

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

A. Μονοτονία - Ακρότατα της f'

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 12x + 15$. Να βρείτε την τιμή του x στην οποία η f έχει το μέγιστο ρυθμό μεταβολής ως προς x .

2. Δίνεται σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$$

η οποία έχει το μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης;

B. Προβλήματα

1. Θεωρείται το κόστος αυτοκινήτου (σε χιλιάδες ευρώ) t χρόνια μετά την αγορά του δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = 30 - t^2, \quad 0 \leq t \leq 5$$

α. Ποια είναι η αρχική αξία του αυτοκινήτου και ποια θα είναι η αξία του μετά από 3 χρόνια;

β. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της αξίας του αυτοκινήτου οποιαδήποτε χρονική στιγμή και ποιος ο ρυθμός μεταβολής της αξίας του μετά από 4 χρόνια;

γ. Να αποδείξετε ότι η αξία του αυτοκινήτου συνεχώς μειώνεται με την πάροδο του χρόνου.

2. Πόσους (σε m) που βρίσκεται ένα τηλεκατευθυνόμενο μοντέλο αεροπλάνου, από χρόνο πτήσης t (sec) δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -3t^2 + 30t, \quad \text{όπου } 0 \leq t \leq 10$$

α. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ύψους του αεροπλάνου τη χρονική στιγμή $t = 2$.

β. Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το αεροπλάνο ανεβαίνει, καθώς και το χρονικό διάστημα κατά το οποίο κατεβαίνει.

γ. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το αεροπλάνο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος, καθώς και το ύψος αυτό.

5. Η θετική αντίδραση ενός οργανισμού σ' ένα φάρμακο δίνεται από τον τύπο της συνάρτησης:

$$f(x) = x^2(a - x),$$

όπου $a > 0$ σταθερά και x η ημερήσια δόση του φαρμάκου (σε mg).

- α. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θετικής αντίδρασης του οργανισμού στο φάρμακο.
- β. Ποια είναι η ενδεδειγμένη ποσότητα δόσης του φαρμάκου, ώστε να έχουμε τη μεγαλύτερη θετική αντίδραση του οργανισμού;
6. Το κόστος $K(x)$ σε ευρώ/km σωλήνα που τροφοδοτεί με νερό ένα απομακρυσμένο χωριό δίνεται από τη συνάρτηση K με

$$K(x) = \frac{2000}{x} + 20x, \text{ όπου } x \text{ η διατομή του σωλήνα σε } \text{cm}^2$$

Να βρείτε τη διατομή του σωλήνα για την οποία:

- α. Το κόστος είναι ελάχιστο.
- β. Την ελάχιστη τιμή κόστους ανά km.
7. Η ενέργεια που καταναλώνει ένας μικροοργανισμός που κινείται μέσα στο αίμα ενός ασθενούς με ταχύτητα v , προσεγγίζεται από τον τύπο της συνάρτησης:

$$E(v) = (v - 35)^2 + 375$$

- α. Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινηθεί, για να καταναλώσει την ελάχιστη ενέργεια;
- β. Πόση είναι η ελάχιστη ενέργεια;
8. Έστω x, y δύο αριθμοί με σταθερό άθροισμα 10.
- α. Να αποδείξετε ότι το γινόμενό τους Γ , ως συνάρτηση του x , είναι

$$\Gamma(x) = 10x - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

- β. Να βρείτε τους αριθμούς x και y , ώστε να έχουν το μεγαλύτερο γινόμενο.

9. Ένα ορθογώνιο με διαστάσεις x και y έχει περίμετρο P .

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν A του ορθογώνιου είναι $A = \frac{P^2}{4} - \frac{P^2}{16}$.

β. Να βρείτε τις διαστάσεις x και y του ορθογώνιου, ώστε το εμβαδόν A να είναι μέγιστο.

10. Η περίμετρος ενός ορθογώνιου είναι P και το εμβαδόν A είναι $A = \frac{P^2}{4} - \frac{P^2}{16}$.

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν A είναι μέγιστο όταν $x = y = \frac{P}{4}$.

β. Να βρείτε τις διαστάσεις x και y του ορθογώνιου, ώστε το εμβαδόν A να είναι μέγιστο.

11. Θεωρούμε ένα κουτί ορθογώνιο με μήκος x και πλάτος y .

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν A του κουτιού είναι $A = \frac{P^2}{4} - \frac{P^2}{16}$.

β. Να βρείτε τις διαστάσεις x και y του κουτιού, ώστε το εμβαδόν A να είναι μέγιστο.

12. Η τιμή εισιτηρίου $f(t)$ σε ευρώ, για t χρόνια, είναι $f(t) = t^2 + \frac{16}{t}$.

α. Για ποια τιμή του t η τιμή εισιτηρίου $f(t)$ είναι μέγιστη;

β. Να υπολογίσετε την τιμή εισιτηρίου $f(t)$ για $t = 4$.

13. Θεωρούμε ένα κουτί ορθογώνιο με μήκος x και πλάτος y .

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν A του κουτιού είναι $A = \frac{P^2}{4} - \frac{P^2}{16}$.

β. Να βρείτε τις διαστάσεις x και y του κουτιού, ώστε το εμβαδόν A να είναι μέγιστο.

14. Η τιμή εισιτηρίου $f(t)$ σε ευρώ, για t χρόνια, είναι $f(t) = t^2 + \frac{16}{t}$.

α. Για ποια τιμή του t η τιμή εισιτηρίου $f(t)$ είναι μέγιστη;

β. Να υπολογίσετε την τιμή εισιτηρίου $f(t)$ για $t = 4$.

15. Η τιμή εισιτηρίου $f(t)$ σε ευρώ, για t χρόνια, είναι $f(t) = t^2 + \frac{16}{t}$.

α. Για ποια τιμή του t η τιμή εισιτηρίου $f(t)$ είναι μέγιστη;

β. Να υπολογίσετε την τιμή εισιτηρίου $f(t)$ για $t = 4$.

16. Η τιμή εισιτηρίου $f(t)$ σε ευρώ, για t χρόνια, είναι $f(t) = t^2 + \frac{16}{t}$.

α. Για ποια τιμή του t η τιμή εισιτηρίου $f(t)$ είναι μέγιστη;

β. Να υπολογίσετε την τιμή εισιτηρίου $f(t)$ για $t = 4$.

17. Η τιμή εισιτηρίου $f(t)$ σε ευρώ, για t χρόνια, είναι $f(t) = t^2 + \frac{16}{t}$.

α. Για ποια τιμή του t η τιμή εισιτηρίου $f(t)$ είναι μέγιστη;

β. Να υπολογίσετε την τιμή εισιτηρίου $f(t)$ για $t = 4$.

18. Η τιμή εισιτηρίου $f(t)$ σε ευρώ, για t χρόνια, είναι $f(t) = t^2 + \frac{16}{t}$.

α. Για ποια τιμή του t η τιμή εισιτηρίου $f(t)$ είναι μέγιστη;

β. Να υπολογίσετε την τιμή εισιτηρίου $f(t)$ για $t = 4$.

19. Η τιμή εισιτηρίου $f(t)$ σε ευρώ, για t χρόνια, είναι $f(t) = t^2 + \frac{16}{t}$.

α. Για ποια τιμή του t η τιμή εισιτηρίου $f(t)$ είναι μέγιστη;

β. Να υπολογίσετε την τιμή εισιτηρίου $f(t)$ για $t = 4$.

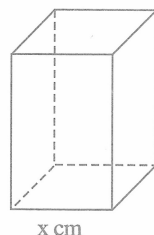
20. Η τιμή εισιτηρίου $f(t)$ σε ευρώ, για t χρόνια, είναι $f(t) = t^2 + \frac{16}{t}$.

α. Για ποια τιμή του t η τιμή εισιτηρίου $f(t)$ είναι μέγιστη;

β. Να υπολογίσετε την τιμή εισιτηρίου $f(t)$ για $t = 4$.

Γ. Προβλήματα Γεωμετρίας

9. Ένα ορθογώνιο με διαστάσεις x και y έχει εμβαδόν 400 m^2 .
- Να αποδείξετε ότι η περίμετρος Π , του ορθογωνίου, ως συνάρτηση του x είναι $\Pi(x) = 2\left(x + \frac{400}{x}\right)$, $x > 0$.
 - Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου, που έχει την μικρότερη περίμετρο.
10. Η περίμετρος ενός οικοπέδου, σχήματος ορθογωνίου, είναι 400 μέτρα. Αν το μήκος του είναι x μέτρα:
- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου, ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = -x^2 + 200x$, $0 < x < 200$.
 - Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο;
 - Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.
11. Θεωρούμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ανοικτό από πάνω με βάση τετράγωνο πλευράς $x \text{ cm}$ και όγκο 32 cm^3 .
- Να αποδείξετε ότι η συνολική επιφάνεια του κουτιού ως συνάρτηση του x είναι $f(x) = x^2 + \frac{128}{x}$, $x > 0$.
 - Να βρείτε, για ποια τιμή του x το κουτί έχει ελάχιστη επιφάνεια.



Δ. Προβλήματα Οικονομίας

12. Η τιμή εισιτηρίου των αστικών λεωφορείων σε μια πόλη είναι σταθερή τα τελευταία 5 χρόνια στα 50 λεπτά. Το κόστος μεταφοράς σε λεπτά ανά επιβάτη στη διάρκεια των 5 χρόνων προσεγγίζεται από τον τύπο της συνάρτησης $f(t) = t^2 + \frac{16}{t}$ λεπτά, όπου $t \in (0, 5]$ ο χρόνος.
- Πότε το κέρδος είχε αύξηση και πότε μείωση;
 - Να βρείτε τη χρονική στιγμή, κατά την οποία πραγματοποιήθηκε το μέγιστο κέρδος.
 - Πόσο είναι αυτό το κέρδος;

13. Μία βιοτεχνία έχει τη δυνατότητα να κατασκευάζει ανά έτος μέχρι και 20 μονάδες προϊόντος. Το κόστος κατασκευής (σε χιλιάδες €) x μονάδων εκφράζεται με τη συνάρτηση $K(x) = 4x^2 + 30$ και τα έσοδα από τις πωλήσεις τους (σε χιλιάδες €) με τη συνάρτηση

$$E(x) = 3x^2 + 20x$$

- α. Να βρείτε το κόστος κατασκευής 5 μονάδων προϊόντος.
 - β. Να βρείτε τον τύπο $P(x)$ της συνάρτησης του κέρδους της βιοτεχνίας.
 - γ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του κέρδους.
 - δ. Πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να κατασκευάζει η βιοτεχνία ανά έτος, για να έχει το μέγιστο κέρδος;
14. Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι

$$K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000 \quad \text{σε ευρώ με } 6 \leq x \leq 50$$

Η είσπραξη από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος είναι $420 - 2x$ σε ευρώ.

- α. Να αποδείξετε ότι το κέρδος P , από την πώληση x μονάδων προϊόντος, είναι

$$P(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 18x^2 - 180x - 1000, \quad 6 \leq x \leq 50$$

- β. - Να βρείτε την ημερήσια παραγωγή x του εργοστασίου για την οποία το κέρδος είναι μέγιστο και πόσο είναι αυτό.