

**Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ)
Γ' ΕΠΑΛ**

Μαθηματικά

Εκφωνήσεις



59 Ασκήσεις

20-3-2023

Ασκησόπολις

Στέλιος Μιχαήλογλου

Συναρτήσεις

2^ο Θέμα

24347. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης. (Μονάδες 7)
 β) Να δείξετε ότι $f(x) = x + 2$ για κάθε x του πεδίου ορισμού A. (Μονάδες 8)
 γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. (Μονάδες 10)

25874. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f. (Μονάδες 09)
 β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = x + 1$. (Μονάδες 09)
 γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. (Μονάδες 07)

31085. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x}{x}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f. (Μονάδες 9)
 β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = x - 1$. (Μονάδες 9)
 γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. (Μονάδες 7)

31086. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f. (Μονάδες 9)
 β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = x - 2$. (Μονάδες 9)
 γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. (Μονάδες 7)

32248. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-2}$ και $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

- α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g. (Μονάδες 8)
 β) Να δείξετε ότι για $x \neq 2$ είναι: $f(x) - g(x) = x + 1$. (Μονάδες 9)
 γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - g(x)]$. (Μονάδες 8)

Παράγωγος

2^ο Θέμα

25326. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \sqrt{x}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 8)
 β) Να δείξετε ότι $f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x > 0$. (Μονάδες 10)
 γ) Να υπολογίσετε το $f'(4)$. (Μονάδες 7)

25875. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$

- α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 4x$, $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 09)

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της

A(1,1). Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = 4$.

(Μονάδες 07)

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y = 4x - 3$.

(Μονάδες 09)

25876. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 09)

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της

A(1,-1). Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = 0$.

(Μονάδες 07)

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y = -1$.

(Μονάδες 09)

26146. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 - \frac{1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το $f'(2)$.

(Μονάδες 7)

31084. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2023$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το $f'(-1)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι: $f'(-1) + f'(1) = 2$.

(Μονάδες 10)

31088. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3 \cdot \frac{1}{x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f'(x) = \frac{3}{x^2}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το $f'(-3)$.

(Μονάδες 7)

31089. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 \cdot \frac{1}{x} - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το $f'(-2)$.

(Μονάδες 7)

31090. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το $f'(-2) + f(2)$.

(Μονάδες 8)

31091. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x > 0$. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το $f'(9)$. (Μονάδες 7)

31693. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 09)

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της

$A\left(-1, \frac{2}{3}\right)$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = 1$. (Μονάδες 07)

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $y = x + \frac{5}{3}$. (Μονάδες 09)

31695. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5 \cdot \frac{1}{x}$ με $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) = -\frac{5}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$. (Μονάδες 09)

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, 5)$.

Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = -5$. (Μονάδες 07)

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $y = -5x + 10$. (Μονάδες 09)

4^ο Θέμα

28286. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.

α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$. (Μονάδες 7)

γ) Ο Γιάννης υπολόγισε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ και βρήκε ότι σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135 μοιρών και επίσης ότι δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Συμφωνείτε με τον Γιάννη; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

28617. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = ax^2 - 2x$, $x \in [0, +\infty)$, όπου a ένας πραγματικός αριθμός.

α) Αν ισχύει $f'(1) = 0$ να αποδείξετε ότι $a = 1$. (Μονάδες 06)

β) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g . (Μονάδες 03)

ii) Να λύσετε την εξίσωση $g(x) = 0$. (Μονάδες 03)

γ) Για $a = 1$

i) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f}{g}(x)$. (Μονάδες 05)

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$. (Μονάδες 08)

Εφαρμογές των παραγώγων

2^ο Θέμα

25459. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 6x + 2023$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 6x - 6$, $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 08)
- β) Να υπολογίσετε το $f'(1)$. (Μονάδες 07)
- γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, για $x > 1$. (Μονάδες 10)

4^ο Θέμα

24359. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

- α)
- Για $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f . (Μονάδες 5)
 - Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M((2, f(2)))$. (Μονάδες 5)
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)

24360. Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα (m), πλάτος y μέτρα (m) και εμβαδό 400 τετραγωνικά μέτρα (m^2).

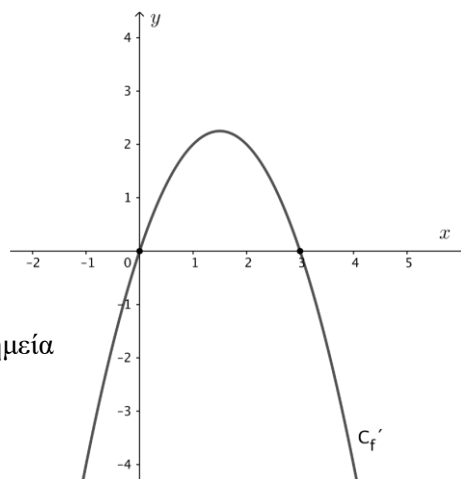
- α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $\Pi(x) = 2x + \frac{800}{x}$ με $x > 0$. (Μονάδες 8)
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\Pi(x)$ ως προς τη μονοτονία της. (Μονάδες 9)
- γ) Για ποια τιμή του x η περίμετρος του οικοπέδου γίνεται ελάχιστη, και ποια είναι η ελάχιστη τιμή της; (Μονάδες 8)

24361. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - x$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά.

- α) Αν ισχύει $f'(1) = 0$, να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)
- Για $\lambda = -1$
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της. (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x$. (Μονάδες 8)

25461. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f , όπου f' είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού.

- α) Να αιτιολογήσετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[3, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 3]$. (Μονάδες 09)
- β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1)$ και $f(2)$. (Μονάδες 06)
- γ) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(3, 2)$, τότε να βρείτε τα ακρότατα της f . (Μονάδες 10)

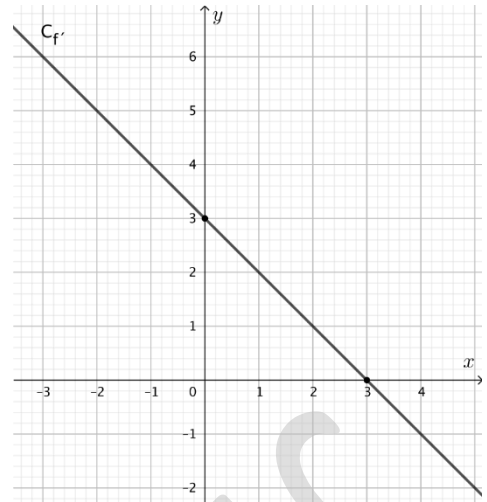


25643. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση $C_{f'}$ της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f . Αν η $C_{f'}$ είναι ευθεία η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(3,0)$, τότε:

α) Να αιτιολογήσετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$. (Μονάδες 10)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(3)$ και $f(4)$. (Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε το είδος και την τιμή του ακροτάτου που παρουσιάζει η f αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3,2)$. (Μονάδες 09)



24363. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι: $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ με $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της. (Μονάδες 10)

γ) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(2, f(2))$,

είναι η ευθεία $(\epsilon): y = -\frac{3}{25}x + \frac{16}{25}$. (Μονάδες 7)

26895. Δύο θετικοί αριθμοί x, y συνδέονται με τη σχέση $2x + y = 20$.

α) i. Να δείξετε ότι το γινόμενο των δύο αριθμών, ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $f(x) = -2x^2 + 20x$. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της παραπάνω συνάρτησης. (Μονάδες 5)

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τη τιμή του x ώστε το γινόμενο των δύο αριθμών να γίνει μέγιστο. (Μονάδες 7)

28125. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 8x + 18$ και $g(x) = -(x-4)^4 + 2$.

α) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων αυτών. (Μονάδες 12)

γ) Να δείξετε ότι $f(x) \geq g(x), x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

28280. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με διαστάσεις $AB=4$ και $B\Gamma=2$. Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία K, Λ, M και N των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔA αντίστοιχα έτσι ώστε $AK = B\Lambda = \Gamma M = \Delta N = x$.

α) Να δείξετε ότι

i. το εμβαδόν του $\Delta K N$ ως συνάρτηση του x είναι

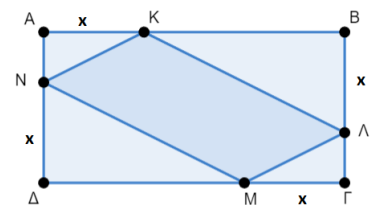
$$E_1(x) = \frac{1}{2}(2-x) \cdot x, \quad x \in (0, 2) \text{ και το εμβαδόν του } K B \Lambda \text{ ως}$$

συνάρτηση του x είναι $E_2(x) = \frac{1}{2}(4-x) \cdot x, \quad x \in (0, 2)$. (Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν του $K \Lambda M N$ ως συνάρτηση του x είναι $E(x) = 2(x^2 - 3x + 4), \quad x \in (0, 2)$. (Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ως προς το x όταν $x = \frac{3}{2}$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του x , για την οποία το $E(x)$ γίνεται ελάχιστο. (Μονάδες 7)



28282. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά ΑΒ=4. Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία Κ,Λ,Μ και Ν των πλευρών ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα έτσι ώστε ΑΚ=ΒΛ=ΓΜ=ΔΝ=χ.

α) Να δείξετε ότι

i. το εμβαδόν του ΑΚΝ ως συνάρτηση του χ είναι

$$E_1(x) = \frac{1}{2}(4-x) \cdot x, \quad x \in (0,4). \quad (\text{Μονάδες 5})$$

ii. το εμβαδόν του ΚΛΜΝ ως συνάρτηση του χ είναι

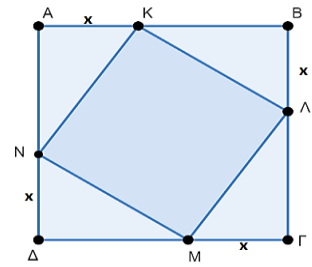
$$E(x) = 2(x^2 - 4x + 8), \quad x \in (0,4). \quad (\text{Μονάδες 5})$$

β) Να υπολογίσετε τη πρώτη παράγωγο του εμβαδού E(x).

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την τιμή του χ, για την οποία το E(x) γίνεται ελάχιστο.

(Μονάδες 6)



28618. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + \frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .

(Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

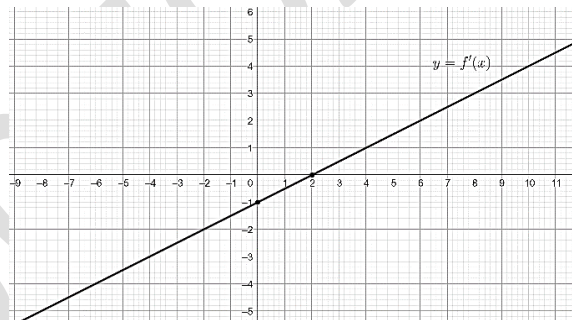
(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της Α(1,1).

(Μονάδες 10)

30975. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(2)=5$ και $f(0)=6$. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' της συνάρτησης, η οποία είναι ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2 και τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -1.

α) Να αιτιολογήσετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$.



(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα ακρότατα της f .

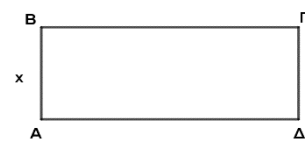
(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Α(0, f(0)).

(Μονάδες 9)

32260. Δίνεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με εμβαδόν 4 m^2 .

α) Αν το μήκος της πλευράς ΑΒ = $x \text{ m}$, να δείξετε ότι η πλευρά ΒΓ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ συναρτήσει του x είναι $BΓ = \frac{4}{x}, x > 0$. (Μονάδες 6)



β) Να αποδείξετε ότι, η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x + \frac{8}{x}, \quad x > 0.$$

(Μονάδες 6)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 8)

δ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με σταθερό εμβαδό, παίρνει την ελάχιστη τιμή της, όταν αυτό γίνει τετράγωνο. Συμφωνείτε με την άποψη του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

32365. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x + 6, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 3x^2 + 3, x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 08)

β) Να υπολογίσετε το $f'(0)$.

(Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 10)

32367. Μια επιχείρηση παραγωγής αιθέριων ελαίων εκτιμά ότι το ημερήσιο κόστος $C(x)$ (σε εκατοντάδες ευρώ) για την παραγωγή x κιλών λεβάντας είναι: $C(x) = 2x^3 - 4x^2 - 8x + 30$, $x \geq 0$

- α) Πόσο είναι το ημερήσιο κόστος για την παραγωγή 2 κιλών λεβάντας; (Μονάδες 05)
 β) Να υπολογίσετε το $C(0)$. Τι εκφράζει; (Μονάδες 06)
 γ) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $C(x)$. (Μονάδες 05)
 δ) Να βρείτε πόσα κιλά λεβάντας πρέπει να παράγονται ημερησίως ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος. Πόσο είναι το ελάχιστο ημερήσιο κόστος; (Μονάδες 09)

33859. Ένα οικοπέδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα, πλάτος y μέτρα και περίμετρο 200 μέτρα.

- α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = 100x - x^2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$. (Μονάδες 10)
 β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία της. (Μονάδες 9)
 γ) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο, και ποια είναι η μέγιστη τιμή του; Για την τιμή που βρήκατε τι σχήμα προκύπτει; (Μονάδες 6)

33860. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + \lambda x + 5$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά.

- α) Αν ισχύει $f'(1) = 0$, να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)
 Για $\lambda = 3$.
 β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{7}{3}\right)$ και $f\left(\frac{13}{4}\right)$. (Μονάδες 10)
 γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - x}$. (Μονάδες 08)

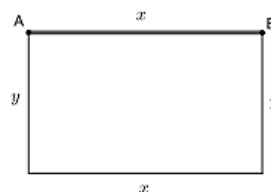
34259. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = ax^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$, όπου a ένας πραγματικός αριθμός.

- α) i) Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f . (Μονάδες 04)
 ii) Αν η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $a = 1$. (Μονάδες 05)
 Για $a = 1$
 β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 09)
 γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\sqrt{x} - 1}$. (Μονάδες 07)

34801. Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) ενός δωματίου σε συνάρτηση με τον χρόνο t σε ώρες δίνεται από τον τύπο $\theta(t) = t^3 - 3t^2 + 2t + c$, $0 \leq t \leq 4$, όπου c ένας πραγματικός αριθμός.

- α) Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του δωματίου τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι ίση με 8 βαθμούς Κελσίου, να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού c . (Μονάδες 06)
 Για $c = 8$
 β) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας όταν $t = 2$. (Μονάδες 09)
 γ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας γίνεται ελάχιστος και την τιμή του ελάχιστου ρυθμού μεταβολής. (Μονάδες 10)

34828. Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει σε ένα χωράφι μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις x, y ώστε να έχει εμβαδόν 800 m^2 . Η πλευρά AB της περιοχής, μήκους x , όπως φαίνεται στο σχήμα, θα είναι πέτρινη, ενώ για τις υπόλοιπες πλευρές θα χρησιμοποιήσει συρμάτινο φράχτη. Αν το κόστος περίφραξης για την πέτρινη πλευρά είναι 6 ευρώ ανά μ και για τον συρμάτινο φράχτη είναι 2 ευρώ ανά μ , τότε:



α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος της περιφράξης, συναρτήσει

του x , είναι: $K(x) = 8x + \frac{3200}{x}$, $x > 0$. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κτήματος ώστε το συνολικό κόστος περιφράξης να είναι ελάχιστο. (Μονάδες 12)

γ) Ποιο είναι το ελάχιστο κόστος περιφράξης; (Μονάδες 05)

3^ο Θέμα

27959. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 6x + 2023$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 6x - 6$, $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 05)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2020$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

27898. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) = -2x + 2$ με $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της. (Μονάδες 10)

γ) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq 5$. (Μονάδες 8)

32363. Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τη συνάρτηση $x(t) = t^2 - 4t - 1$, $t \geq 0$, όπου το t μετريέται σε δευτερόλεπτα (s) και το $x(t)$ σε μέτρα (m).

α) Να βρείτε την ταχύτητα $v(t)$ του σημείου σε χρόνο t . (Μονάδες 08)

β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του υλικού σημείου τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1s$ και $t_2 = 3s$. (Μονάδες 06)

γ) Σε ποια χρονική στιγμή το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο; (Μονάδες 05)

δ) Πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση; (Μονάδες 06)

Στατιστική

Παρουσίαση Στατιστικών Δεδομένων

2^ο Θέμα

32246. Στον διπλανό πίνακα, δίνεται ο αριθμός των μαθητών ενός τμήματος του σχολείου με 25 μαθητές, που απουσίασαν από 0 έως και 5 ημέρες στη διάρκεια του προηγούμενου χειμώνα.

α) Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών κ , που απουσίασε από το σχολείο 3 ημέρες. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που δεν απουσίασε από το σχολείο. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών που απουσίασε τουλάχιστον 1 ημέρα από το σχολείο. (Μονάδες 8)

Ημέρες απουσίας	Αριθμός μαθητών που απουσίασε
0	10
1	2
2	2
3	κ
4	2
5	1

34354. Στον επόμενο πίνακα σχετικών συχνοτήτων, φαίνεται η κλιμάκωση των γραπτών βαθμών του συνόλου των μαθητών της Γ' Λυκείου στο μάθημα των Μαθηματικών το προηγούμενο σχολικό έτος.

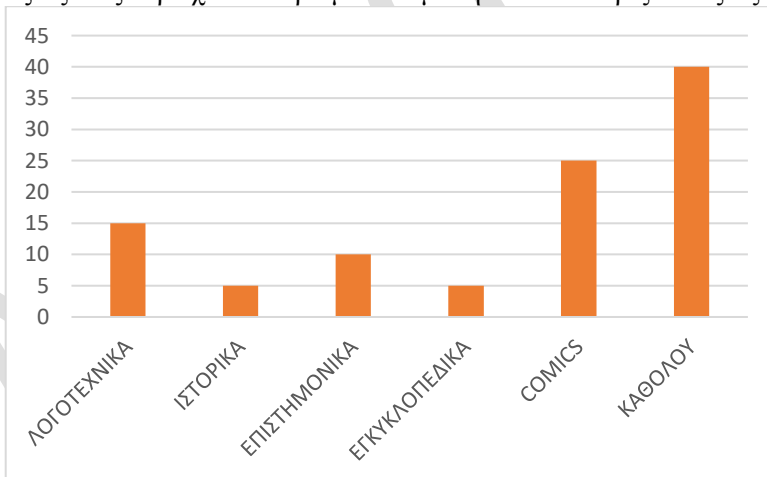
α) Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 8 και μικρότερο του 12. (Μονάδες 9)

β) Αν οι μαθητές που έγραψαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 είναι 42400 να υπολογίσετε το πλήθος του συνόλου των μαθητών. (Μονάδες 9)

γ) Πόσοι μαθητές έγραψαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16; (Μονάδες 7)

Κλάσεις [-)	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
0-4	10
4-8	10
8-12	
12-16	35
16-20	15

34766. Δίνεται το παρακάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων για το διάβασμα βιβλίων μαθητών γυμνασίου. Κάθε μαθητής απάντησε για ένα μόνο είδος βιβλίου ή καθόλου αν δεν διαβάζει κανένα βιβλίο. Ο κατακόρυφος άξονας περιέχει τον αριθμό των μαθητών και ο οριζόντιος άξονας τα είδη των βιβλίων.



α) Ποιο είναι το μέγεθος του δείγματος των μαθητών γυμνασίου που συμμετέχουν στην έρευνα, όπως φαίνεται από το ραβδόγραμμα; (Μονάδες 7)

β) Πόσοι μαθητές διαβάζουν λογοτεχνικά βιβλία και πόσοι επιστημονικά; (Μονάδες 4)

γ) i. Πόσοι μαθητές διαβάζουν βιβλία; (Μονάδες 6)

ii. Τι ποσοστό μαθητών δεν διαβάζει καθόλου βιβλία; (Μονάδες 8)

4^ο Θέμα

32253. Οι 20 μαθητές της ΣΤ' Δημοτικού, ενός σχολείου, που πήραν μέρος σε ένα ετήσιο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, πήραν τους παρακάτω βαθμούς (κλίμακα 0-10).

4 10 8 8 5 6 9 7 8 9 10 9 5 6 6 7 8 8 7 6

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

(Μονάδες 9)

β) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα των συχνοτήτων ν_i , καθώς και το διάγραμμα των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $F_i\%$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν η διεύθυνση του σχολείου θελήσει να βραβεύσει τους μαθητές που πέτυχαν επίδοση μεγαλύτερη ή ίση του 8, πόσους μαθητές θα βραβεύσει;

(Μονάδες 5)

δ) Αν η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, βραβεύσει το 25% των μαθητών που πήραν μέρος στο διαγωνισμό, τι επίδοση πρέπει να έχει κάποιος μαθητής για να βραβευτεί;

(Μονάδες 5)

Βαθμός				
x_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
Σύνολο				

Μέτρα θέσης και διασποράς

2^ο Θέμα

25460. Οι βαθμοί 10 φοιτητών στο μάθημα της Στατιστικής ήταν: 4, 7, 3, 5, 8, 6, 5, 9, 6, 6.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών όλων των φοιτητών του δείγματος. (Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων. (Μονάδες 10)

γ) Ποιο είναι το ποσοστό των φοιτητών με βαθμό μεγαλύτερο του 8; (Μονάδες 05)

28615. Εξετάσαμε ένα δείγμα δέκα μαθητών ενός λυκείου ως προς τη μεταβλητή 'Βάρος' και διαπιστώσαμε ότι οι τιμές του βάρους τους ήταν σε kg: 76, 74, 75, 75, 78, 72, 70, 80, 75, 75.

α) Τι είδους μεταβλητή είναι η μεταβλητή 'Βάρος'; Ποιοτική, Ποσοτική Διακριτή ή Ποσοτική Συνεχής; (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε:

i. τη μέση τιμή $\bar{x}$ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών. (Μονάδες 10)

ii. τη διάμεσο δ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών. (Μονάδες 10)

28616. Εξετάσαμε ένα δείγμα δέκα μαθητών ενός λυκείου ως προς τη μεταβλητή 'Βάρος' και διαπιστώσαμε ότι οι τιμές του βάρους τους ήταν σε kg:

80, 70, 75, 75, 78, 72, 70, 80, 75, 75

α) Να κατασκευάσετε το σημειόγραμμα της κατανομής του βάρους των δέκα μαθητών. (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε:

i. τη μέση τιμή $\bar{x}$ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών. (Μονάδες 09)

ii. τη διάμεσο δ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών. (Μονάδες 09)

30974. Οι προφορικοί βαθμοί έξι μαθητών στα μαθηματικά είναι 10, 13, 11, 15, 9, 14.

α) Να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{x}$ του δείγματος των έξι μαθητών. (Μονάδες 10)

β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα

(Μονάδες 5)

ii. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 του δείγματος.

(Μονάδες 10)

t_i	$t_i - \bar{x}$	$(t_i - \bar{x})^2$
9		
10		
11		
13		
14		
15		

31087. Οι ημέρες απουσίας 11 μαθητών το μήνα Σεπτέμβριο ήταν: 1, 4, 4, 7, 3, 6, 10, 3, 1, 2, 3.

- α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο των δοσμένων τιμών για τις ημέρες απουσίας. (Μονάδες 9)
 β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των δοσμένων τιμών για τις ημέρες απουσίας. (Μονάδες 9)
 γ) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων των δοσμένων τιμών για τις ημέρες απουσίας. (Μονάδες 7)

32243. Στον παρακάτω πίνακα, αναγράφεται ανά ημέρα, το πλήθος των απόντων μαθητών ενός τμήματος της Γ' Λυκείου.

Ημέρα	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή
Πλήθος απόντων μαθητών	4	3	2	2	4

Για το δείγμα των απόντων μαθητών να υπολογίσετε:

- α) το εύρος R. (Μονάδες 8)
 β) τη διάμεσο δ. (Μονάδες 8)
 γ) τη μέση τιμή $\bar{x}$. (Μονάδες 9)

32250. Στη διάρκεια του χειμώνα, από το σύνολο των μαθητών μιας τάξης, οι δέκα σημείωσαν τις εξής ημέρες απουσίας από το σχολείο: 6, 7, 1, 2, 3, 5, 2, 4, 4, 6. Να βρείτε:

- α) το εύρος των ημερών απουσίας που σημειώθηκαν. (Μονάδες 8)
 β) τη διάμεσο των ημερών απουσίας που σημειώθηκαν. (Μονάδες 8)
 γ) τη μέση τιμή των ημερών απουσίας που σημειώθηκαν. (Μονάδες 9)

33627. Οι βαθμοί που έγραψε ένας μαθητής σε τέσσερα τεστ, στο μάθημα των Μαθηματικών το πρώτο τετράμηνο της τρέχουσας χρονιάς είναι: 19, 10, 13, 20.

- α) Να βρείτε τη διάμεσο των βαθμών αυτών. (Μονάδες 8)
 β) Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας που πέτυχε ο μαθητής στα τέσσερα τεστ. (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε το σταθμικό μέσο της βαθμολογίας που πέτυχε ο μαθητής στα τέσσερα τεστ, αν τα παραπάνω τεστ είχαν αντίστοιχα συντελεστές βαρύτητας τους αριθμούς: 1, 4, 3, 2. (Μονάδες 9)

34258. Εξετάσαμε ένα δείγμα δέκα μαθητών ενός λυκείου ως προς τη μεταβλητή 'Βάρος' και διαπιστώσαμε ότι οι τιμές του βάρους τους ήταν σε kg: 76, 74, 75, 75, 78, 72, 70, 80, 75, 75

- α) Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών. (Μονάδες 10)
 β) Αν η τυπική απόκλιση s της κατανομής του βάρους των δέκα μαθητών κατά προσέγγιση είναι $s = 3$ kg, να βρείτε τον συντελεστή μεταβλητότητας CV του δείγματος. (Μονάδες 08)
 γ) Είναι το δείγμα ομοιογενές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

34818. Οι βαθμοί ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα στις εξετάσεις ήταν: 8, 18, 12, 14, 13.

- α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο των βαθμών του μαθητή. (Μονάδες 09)
 β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών του μαθητή. (Μονάδες 07)
 γ) Αν τα μαθήματα είχαν συντελεστές στάθμισης 2, 1, 3, 3 και 1 αντίστοιχα, ποια θα ήταν η μέση τιμή των βαθμών του μαθητή; (Μονάδες 09)

34820. Οι πόντοι που πέτυχε ένας καλαθοσφαιριστής στους τελευταίους πέντε (5) αγώνες της ομάδας του ήταν: 20, 17, 21, 19, 23.

- α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των πόντων του καλαθοσφαιριστή. (Μονάδες 09)

- β) Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 του δείγματος. Δίνεται ότι $\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{x})^2 = 20$, όπου $t_i, i = 1, 2, \dots, 5$,

είναι οι πόντοι του καλαθοσφαιριστή στους 5 αγώνες. (Μονάδες 07)

- γ) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 09)

4^ο Θέμα

32251. Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι (σε λεπτά), που χρειάζονται οι μαθητές ενός σχολείου για να πάνε το πρωί από το σπίτι τους στο σχολείο, ακολουθούν κανονική κατανομή. Δίνεται ότι ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος των χρόνων είναι $CV = 20\%$ και η διακύμανσή του $s^2 = 4$.

- α) Να δείξετε ότι η μέση τιμή $\bar{x} = 10$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε (προσεγγιστικά), το εύρος του δείγματος των χρόνων.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε κατά προσέγγιση το ποσοστό των μαθητών, που χρειάζονται για να πάνε από το σπίτι τους στο σχολείο:

- i. το πολύ 10 λεπτά
- ii. πάνω από 14 λεπτά
- iii. από 6 έως 12 λεπτά

(Μονάδες 12)

32256. Στις τέσσερις κλάσεις του παρακάτω πίνακα, παρουσιάζονται τα χρόνια εργασίας του συνόλου των εκπαιδευτικών ενός Λυκείου της Αθήνας.

Χρόνια Υπηρεσίας	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i \cdot \nu_i$
[0, 10)		10	
[10, 20)		15	
[20, 30)		κ	
[30, 40)		5	
Σύνολο			

α) Αφού μεταφέρετε στην κόλλα σας τον πίνακα, να συμπληρώσετε τα κενά του, συναρτήσει του κ , όπου αυτό είναι αναγκαίο.

(Μονάδες 5)

β) Αν ο μέσος χρόνος εργασίας των παραπάνω εκπαιδευτικών είναι τα 19 χρόνια, να δείξετε ότι το

$\kappa = 20$. Πόσοι ήταν συνολικά οι εκπαιδευτικοί του σχολείου;

(Μονάδες 6)

Για $\kappa = 20$,

γ) να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

Χρόνια Υπηρεσίας	ν_i	f_i	N_i	F_i	$F_i\%$
[0, 10)	10				
[10, 20)	15				
[20, 30)	20				
[30, 40)	5				
Σύνολο					

(Μονάδες 8)

δ) να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, και να βρείτε τη διάμεσο του χρόνου εργασίας.

(Μονάδες 6)