θέση του ακρότατου της f στο $[0, x_0]$ είναι

19. Δίνεται η συνάρτηση

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση

β. Αν το τοπικό μέγιστο της f είναι M , τότε το ελάχιστο της f στο $[0, M]$ είναι

20. Δίνεται η συνάρτηση

α. Να δείξετε ότι η f είναι

β. Αν η f πάρει την τιμή a στο $[0, 1]$, τότε η f πάρει την τιμή a στο $[1, 2]$

γ. Για $a = -8$, τότε η f πάρει την τιμή a στο $[0, 1]$

Γ. Εύρεση παραμέτρων

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax + 5$.

Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, να βρείτε:

- α. την τιμή του a
- β. το είδος του ακρότατου.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 - 6x + \beta$.

Να βρείτε τις τιμές των a, β , για τις οποίες η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$ το 3 .

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax + \beta - 1$.

Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ τοπικό ακρότατο και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(-2, -3)$, τότε:

- α. Να βρείτε τις τιμές των a, β .
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- γ. Να βρείτε το είδος του ακρότατου και την τιμή του.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4ax + a^2$, $a < 0$.

Αν η τιμή του ακρότατου της f είναι -3 , να βρείτε την τιμή του a , τη θέση του ακρότατου και το είδος του ακρότατου.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + a$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.
- β. Αν το τοπικό μέγιστο της συνάρτησης f είναι διπλάσιο από το τοπικό ελάχιστο, να βρείτε την τιμή του a .

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+1)^2(x+a)$.

- α. Να δείξετε ότι $f'(x) = (x+1)(3x+2a+1)$.
- β. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 5$, να βρείτε την τιμή του a .
- γ. Για $a = -8$, να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.

- Να βρείτε τα διαστήματα που η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα που είναι γνησίως φθίνουσα.
- Να βρείτε τις θέσεις τοπικών ακρότατων της συνάρτησης f , το είδος των ακρότατων και την τιμή τους.
- Να συγκρίνετε τις τιμές $f(3)$ και $f(\pi)$.
- Για κάθε $x \geq 1$, να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 1$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-3)(x^2+3)$.

- Να δείξετε ότι $f'(x) = 3(x-1)^2$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f(\sqrt{3})$.
- Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στην ευθεία ζ με εξίσωση $y = \frac{1}{2}x + 5$.
- Να βρείτε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$.

8

ΛΥΜΕΝΕΣ

Για να μελετήσου

- βρίσκουμε
- βρίσκουμε
- κατασκευά

Από τον πίνακα α

II. Δίνεται η συν
του ρυθμού μ

Λύση

Θ ρυθμός μεταβολ

Είναι: • $f''(x) =$ • $f'''(x) =$

Από το διπλανό π

η f' , δηλαδή
γίνεται ελάχιστος γ

Θ ελάχιστος ρυθμ

 $f'(1) = 3 - 1^2$