

Άλγεβρα Β΄ Λυκείου ΕΠΑΛ

Τράπεζα θεμάτων
Εκφωνήσεις-Λύσεις

20-3-2023

74 ασκήσεις



Δημήτριος Πατσιμάς

www.Askisopolis.gr

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

2^ο Θέμα

19503. Δίνονται οι ευθείες (ϵ_1): $y=x+1$ και (ϵ_2): $y=x-4$.

α) Να εξετάσετε αν το σημείο $A(0,1)$ ανήκει και στις δύο ευθείες (ϵ_1), (ϵ_2). (Μονάδες 13)

β) Να εξετάσετε αν έχει λύση το σύστημα των εξισώσεων:
$$\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = -4 \end{cases}$$
 (Μονάδες 12)

Λύση

α) Το σημείο $A(0,1)$ ανήκει σε μία ευθεία όταν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν τον τύπο της. Είναι $1=0+1 \Leftrightarrow 1=1$ οπότε ανήκει στην (ϵ_1) και $1=0-4 \Leftrightarrow 1=-4$ άτοπο άρα δεν ανήκει στην (ϵ_2)

β) Έχουμε
$$\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = -4 \end{cases} \xrightarrow{+} 0x + 0y = 3 \text{ οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.}$$

20381. Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$$

α) Το ζεύγος $(x, y) = (0, 3)$ είναι λύση του συστήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε το σύστημα.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Αν αντικαταστήσουμε το ζεύγος $(0, 3)$ σε οποιαδήποτε από τις δύο γραμμικές εξισώσεις δεν τις επαληθεύει (π.χ. στην πρώτη $3 \cdot 0 - 3 = 5 \Leftrightarrow -3 = 5$ άτοπο) άρα δεν είναι λύση του συστήματος.

β)
$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} \cdot 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 3y = 15 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} \xrightarrow{+} 7x = 14 \text{ οπότε } x = 2 \text{ και } 3 \cdot 2 - y = 5 \Leftrightarrow y = 1.$$

20329.α) Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 2x + 7y = -5 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

(Μονάδες 15)

β) Ποιο είναι το σημείο τομής των ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος (Σ); Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

Λύση

α)
$$\begin{cases} 2x + 7y = -5 \\ 3x - y = 4 \end{cases} \cdot 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 7y = -5 \\ 21x - 7y = 28 \end{cases} \xrightarrow{+} 23x = 23 \text{ οπότε } x = 1 \text{ και } 3 \cdot 1 - y = 4 \Leftrightarrow y = -1.$$

β) Το σημείο τομής των ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος (Σ) είναι η λύση του συστήματος $(1, -1)$

20291. Θεωρούμε τις ευθείες $\epsilon_1 : 3x - 4y = 2$ και $\epsilon_2 : 5x + 4y = 14$.

α) Να εξετάσετε αν το σημείο $(6, 4)$ είναι κοινό σημείο των ευθειών. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το σημείο τομής των δυο ευθειών λύνοντας το σύστημα
$$\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 5x + 4y = 14 \end{cases}$$
 (Μονάδες 15)

Λύση

α) Το σημείο $A(6,4)$ ανήκει σε μία ευθεία όταν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν τον τύπο της. Είναι $3 \cdot 6 - 4 \cdot 4 = 2 \Leftrightarrow 18 - 16 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$ οπότε ανήκει στην (ε_1) και $5 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = 14 \Leftrightarrow 30 + 16 = 14 \Leftrightarrow 46 = 14$ άτοπο άρα δεν ανήκει στην (ε_2)

β) $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 5x + 4y = 14 \end{cases} \xrightarrow{+} 8x = 16$ οπότε $x = 2$ και $3 \cdot 2 - 4 \cdot y = 2 \Leftrightarrow 4y = 4 \Leftrightarrow y = 1$. Το σημείο τομής των ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος (Σ) είναι η λύση του συστήματος $(2,1)$.

20266. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$.

α) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1): 3x + 2y = 8$ και $(\varepsilon_2): 2x - y = 3$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \cdot 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases} \xrightarrow{+} 7x = 14$ οπότε $x = 2$ και $3 \cdot 2 + 2y = 8 \Leftrightarrow 2y = 2 \Leftrightarrow y = 1$.

β) Το σημείο τομής των ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος (Σ) είναι η λύση του συστήματος $(2,1)$.

19102. Δίνεται το σύστημα $(\Sigma): \begin{cases} x + y = 4 \\ 5x - y = 2 \end{cases}$.

α) Να εξετάσετε αν το ζεύγος $(x, y) = (3, 1)$ είναι λύση του παραπάνω συστήματος.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Αν αντικαταστήσουμε το ζεύγος $(3, 1)$ στην δεύτερη εξίσωση έχουμε $5 \cdot 3 - 1 = 2 \Leftrightarrow 14 = 2$ άτοπο άρα δεν είναι λύση του συστήματος.

β) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 5x - y = 2 \end{cases} \xrightarrow{+} 6x = 6$ οπότε $x = 1$ και $1 + y = 4 \Leftrightarrow y = 3$.

4^ο Θέμα

20437. Ένα μικρό κατάστημα σε μια γειτονιά πουλάει, μεταξύ άλλων αγαθών, γάλα και ψωμί. Την Τρίτη το πρωί μέσα σε μια ώρα πούλησε 8 φρατζόλες ψωμί και 5 λίτρα γάλα και εισέπραξε 14 ευρώ. Την Πέμπτη το πρωί την ίδια ώρα πούλησε 6 φρατζόλες ψωμί και 9 λίτρα γάλα και εισέπραξε 21 ευρώ. Αν x είναι η τιμή πώλησης της μιας φρατζόλας ψωμιού και y η τιμή πώλησης του ενός λίτρου γάλακτος,

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την τιμή πώλησης της μιας φρατζόλας ψωμιού και του ενός λίτρου γάλακτος.

(Μονάδες 7)

γ) i. Να παραστήσετε γραφικά το σύστημα του α) ερωτήματος και να ονομάσετε B το σημείο τομής των δυο ευθειών. (Μονάδες 6)

ii. Αν το σημείο τομής των ευθειών είναι $B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ να ερμηνεύσετε τις συντεταγμένες του στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 7)

Λύση

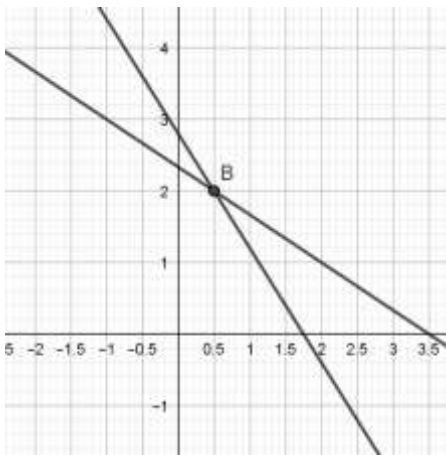
α) Το ζητούμενο σύστημα είναι : $\begin{cases} 8x + 5y = 14 \\ 6x + 9y = 21 \end{cases}$.

β) Είναι : $\begin{cases} 8x + 5y = 14 \\ 6x + 9y = 21 \end{cases} \begin{cases} 8x + 5y = 14 \\ 6x + 9y = 21 \end{cases} \cdot 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 5y = 14 \\ 18x + 27y = 63 \end{cases} \cdot (-4) \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 5y = 14 \\ -24x - 36y = -84 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} 8x + 5y = 14 \\ -21y = -42 \end{cases}$ οπότε $y = 2$ και

$$8 \cdot x + 5 \cdot 2 = 14 \Leftrightarrow 8x = 4 \Leftrightarrow x = 0,5.$$

Άρα η τιμή πώλησης της μιας φρατζόλας ψωμιού είναι 0,5 ευρώ και του ενός λίτρου γάλακτος 2 ευρώ.

γ) i)

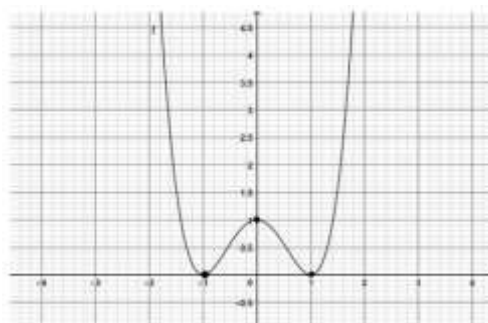


ii) Το σημείο τομής των δυο ευθειών είναι το $B(0.5, 2)$, η τετμημένη του οποίου εκφράζει την τιμή πώλησης (σε ευρώ) της μίας φρατζόλας ψωμιού (μία φρατζόλα ψωμί πωλείται μισό ευρώ) και η τεταγμένη του $y = 2$ εκφράζει την τιμή πώλησης (σε ευρώ) του ενός λίτρου γάλακτος (το ένα λίτρο γάλα πωλείται 2 ευρώ).

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

2^ο Θέμα

20435. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



α) Να βρείτε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις που την αποκτά.

(Μονάδες 13)

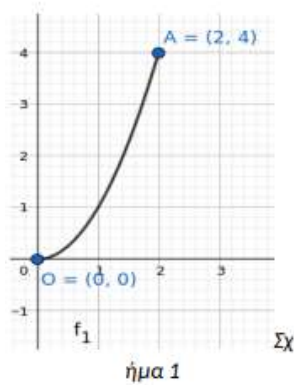
(Μονάδες 12)

Λύση

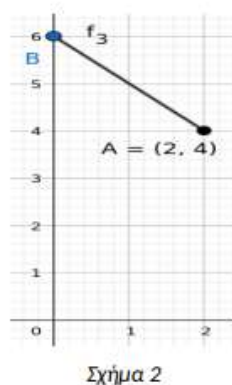
α) Η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ άρα είναι άρτια.

β) Η f έχει ελάχιστη τιμή το 0, την οποία παρουσιάζει στο -1 και στο 1.

19504. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f_1, f_3 .



ήμα 1



Σχήμα 2

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των f_1, f_3 , εφόσον υπάρχουν.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τη μονοτονία των συναρτήσεων f_1, f_3 .

(Μονάδες 13)

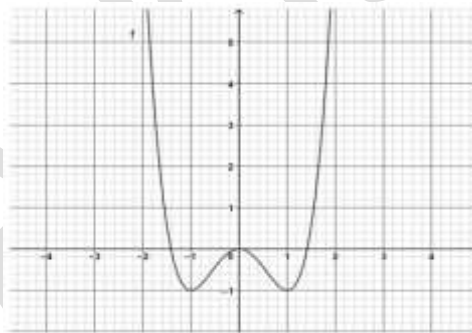
Λύση

α) Η f_1 έχει ελάχιστη τιμή το 0 και μέγιστη το 4.

Η f_3 έχει ελάχιστη τιμή το 4 και μέγιστη το 6 τις οποίες παρουσιάζει στα 2, 0 αντίστοιχα.

β) Η f_1 είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$ και η f_3 είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$

20434. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



α) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις που την αποκτά.

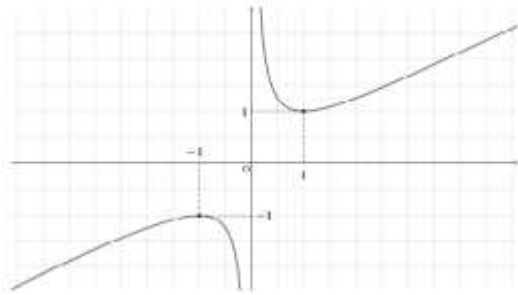
(Μονάδες 12)

Λύση

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-1, 0], [1, +\infty)$

β) Η f έχει ελάχιστη τιμή το -1 την οποία παρουσιάζει στα -1, 1.

20328. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $y = f(x)$ με $x \neq 0$. Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος:



- α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f . (Μονάδες 15)
 β) Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός «η συνάρτηση f είναι περιττή». Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

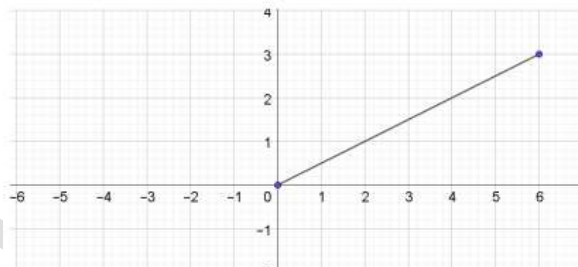
Λύση

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-1, 0)$, $(0, 1]$

β) Ο ισχυρισμός είναι αληθής αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων, οπότε η συνάρτηση f είναι περιττή.

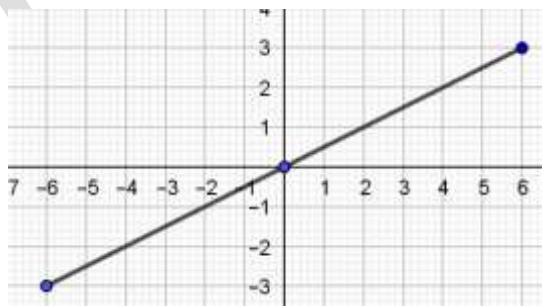
20268. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-6, 6]$ είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4, 2)$. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 6]$.

- α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 13)
 β) Να βρείτε το $f(-4)$. (Μονάδες 12)



Λύση

α) Η f είναι περιττή άρα έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων οπότε έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση.



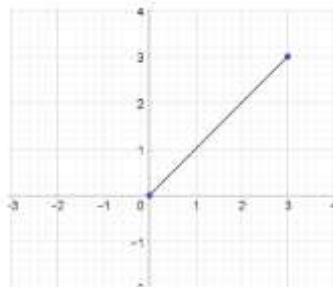
β) $f(-4) = -f(4) = -2$ είτε από τον τύπο είτε γραφικά.

20267. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3,3]$ είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,3]$.

- α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.
β) Να βρείτε το $f(-2)$.

(Μονάδες 13)

(Μονάδες 12)

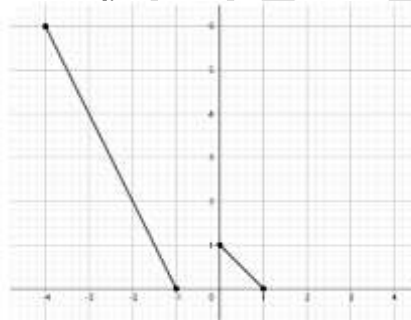


Λύση

α) Η f είναι άρτια άρα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ οπότε έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση.

β) $f(-2) = f(2) = 2$ είτε από τον τύπο είτε γραφικά.

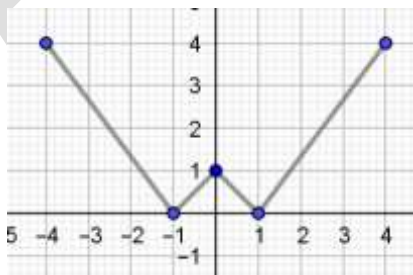
19026. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4, 4]$.



- α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f . (Μονάδες 13)
β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

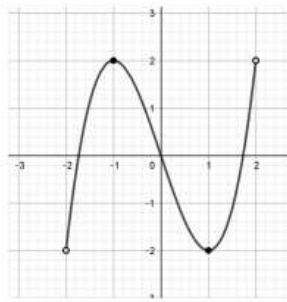
Λύση

α) Η f είναι άρτια άρα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ οπότε έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση.



β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-1, 1]$, $[1, 4]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-4, -1]$, $[0, 1]$

19024. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-2, 2)$.



α) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-2, -1]$, $[1, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$

β) Η f έχει ελάχιστη τιμή το -2 , την οποία παρουσιάζει στα $-2, 1$ και μέγιστη το 2 την οποία παρουσιάζει στα $-1, 2$.

4^ο Θέμα

19509. Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(1,2)$, $B(3,4)$ τα οποία ανήκουν στη γραφική παράσταση μίας περιττής συνάρτησης f , με πεδίο ορισμού τους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$.

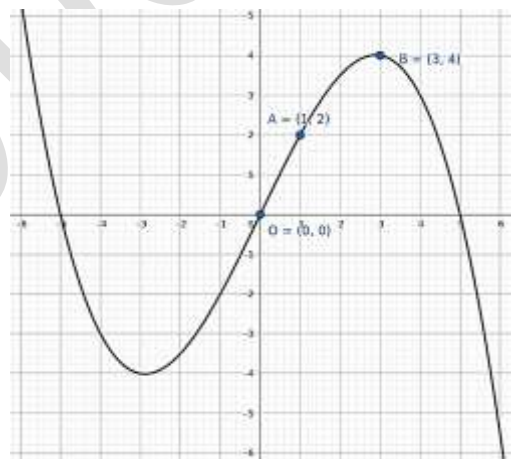
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες δύο ακόμα σημείων Γ και Δ , τα οποία να ανήκουν στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

β) Αν δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, να βρείτε αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 8)

γ) Αν δίνεται ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη και στο παρακάτω σχήμα δίνεται μέρος της γραφικής της παράστασης, να εξετάσετε σε ποια διαστήματα είναι γνησίως μονότονη και να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της σε καθένα από αυτά.



(Μονάδες 9)

Λύση

α) Η συνάρτηση είναι περιττή άρα στη γραφική παράσταση της f βρίσκονται τα συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων των σημείων A και B , τα οποία είναι αντίστοιχα τα σημεία $\Gamma(-1,-2)$ και $\Delta(-3,-4)$.

β) Η f είναι γνησίως μονότονη, $1 < 3$ και $f(1) = 2 < f(3) = 4$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-3, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -3]$, $[3, +\infty)$

19505. Δίνεται ένα τμήμα (μέρος) της γραφικής παράστασης καθεμιάς από τις συναρτήσεις f, g σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

α) Σε καθένα από τα δύο σχήματα φαίνεται η γραφική παράσταση για όλους τους αριθμούς $x > 0$ για τους οποίους ορίζεται καθεμία από τις συναρτήσεις αυτές. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και η g άρτια, να βρείτε τα πεδία ορισμού των δύο συναρτήσεων.

(Μονάδες 7)

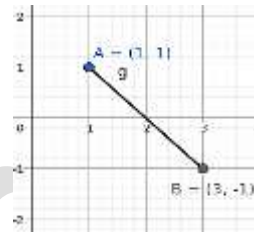
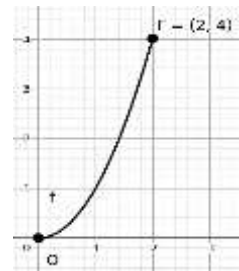
β) Να συμπληρώσετε ολόκληρη τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε όλο το πεδίο ορισμού της, αν αυτή είναι περιττή.

(Μονάδες 7)

γ) Να συμπληρώσετε ολόκληρη τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g σε όλο το πεδίο ορισμού της, αν αυτή είναι άρτια.

(Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας των δύο συναρτήσεων f, g όπως αυτές προέκυψαν από τα ερωτήματα β και γ.



(Μονάδες 5)

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι περιττή άρα έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Στο πεδίο ορισμού της f ανήκουν τα σημεία με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $[0, 2]$ άρα θα ανήκουν και τα συμμετρικά τους ως προς την αρχή των αξόνων δηλαδή τα σημεία με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $[-2, 0]$.

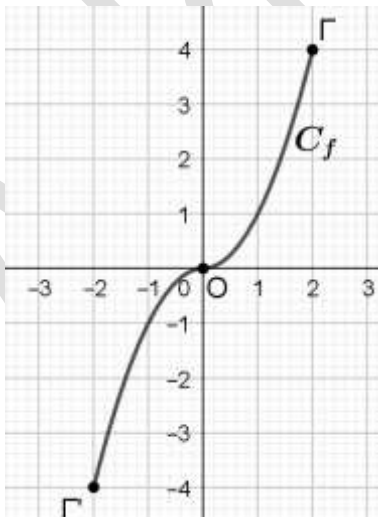
Επομένως η f έχει πεδίο ορισμού $A_f = [-2, 2]$.

Η συνάρτηση g είναι άρτια άρα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

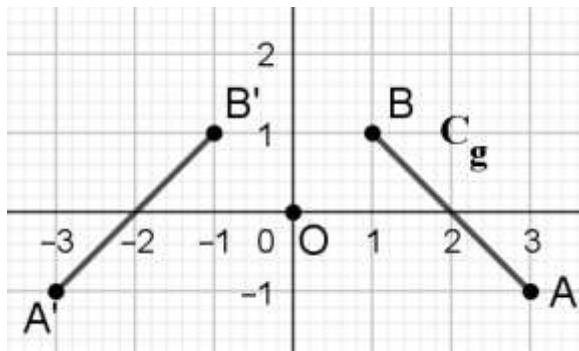
Στο πεδίο ορισμού της g ανήκουν τα σημεία με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $[1, 3]$ άρα θα ανήκουν και τα συμμετρικά τους ως προς τον άξονα $y'y$ δηλαδή τα σημεία με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $[-3, -1]$.

Επομένως η g έχει πεδίο ορισμού $A_g = [-3, -1] \cup [1, 3]$.

β) Η f είναι περιττή άρα έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων οπότε έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση :



γ) Η g είναι άρτια περιττή άρα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ οπότε έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση :



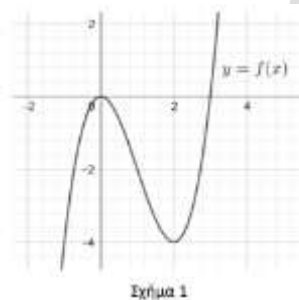
δ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, 4]$.

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[-3, -1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$.

ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ-ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

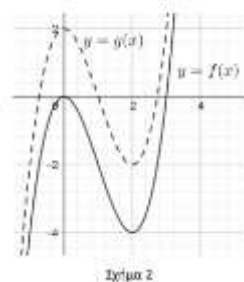
2^ο Θέμα

20968. Στο σχήμα 1, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x^2$ με $x \in \mathbb{R}$.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 14)

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g του σχήματος 2, η οποία προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της f . (Μονάδες 11)



Λύση

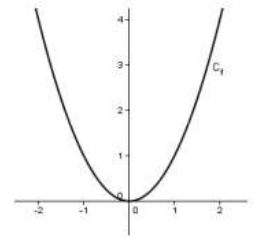
α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 2]$

β) Η g έχει προκύψει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 2 μονάδες προς τα πάνω άρα έχει τον τύπο $g(x) = f(x) + 2 = x^3 - 3x^2 + 2$

20286. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 12)

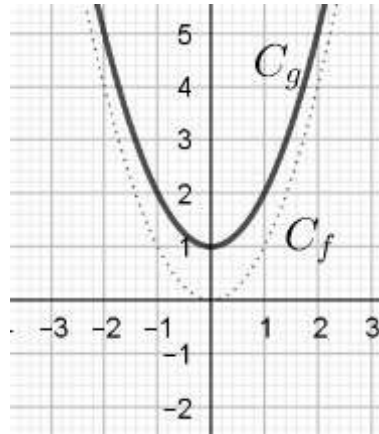
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = x^2 + 1$ (Μονάδες 13)



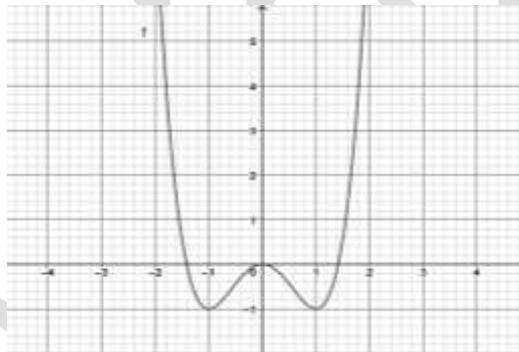
Λύση

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

β) Η φ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα πάνω οπότε έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση:



20436. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



α) Να μεταφέρετε στο τετραδιό σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις έχει γραφική παράσταση που προκύπτει αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της f κατά δύο μονάδες προς τα κάτω και κατά μία μονάδα αριστερά. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

A. $h_1(x) = f(x+1) + 2$

B. $h_2(x) = f(x+1) - 2$

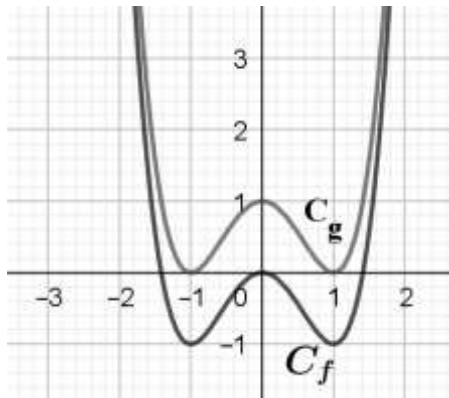
Γ. $h_3(x) = f(x) - 2$

Δ. $h_4(x) = f(x+1)$

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με κατακόρυφη μετατόπιση μίας μονάδας προς τα πάνω οπότε έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση :



β) Η συνάρτηση που προκύπτει αν μετατοπίσουμε την γραφική παράσταση της f κατά μία μονάδα προς τα αριστερά είναι η $k(x) = f(x+1)$. Η συνάρτηση που προκύπτει αν μετατοπίσουμε την γραφική παράσταση της k κατά δύο μονάδες προς τα κάτω είναι η $h_2(x) = k(x) - 2 = f(x+1) - 2$.

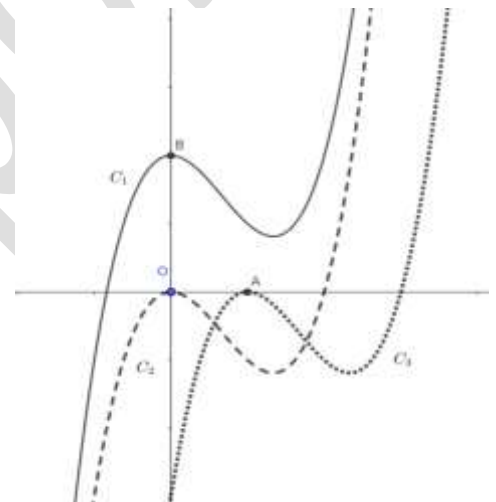
21601. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 , των συναρτήσεων f, g, h , όχι αναγκαστικά με αυτήν την αντιστοίχιση.

α) Αν η μία γραφική παράσταση από αυτές προκύπτει από τη μετατόπιση μίας άλλης κατά μία μονάδα προς τα δεξιά, να βρείτε ποιες είναι αυτές οι γραφικές παραστάσεις.

(Μονάδες 12)

β) Αν η C_2 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 2x^2$, να βρείτε ποια γραφική παράσταση αντιστοιχεί στην $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2$.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Η C_3 προκύπτει από τη γραφική παράσταση της C_2 με οριζόντια μετατόπιση μία μονάδα προς τα δεξιά ενώ η C_1 προκύπτει από τη γραφική παράσταση της C_2 με κατακόρυφη μετατόπιση.

β) Είναι $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2 = f(x) + 2$ οπότε η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με κατακόρυφη μετατόπιση δύο μονάδων προς τα πάνω. Όπως αναφέραμε στο α) ερώτημα η C_1 προκύπτει από τη γραφική παράσταση της C_2 με κατακόρυφη μετατόπιση οπότε στη g αντιστοιχεί η C_1 .

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

2^ο Θέμα

21118. Μία γωνία ω είναι ίση με 2 ακτίνια.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ω .

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Είναι : $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$ ($\pi \approx 3,14$) οπότε η γωνία ω είναι αμβλεία και βρίσκεται στο 2° τεταρτημόριο.

β) Από τον γνωστό τύπο έχουμε $\frac{2}{\pi} = \frac{\omega}{180} \Leftrightarrow \omega = \frac{360}{\pi}$ μοίρες.

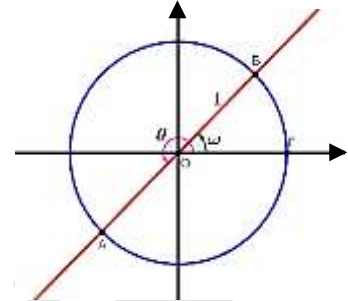
20994. Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και τα σημεία του Α και Β, τα οποία είναι συνευθειακά με την αρχή Ο των αξόνων.

Γνωρίζουμε ότι $\hat{\omega} = \frac{\pi}{4}$ rad.

α) Να βρείτε τους αριθμούς $\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu^2\omega$. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε μια γωνία θ , σε rad, της οποίας η αρχική πλευρά είναι η ΟΓ και η τελική πλευρά είναι η ΟΑ.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Είναι : $\eta\mu\omega = \eta\mu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Επίσης $\sigma\upsilon\nu\omega = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ οπότε $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

β) Είναι $\theta = \pi + \omega = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

35617. Έστω θ μια γωνία με $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$, για την οποία ισχύει $\eta\mu\theta^\circ = 0,8$ και $\sigma\upsilon\nu\theta^\circ = 0,6$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η θ είναι γωνία του πρώτου τεταρτημόριου του τριγωνομετρικού κύκλου. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \sigma\upsilon\nu\theta^\circ - \sigma\upsilon\nu(2 \cdot 360^\circ + \theta^\circ)$. (Μονάδες 15)

Λύση

α) Είναι : $\eta\mu\theta > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$ οπότε η γωνία θ είναι γωνία του πρώτου τεταρτημόριου του τριγωνομετρικού κύκλου.

β) Είναι $A = \sigma\upsilon\nu\theta^\circ - \sigma\upsilon\nu(2 \cdot 360^\circ + \theta^\circ) = \sigma\upsilon\nu\theta^\circ - \sigma\upsilon\nu\theta^\circ = 0$.

(Γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu(k \cdot 360^\circ + \theta^\circ) = \sigma\upsilon\nu\theta^\circ, k \in \mathbb{Z}$).

35618. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$.

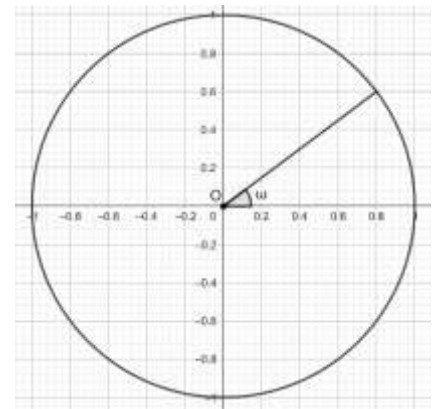
α) Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και το $\eta\mu\omega$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Αν $\eta\mu\omega = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = 0,8$, να βρείτε το $\eta\mu(-3 \cdot 360^\circ + \omega)$ και το $\sigma\upsilon\nu(-3 \cdot 360^\circ + \omega)$.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Είναι : $\eta\mu\theta = OG = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = OB = 0,8$.

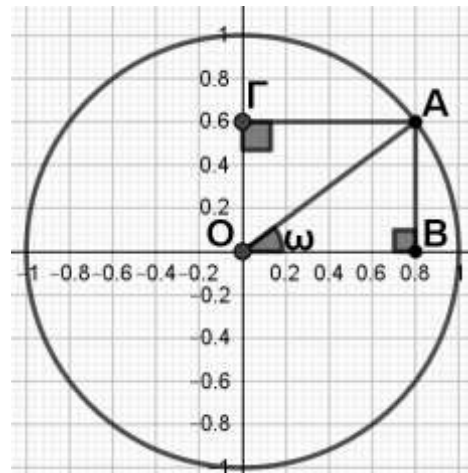
β) Είναι

$$\eta\mu(k \cdot 360^\circ + \omega^\circ) = \eta\mu\omega^\circ, \sigma\upsilon\nu(k \cdot 360^\circ + \omega^\circ) = \sigma\upsilon\nu\omega^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{οπότε } \eta\mu(-3 \cdot 360^\circ + \omega^\circ) = \eta\mu\omega^\circ = 0,6 \text{ και}$$

$$\sigma\upsilon\nu(-3 \cdot 360^\circ + \omega^\circ) = \sigma\upsilon\nu\omega^\circ = 0,8.$$

(Γνωρίζουμε ότι).



ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

2^ο Θέμα

20397. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu x, x \in [0, 2\pi]$.

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(x)					

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

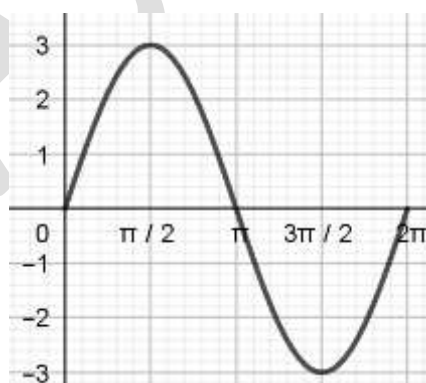
(Μονάδες 15)

Λύση

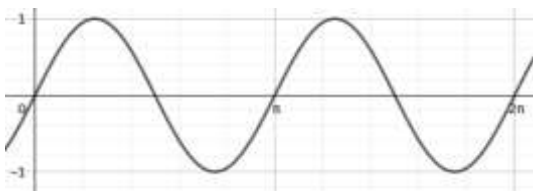
α)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(x)	0	3	0	-3	0

β)



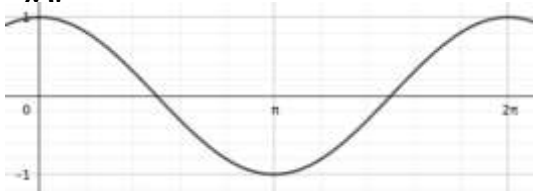
21600. Στα παρακάτω 4 σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x, g(x) = \sigma\upsilon\nu x, h(x) = \eta\mu 2x, \varphi(x) = \sigma\upsilon\nu(2x)$, όχι με αυτήν τη σειρά αναγκαία.



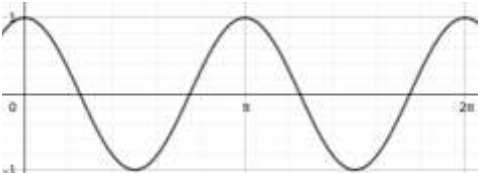
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι περίοδοι των παραπάνω συναρτήσεων είναι:

$$T_f = T_g = 2\pi, \quad T_h = T_\varphi = \pi.$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιο από τα τέσσερα σχήματα αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της

$$h(x) = \eta\mu(2x).$$

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Οι συναρτήσεις f, g έχουν περίοδο $T_f = T_g = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ ενώ οι συναρτήσεις h, φ έχουν περίοδο

$$T_\varphi = T_h = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

β) Είναι $h(0) = 0$ οπότε στη γραφική παράσταση της h αντιστοιχεί το σχήμα 1 ή το σχήμα 2.

Έχει περίοδο π άρα το σχήμα 1 αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της h .

21789. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sin x - 1, \quad x \in [0, 2\pi] \text{ και η γραφική}$$

παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = \sin x, \quad x \in [0, 2\pi].$$

α) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

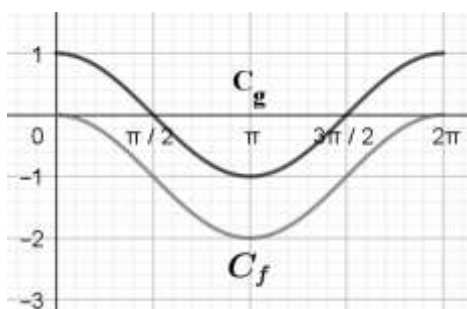
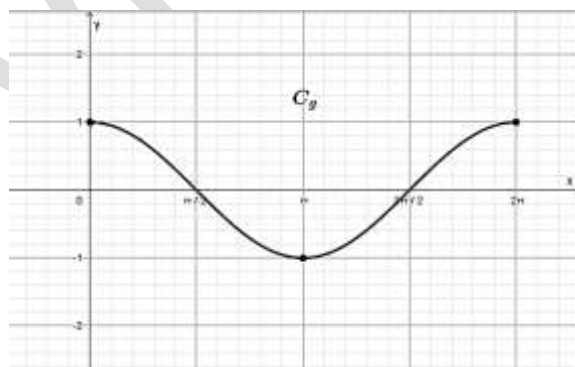
(Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f καθώς επίσης και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με κατακόρυφη μετατόπιση μίας μονάδας προς τα κάτω οπότε έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση :



β) Από τη γραφική παράσταση της f παρατηρούμε ότι έχει ελάχιστη τιμή το -2 , θέση ελαχίστου το π , μέγιστη τιμή το 0 και θέσεις μεγίστου το $0, 2\pi$.

Άλγεβρικά έχουμε:

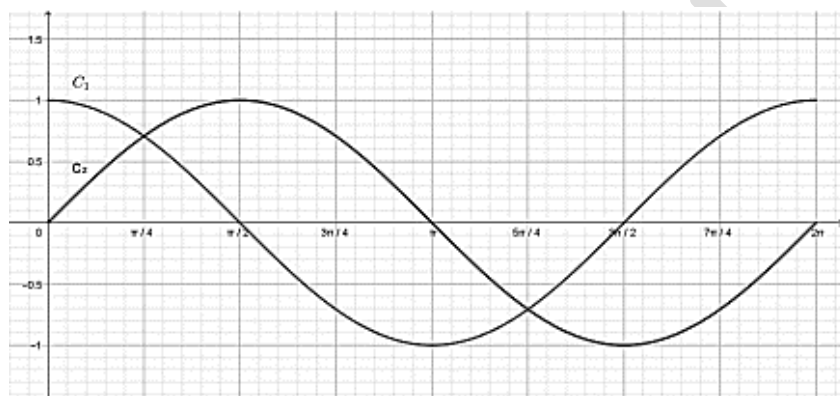
$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq f(x) \leq 0.$$

Είναι :

- $f(x) = -2 \Leftrightarrow \sin x - 1 = -2 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \pi$ αφού $x \in [0, 2\pi]$.
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2\pi$.

Άρα έχει ελάχιστη τιμή το -2 , θέση ελαχίστου το π , μέγιστη τιμή το 0 και θέσεις μεγίστου το $0, 2\pi$.

35548. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 στο διάστημα $[0, 2\pi]$.



α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = \sin x$ και $g(x) = \eta \mu x$, ποια από τις C_1, C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \sin x$ και ποια της $g(x) = \eta \mu x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Με την βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής των C_1, C_2 στο διάστημα $[0, 2\pi]$. (Μονάδες 15)

4ο Θέμα

21376. Το βάθος y , σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών) και δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες)

από τη σχέση: $y = 2\eta \mu\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4$, με $0 \leq t \leq 24$.

α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί η περίοδος της συνάρτησης είναι $T=12$. (Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

t	0	3	6	9	12
y					

(Μονάδες 5)

iii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $y = 2\eta \mu\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4$, με $0 \leq t \leq 24$. (Μονάδες 6)

β) i. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t=12$; (Μονάδες 4)

ii. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον 4 μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στη διάρκεια ποιου χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια; (Μονάδες 5)

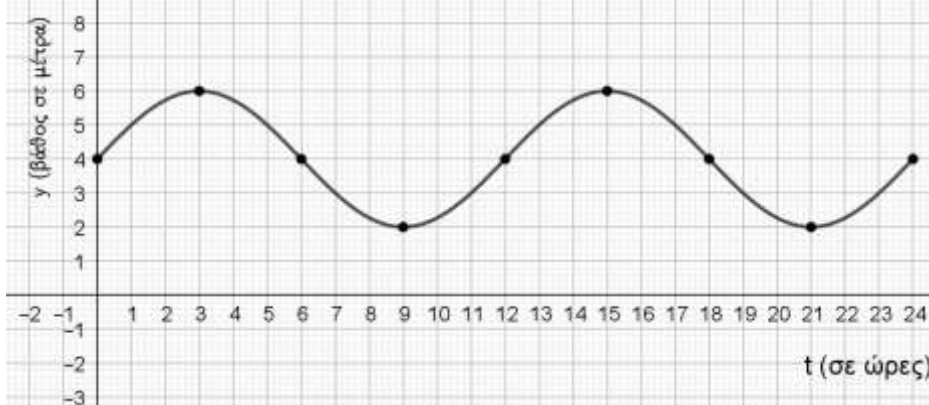
Λύση

α) i) Είναι $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = \frac{12\pi}{\pi} = 12$.

ii)

t	0	3	6	9	12
y	4	6	4	2	4

iii) Η ζητούμενη γραφική παράσταση περιλαμβάνει δύο περιόδους αφού $T=12$ οπότε είναι η παρακάτω:

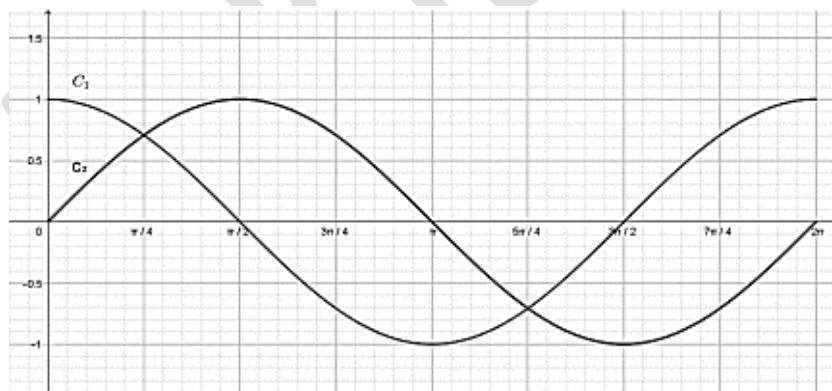


β) Από τη γραφική παράσταση βλέπουμε ότι :

i. τη χρονική στιγμή $t=12$ το βάθος του νερού είναι 4 μέτρα.

ii) Στο χρονικό διάστημα $[12, 18]$ το πλοίο θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια δηλαδή από τις 12 το μεσημέρι μέχρι τις 6 το απόγευμα.

35548. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 στο διάστημα $[0, 2\pi]$.



α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = \sin x$ και $g(x) = \cos x$, ποια από τις C_1, C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \sin x$ και ποια της $g(x) = \cos x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Με την βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής των C_1, C_2 στο διάστημα $[0, 2\pi]$. (Μονάδες 15)

Λύση

α) Είναι $f(0) = \eta\mu 0^\circ = 0, g(0) = \sigma\upsilon\nu 0^\circ = 1$ οπότε η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η C_g από το σημείο $(0,1)$. Επομένως η C_f ταυτίζεται με την C_1 άρα και η C_g με τη C_2 .

β) Οι C_f, C_g τέμνονται στα σημεία με τετμημένες $\frac{\pi}{4}$ και $\frac{5\pi}{4}$ όπως φαίνεται από τις γραφικές τους παραστάσεις.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

2^ο Θέμα

20723. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2$ και $Q(x) = -2x^2(x-2) + 2$.

- α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; (Μονάδες 5)
 β) Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)
 γ) Να βρείτε τη τιμή του πολυωνύμου $Q(x)$ για $x = 1$. (Μονάδες 8)

Λύση

- α) Είναι 3^ο βαθμού (βαθμός μεγιστοβάθμιου όρου)
 β) Είναι $Q(x) = -2x^2(x-2) + 2 = -2x^3 + 4x^2 + 2 = P(x)$.

19025. Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9$ και $Q(x) = ax^2 + 7, a \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι $P(x) = 4x^2 + 7$. (Μονάδες 13)
 β) Να βρείτε την τιμή του a , ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα. (Μονάδες 12)

Λύση

- α) $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9 = \cancel{-2x^3} + 4x^2 + \cancel{2x^3} - 2 + 9 = 4x^2 + 7$
 β) Για να είναι ίσα πρέπει να είναι ίδιου βαθμού και οι αντίστοιχοι συντελεστές να είναι ίσοι οπότε $a = 4$.

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

2^ο Θέμα

20428. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ και $\delta(x) = x + 1$.

- α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : \delta(x)$. (Μονάδες 15)
 β) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του α) ερωτήματος. (Μονάδες 10)

Λύση

α)

$x^3 + 2x^2 + x + 1$	$x + 1$
+	$x^2 + x$
$-x^3 - x^2$	
$x^2 + x + 1$	
+	
$-x^2 - x$	
1	

- β) Η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του α) ερωτήματος είναι:
 $P(x) = (x+1)(x^2 + x) + 1$ (πηλίκο $x^2 + x$ και υπόλοιπο 1).

20382. Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-3$ έχει πηλίκο x^2+2 και υπόλοιπο 4.

- α) Να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-3$ και να αποδείξετε ότι $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$. (Μονάδες 13)
 β) Είναι το $x = 3$ ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-3$ είναι :

$$P(x) = (x-3)(x^2+2) + 4 \text{ οπότε } P(x) = x^3 + 2x - 3x^2 - 6 + 4 \Leftrightarrow P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2.$$

β) Για να είναι ρίζα του πολωνύμου πρέπει $P(3) = 0$.

Όμως $P(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 2 = 27 - 27 + 6 - 2 = 4 \neq 0$ οπότε το 3 δεν είναι ρίζα του πολωνύμου $P(x)$.

20966. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 16x^2 + 4x - 27$.

α) Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-8)$ είναι $v = 5$.

(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε το $P(8)$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Πρέπει $P(8) = 5 \Leftrightarrow 2 \cdot 8^3 - 16 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 - 27 = 5 \Leftrightarrow 1024 - 1024 + 32 - 27 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5$ ισχύει άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-8)$ είναι $v = 5$.

β) Από το α) $P(8) = 5$.

20556. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2(x-1)^{20} - 3(x-1)^{10} + 5x^2 - 3x - 2$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή $P(1)$.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Είναι $P(1) = 0 - 0 + 5 - 3 - 2 = 0$

β) Από το α) το 1 ρίζα του πολωνύμου άρα το $x-1$ παράγοντας του.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

2^ο Θέμα

21317. Δίνεται η εξίσωση $8x^4 - 9x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι δεν έχει άλλη ακέραια ρίζα.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Είναι $P(1) = 8 \cdot 1^4 - 9 \cdot 1 + 1 = 8 - 9 + 1 = 0$ άρα το 1 ρίζα του πολωνύμου.

β) Οι ακέραιες ρίζες του πολωνύμου είναι οι διαιρέτες του 1 δηλαδή το 1 και το -1.

Όμως $P(-1) = 8 \cdot (-1)^4 - 9 \cdot (-1) + 1 = 8 + 9 + 1 = 18 \neq 0$ οπότε δεν έχει άλλη ακέραια ρίζα.

21315. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$. Αν η διαίρεση $P(x) : (x-1)$ δίνει πηλίκο $x^2 + 1$, τότε:

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $P(x) = (x-1)(x^2 + 1)$.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ άρα η διαίρεση $P(x) : (x-1)$ είναι τέλεια οπότε $P(x) = (x-1)(x^2+1)$.

β) Είναι $P(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1) \underset{>0}{(x^2+1)} \leq 0 \Leftrightarrow x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$.

15619.α) Να αποδείξετε ότι: $2x^3 + x^2 - x = x(2x^2 + x - 1)$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $2x^3 + x^2 - x = 0$.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Είναι $2x^3 + x^2 - x = x(2x^2 + x - 1)$ (βγάζουμε κοινό παράγοντα το x).

β) Είναι $2x^3 + x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x=0)$ ή $\left(2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x = -1 \text{ ή } x = \frac{1}{2}\right)\right)$.

$$(\Delta = 9, x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\}).$$

21910. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ και $\delta(x) = x + 1$.

α) Να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ της διαίρεσης $P(x) : \delta(x)$.

(Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 1$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α)

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 + x + 1 & x + 1 \\ + & \\ \hline -x^3 - x^2 & x^2 + x \\ \hline x^2 + x + 1 & \\ + & \\ \hline -x^2 - x & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Το πηλίκο της διαίρεσης είναι $\pi(x) = x^2 + x$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x) = 1$

β) Είναι $P(x) = 1 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow$

$x(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x=0)$ ή $(x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1)$.

4ο Θέμα

21320. Έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο το οποίο όταν διαιρείται με το $x^2 + x + 2$ δίνει πηλίκο $x-2$ και υπόλοιπο $-2x+4$.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x^2 + x + 2)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$. (Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{x} < 0$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 + x + 2$ είναι :
 $P(x) = (x^2 + x + 2)(x - 2) - 2x + 4$.

β) Είναι $P(x) = (x^2 + x + 2)(x - 2) - 2x + 4 = x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x + 2x - 4 - 2x + 4 \Leftrightarrow$
 $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

γ) Είναι $\frac{x^3 - x^2 - 2x}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x(x^2 - x - 2)}{x} < 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$.

Όμως $x \neq 0$ οπότε $x \in (-1, 0) \cup (0, 2)$.

20665. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

α) Να βρείτε τις τιμές του πολυωνύμου $P(0)$ και $P(-1)$. (Μονάδες 5)

β) Ποιος από τους αριθμούς 0 και -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$. (Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Είναι $P(0) = -1$ και $P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) - 1 = -1 + 1 + 1 - 1 = 0$.

β) Από το α) ερώτημα το -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου αφού $P(-1) = 0$.

γ) Είναι $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(x^2 - 1)$ οπότε το πηλίκο της διαίρεσης
 $P(x) : (x + 1)$ είναι το $x^2 - 1$

δ) Είναι $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$
 $((x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1) \text{ ή } (x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1)$

20340. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.

α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x+1$. (Μονάδες 8)

β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner, ή με όποιο άλλο τρόπο μπορείτε, να αποδείξετε ότι $P(x) = (x+1)(x+2)(x-2)$ (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Είναι $P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 4(-1) - 4 = -1 + 1 + 4 - 4 = 0$ οπότε το -1 ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ άρα το $x+1$ παράγοντας του..

β) $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 = x^2(x+1) - 4(x+1) = (x+1)(x^2 - 4) \Leftrightarrow P(x) = (x+1)(x-2)(x+2)$..

γ)

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$x-1$	-	-	○	+	+
$x+2$	-	○	+	+	+
$x-2$	-	-	-	○	+
P(x)	-	○	+	○	+

Από τον παραπάνω πίνακα προσήμων οι λύσεις της ζητούμενης ανίσωσης είναι η ένωση των διαστημάτων $(-\infty, -2] \cup [1, 2]$

21324. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \alpha x^2 - (\beta + 2)x + 6$ και το τριώνυμο $x^2 - x - 6$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (Μονάδες 6)

β) Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα κάθε παράγοντα του τριωνόμου, τότε:

i. να αιτιολογήσετε γιατί $P(3) = P(-2) = 0$. (Μονάδες 5)

ii. να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 3$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Το τριώνυμο έχει ρίζες το -2 και το 3 άρα παραγοντοποιείται : $x^2 + x - 6 = (x+2)(x-3)$.

β) i. Αφού έχει παράγοντες τους $x+2, x-3$ το -2 και το 3 είναι ρίζες του άρα $P(3) = P(-2) = 0$.

ii. Είναι $P(-2) = 0 \Leftrightarrow -8 - 4\alpha + 2(\beta + 2) + 6 = 0 \Leftrightarrow -2 - 4\alpha + 2\beta + 4 = 0 \Leftrightarrow 4\alpha - 2\beta = 2 \Leftrightarrow$

$2\alpha - \beta = 1$ (1),

$P(3) = 0 \Leftrightarrow 27 - 9\alpha - 3(\beta + 2) + 6 = 0 \Leftrightarrow 33 - 9\alpha - 3\beta - 6 = 0 \Leftrightarrow 9\alpha + 3\beta = 27 \Leftrightarrow 3\alpha + \beta = 9$ (2).

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $5\alpha = 10 \Leftrightarrow \alpha = 2$ οπότε $4 - \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 3$.

γ) Για $\alpha = 2$ και $\beta = 3$ έχουμε $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

1	-2	-5	6	-2
	-2	8	-6	
1	-4	3	0	

Από το σχήμα Horner έχουμε $P(x) = (x+2)(x^2 - 4x + 3)$.

Το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ έχει ρίζες το 1 και το 3 οπότε το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζες τους -2, 1, 3.

20709. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $x \in \mathbb{R}$ και έστω α, β, γ οι τετμημένες των σημείων στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση τον άξονα $x'x$.

α) Να αποδείξετε ότι $P(3) = 0$.

(Μονάδες 5)

β) Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

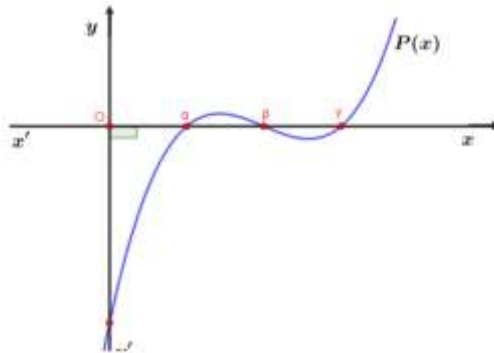
(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε, με αιτιολόγηση, τα α, β, γ .

(Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του σχήματος, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 5)



Λύση

α) Είναι $P(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 - 6 = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$.

β)

1	-6	11	-6	3
	3	-9	-6	
1	-3	2	0	

Από το σχήμα Horner έχουμε $P(x) = (x-3)(x^2 - 3x + 2)$.

Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει ρίζες το 1 και το 2 οπότε το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζες τους 1, 2 και 3.

γ) Η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένη α, β, γ άρα τα α, β, γ είναι ρίζες της οπότε $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$ αφού $\alpha < \beta < \gamma$.

δ) Από τη γραφική παράσταση της P έχουμε οι λύσεις της ανίσωσης $P(x) < 0$ είναι η ένωση των διαστημάτων $(-\infty, 1) \cup (2, 3)$.

20323. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

α) Να δείξετε ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $(x-2)(x^2 - 2x - 3) > 0$.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Είναι $P(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 6 = 8 - 16 + 8 = 0$.

β)

1	-4	1	6	2
	2	-4	-6	
1	-2	-3	0	

Από το σχήμα Horner έχουμε $P(x) = (x-2)(x^2 - 2x - 3)$.

Το τριώνυμο $x^2 - 2x - 3$ έχει ρίζες το -1 και το 3 οπότε το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζες τους -1,2 και 3.

γ)

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$		
$x-2$	-	-	○	+	+		
x^2-2x-3	+	○	-	-	○	+	
$P(x)=(x-2)(x^2-2x-3)$	-	○	+	○	-	○	+

Από τον παραπάνω πίνακα προσήμων οι λύσεις της ζητούμενης ανίσωσης είναι η ένωση των διαστημάτων $(-1,2) \cup (3,+\infty)$.

20433. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1. (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 9)

γ) Αν $P(x) = (x-1)(x-2)(x+1)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Είναι $P(1) = 1^3 - 1 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 1 - 1 - 1 + 2 = 0$ οπότε το 1 ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

β)

1	-2	-1	2	1
	1	-1	-2	
1	-1	-2	0	

Από το σχήμα Horner έχουμε $P(x) = (x-1)(x^2 - x - 2)$.

Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει ρίζες το -2 και το 1 οπότε το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζες τους -1,1 και 2.

γ)

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$		
$x+1$	-	○	+	+	+		
$x-1$	-	-	○	+	+		
$x-2$	-	-	-	○	+		
$P(x)=(x-2)(x^2-2x-3)$	-	○	+	○	-	○	+

Από τον παραπάνω πίνακα προσήμων οι λύσεις της ζητούμενης ανίσωσης είναι η ένωση των διαστημάτων $(-1,1) \cup (2,+\infty)$.

20350. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης

$$f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}.$$

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης

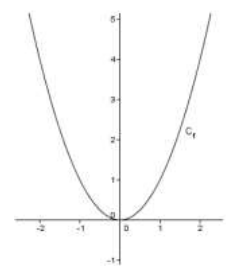
$$g(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της $g(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_g με τη γραφική παράσταση της

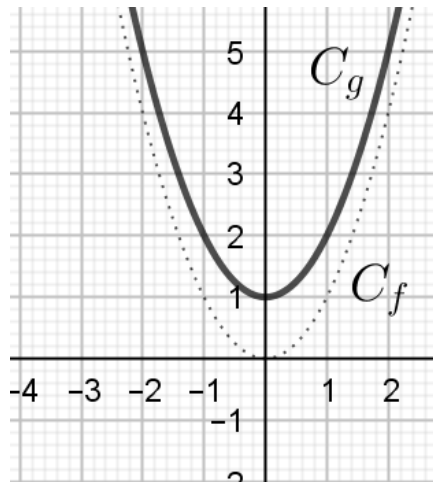
$$h(x) = x^3 + x, x \in \mathbb{R}.$$



(Μονάδες 9)

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με κατακόρυφη μετατόπιση 1 προς τα πάνω οπότε είναι η ακόλουθη:



β) Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Έχει ελάχιστη τιμή το 1.

$$\begin{aligned} \gamma) \text{ Είναι } g(x) &= h(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x^3 + x \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ x^2(x-1) + (x-1) &= 0 \Leftrightarrow (x-1) \left(x^2 + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1. \end{aligned}$$

20346. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 6$.

(Μονάδες 8)

β) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Το 1 ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ οπότε $P(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - 6 + 11 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 6$.

$$\begin{array}{r|l} \beta) & x-1 \\ \hline x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & \\ + & \\ -x^3 + x^2 & x^2 - 5x + 6 \\ \hline -5x^2 + 11x - 6 & \\ + & \\ 5x^2 - 5x & \\ \hline 6x - 6 & \\ -6x + 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$.

γ) Είναι $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow (x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$ ή $(x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x=2, 3)$.

20271. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - x^2 - \lambda x + 2, \lambda \in \mathbb{R}$, του οποίου το υπόλοιπο της διαίρεσης με το $x-1$ είναι 3.

α) να βρείτε την τιμή του λ .

(Μονάδες 7)

β) για $\lambda = 1$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x)$: $(x-1)$ και να αποδείξετε ότι $P(x) = (x-1)(3x^2 + 2x + 1) + 3$.

(Μονάδες 8)

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 3$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$ είναι 3 οπότε $P(1) = 3 \Leftrightarrow 3 - 1 - \lambda + 2 = 3 \Leftrightarrow \lambda = 1$

β) i. Για $\lambda = 1$ είναι $P(x) = 3x^3 - x^2 - x + 2$.

$$\begin{array}{r|l}
 3x^3 - x^2 - x + 2 & x - 1 \\
 + & \\
 \hline
 -3x^3 + 3x^2 & 3x^2 + 2x + 1 \\
 \hline
 2x^2 - x + 2 & \\
 + & \\
 -2x^2 + 2x & \\
 \hline
 x + 2 & \\
 -x + 1 & \\
 \hline
 3 &
 \end{array}$$

Άρα από την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης είναι $P(x) = (x-1)(3x^2 + 2x + 1) + 3$.

γ) Είναι $P(x) < 3 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 2x + 1) + 3 < 3 \Leftrightarrow (x-1) \underbrace{\left(3x^2 + 2x + 1 \right)}_{\substack{>0 \\ \text{αφού } \Delta = -8 < 0}} < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

20270. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + \lambda x - 2, \lambda \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει παράγοντα το $x+1$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ .

(Μονάδες 8)

β) Για $\lambda = 3$:

i. να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα και το $x-2$ και ότι $P(x) = (x-2)(x+1)(x-1)^2$.

(Μονάδες 10)

ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Το $x+1$ παράγοντας του του πολυωνύμου $P(x)$ οπότε το -1 ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ άρα $P(-1) = 0 \Leftrightarrow 1 + 3 + 1 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$.

β) Για $\lambda = 3$ είναι $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$.

Είναι $P(2) = 16 - 3 \cdot 8 + 4 + 6 - 2 = 16 - 24 + 8 = 0$ οπότε το 2 ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ άρα το $x-2$ παράγοντας του του πολυωνύμου.

1	-3	1	3	-2	2
	2	-2	-2	2	
1	-1	-1	1	0	

Από το σχήμα Horner έχουμε $P(x) = (x-2)(x^3 - x^2 - x + 1) = (x-2)[x^2(x-1) - (x-1)] \Leftrightarrow$

$$P(x) = (x-2)(x^2 - 1)(x-1) = (x-2)(x+1)(x-1)(x-1) \Leftrightarrow P(x) = (x-2)(x+1)(x-1)^2.$$

γ) Είναι $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \dots x = -1, 1, 2.$

20269. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x + a, a \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει ρίζα το 1.

α) Να βρείτε την τιμή του a .

(Μονάδες 5)

β) Για $a = 2$:

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x-1)$ και να δείξετε ότι $P(x) = (x-1)(x^2 + x - 2)$. (Μονάδες 10)

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Το 1 ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ άρα $P(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - 3 + a = 0 \Leftrightarrow a = 2.$

β) Για $a = 2$: $P(x) = x^3 - 3x + 2.$

1	0	-3	2	1
	1	1	-2	
1	1	-2	0	

Από το σχήμα Horner έχουμε $P(x) = (x-1)(x^2 + x - 2).$

γ) Το τριώνυμο $x^2 + x - 2$ έχει ρίζες το 1 και το -2.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+
$x^2 + x - 2$	+	0	-	+
$P(x) = (x-2)(x^2 - 2x - 3)$	-	0	+	+

Από τον παραπάνω πίνακα προσήμων οι λύσεις της ζητούμενης ανίσωσης είναι η ένωση το διάστημα $(-\infty, 2)$.

21090. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (2-\alpha)x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ και $Q(x) = x^3 - 3x^2 + (\alpha^2 + 3)x - 2$

α) Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

(Μονάδες 09)

β) Για $\alpha = 1$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 08)

γ) Για $\alpha = 1$ να εξετάσετε αν το $x+1$ είναι παράγοντας του $Q(x)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 08)

Λύση

α) Για να είναι ίσα τα πολυώνυμα πρέπει: $\begin{cases} 2-\alpha=1 \\ \alpha^2+3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \alpha^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \alpha=\pm 1 \end{cases}$ άρα $\alpha=1.$

β) Για $\alpha=1$ είναι $P(x)=x^3-3x^2+4x-2$.

1	-3	4	-2	1
	1	-2	2	
1	-2	2	0	

Από το σχήμα Horner έχουμε $P(x)=(x-1)(x^2-2x+2)$.

Είναι $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x+2)=0 \Leftrightarrow (x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$ ή
 $(x^2-2x+2=0 \text{ αδύνατη αφού } \Delta=-4<0)$

γ) Για $\alpha=-1$ είναι $Q(x)=x^3-3x^2+4x-2$.

Είναι $Q(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+4(-1)-2=-1-3-4-2=-10 \neq 0$ άρα το -1 δεν είναι ρίζα του
 πολωνύμου οπότε το $x+1$ δεν είναι παράγοντας του $Q(x)$.

21635.Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση

$P(x)=x^4-2x^2+1$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία γνωρίζουμε ότι είναι άρτια.

α) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το παρακάτω σχήμα στο
 οποίο δίνεται η γραφική παράσταση της $P(x)$ για $x \geq 0$. Να
 συμπληρώσετε το σχήμα με την γραφική παράσταση της $P(x)$
 για $x < 0$.

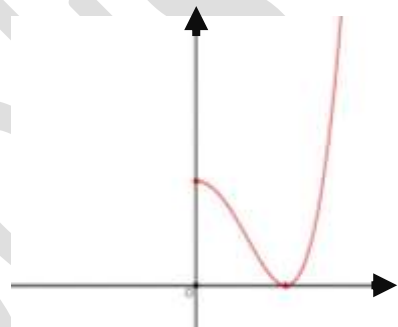
(Μονάδες 6)

β) Να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 9)

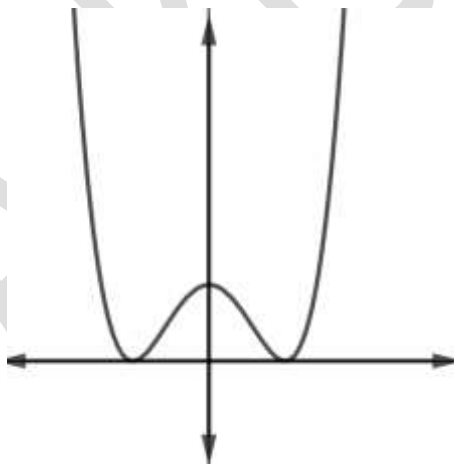
γ) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός μηδέν είναι η ελάχιστη τιμή της
 συνάρτησης $P(x)$. Για ποιες τιμές του x επιτυγχάνεται αυτή η ελάχιστη τιμή;

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Η f είναι άρτια οπότε έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ οπότε έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση :



β) Είναι $P(x)=0 \Leftrightarrow x^4-2x^2+1=0 \Leftrightarrow (x^2-1)^2=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

γ) Είναι $P(x)=(x^2-1)^2 \geq 0$. Επίσης $P(1)=P(-1)=0$ οπότε έχει ελάχιστη τιμή το 0, θέσεις ελαχίστου το -1 και το 1.

21905. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2, \text{ με } x \in \mathbb{R}, \text{ όπως φαίνεται στο σχήμα.}$$

α) Να αιτιολογήσετε γραφικά γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

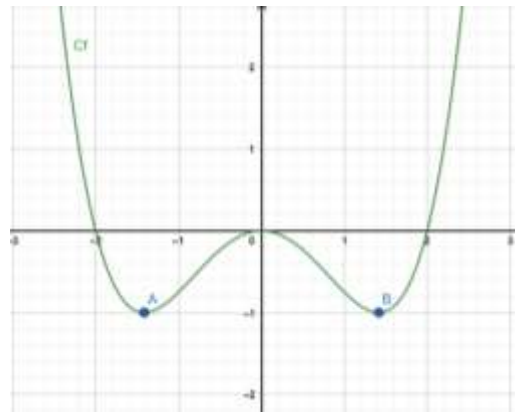
(Μονάδες 7)

β) Αν η τετμημένη του σημείου Α είναι $-\sqrt{2}$, να βρείτε το είδος του (ολικού) ακρότατου, τις θέσεις που το αποκτά και τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$, με όποιο τρόπο θέλετε (αλγεβρικό ή γραφικό).

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Η f έχει άξονα συμμετρίας τον y' y για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε είναι άρτια.

β) Η f είναι άρτια οπότε $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = -1$. Παρουσιάζει ελάχιστο στα $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ το -1.

Είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-\sqrt{2}, 0], [\sqrt{2}, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{2}], [0, \sqrt{2}]$.

γ) Από τη γραφική παράσταση βλέπουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x' x στα διαστήματα $(-2, 0)$ και $(0, 2)$, τα οποία είναι η λύση της ζητούμενης ανίσωσης.

Αλγεβρικά:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{1}{4}x^2 - 1 \right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ \frac{1}{4}x^2 - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{1}{4}x^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ |x| < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ -2 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow (-2 < x < 0) \text{ ή } (0 < x < 2).$$

21907. Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x^3 \text{ και } g(x) = 4x \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

α) Από τη γραφική παράσταση της f, να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή και γνησίως μονότονη. Ποιο το είδος της μονοτονίας της;

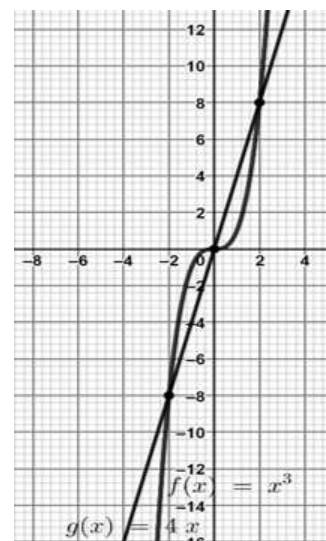
(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε γραφικά ή αλγεβρικά την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων άρα είναι περιττή.

Επίσης από τη γραφική της παράσταση βλέπουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα άρα είναι γνησίως μονότονη.

β) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της g στα σημεία με τετμημένες αντίστοιχα $-2, 0, 2$ οι οποίες είναι οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) = g(x)$.

γ) Η γραφική παράσταση της g βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f στα διαστήματα $(-2, 0), (2, +\infty)$.

Αλγεβρικά έχουμε : $g(x) < f(x) \Leftrightarrow 4x < x^3 \Leftrightarrow x^3 - 4x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$ όπως φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα προσήμων.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$	0	$+$
$x \cdot (x^2 - 4)$	$-$	0	$+$	0	$+$

18991. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το πολυώνυμο $x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$. (Μονάδες 8)

β) i. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 1)$. (Μονάδες 5)

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του βi) ερωτήματος. (Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Είναι $P(1) = 1^3 - 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 1 - 1 - 4 + 4 = 0$ οπότε το 1 ρίζα του πολυωνύμου άρα το πολυώνυμο $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

β) i.

1	-1	-4	4	1
	1	0	-4	
1	0	-4	0	

Από το σχήμα Horner έχουμε ότι το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x - 1)$ είναι το πολυώνυμο $x^2 - 4$ και το υπόλοιπο είναι ίσο με 0..

ii) Η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης είναι : $P(x) = (x - 1)(x^2 - 4)$.

γ) Είναι $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow (x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1)$ ή $(x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2)$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης $P(x) = 0$ είναι $x = 1, x = 2, x = -2$.

21672. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \alpha x^2 + \beta, x \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(-1, 0)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = -1$. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(-1, 0)$ οπότε :

$$\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ 1 + \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 0 \end{cases}.$$

β) Για να βρούμε τις τετμημένες των σημείων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ λύνουμε την ανίσωση : $f(x) < 0 \Leftrightarrow x^4 - 1 < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) < 0 \stackrel{x^2+1>0}{\Leftrightarrow} x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.
Επομένως η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ στο διάστημα $(-1,1)$.

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

4^ο Θέμα

35620. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης f , με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.

α) Με βάση την γραφική της παράσταση, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f .

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$					

(Μονάδες 10)

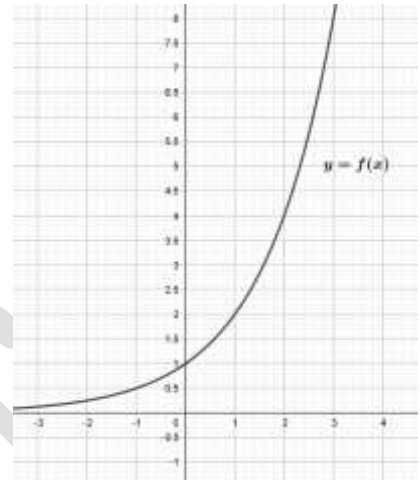
β) Αν $f(x) = 2^x$

i. Να βρείτε το $f(8)$,

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε το $f(-2)$.

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Από τη γραφική παράσταση έχουμε:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0,5	1	2	4	8

β) i) Είναι $f(8) = 2^8 = 512$ και

ii) $f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$.

35544.α) Να λύσετε την εξίσωση $\omega^3 - 3\omega^2 + 2\omega = 0$ (1).

(Μονάδες 10)

β) Αν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = 2$, να βρείτε (αν υπάρχει) τον αριθμό x σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $e^x = \omega_1$,

ii. $e^x = \omega_2$,

iii. $e^x = \omega_3$.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Είναι $\omega^3 - 3\omega^2 + 2\omega = 0 \Leftrightarrow \omega(\omega^2 - 3\omega + 2) = 0 \Leftrightarrow (\omega = 0) \text{ ή } (\omega^2 - 3\omega + 2 = 0 \Leftrightarrow (\omega = 1) \text{ ή } (\omega = 2))$.

β) i) Είναι $e^x = \omega_1 \Leftrightarrow e^x = 0$ αδύνατη αφού $e^x > 0$ άρα δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός που να ικανοποιεί την σχέση αυτή.

ii) Είναι $e^x = \omega_2 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$.

iii) Είναι $e^x = \omega_3 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$.

35545.α) Να λύσετε το παρακάτω σύστημα (Σ): $\begin{cases} 2\omega + 3\varphi = 17 \\ 4\omega - 3\varphi = 7 \end{cases}$. (Μονάδες 10)

β) Αν η λύση του συστήματος (Σ) είναι $(\omega, \varphi) = (4, 3)$ και $2^x = \omega, 3^y = \varphi$, να βρείτε τους αριθμούς x και y . (Μονάδες 15)

Λύση

α) Είναι : $\begin{cases} 2\omega + 3\varphi = 17 \\ 4\omega - 3\varphi = 7 \end{cases} \xrightarrow{+} 6\omega = 24 \Rightarrow \omega = 4$ οπότε $2 \cdot 4 + 3\varphi = 17 \Leftrightarrow 8 + 3\varphi = 17 \Leftrightarrow 3\varphi = 9 \Leftrightarrow \varphi = 3$.

β) Είναι : $2^x = \omega \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$ και $3^y = \varphi \Leftrightarrow 3^y = 3 \Leftrightarrow 3^y = 3^1 \Leftrightarrow y = 1$.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

2^ο Θέμα

21704. Δίνεται ότι μία προσεγγιστική τιμή για τον δεκαδικό λογάριθμο $\log 2$ είναι το 0,30. Να

εφαρμόσετε τις ιδιότητες των λογαρίθμων : $\log \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log \theta_1 - \log \theta_2$ και $\log \theta^k = k \log \theta$ για να

βρείτε μία προσεγγιστική τιμή για τους δεκαδικούς λογάριθμους:

α) $\log 4$

(Μονάδες 12)

β) $\log 5$

(Μονάδες 13)

Λύση

α) $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 = 2 \cdot 0,3 = 0,6$

β) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,3 = 0,7$.

17598. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 2$ και $\beta = \log 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 1$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\ln(\alpha + \beta)$.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Είναι $\alpha + \beta = \log 2 + \log 5 = \log(2 \cdot 5) = \log 10 = 1$.

β) Είναι $\ln(\alpha + \beta) = \ln 1 = 0$.

21545.α) Να αποδείξετε ότι $\log 0,01 = -2$

(Μονάδες 09)

β) Να αποδείξετε ότι $\log_2 3 + 2 \log_2 4 - \log_2 12 = -\log 0,01$.

(Μονάδες 16)

Λύση

α) Είναι $\log 0,01 = \log 10^{-2} = -2 \log 10 = -2$.

β) Είναι $\log_2 3 + 2 \log_2 4 - \log_2 12 = -\log 0,01 \Leftrightarrow \log_2 3 + \log_2 4^2 - \log_2 12 = -\log 10^{-2} \Leftrightarrow$

$\log_2 3 + \log_2 16 - \log_2 12 = 2 \log 10 \Leftrightarrow \log_2 3 \cdot 16 - \log_2 12 = 2 \Leftrightarrow \log_2 \frac{48}{12} = 2 \Leftrightarrow \log_2 4 = 2 \Leftrightarrow$

$\log_2 2^2 = 2 \Leftrightarrow 2 \log_2 2 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$ ισχύει.

35543.α) Να λύσετε το σύστημα: $(\Sigma): \begin{cases} 2\omega + 3\varphi = 17 \\ 4\omega - 3\varphi = 7 \end{cases}$.

(Μονάδες 10)

β) Αν η λύση του συστήματος (Σ) είναι $(\omega, \varphi) = (4, 3)$ και $\ln x = \omega, \ln y = \varphi$, να βρείτε τους αριθμούς x και y . (Μονάδες 15)

Λύση

α) Είναι : $\begin{cases} 2\omega + 3\varphi = 17^{(+)} \\ 4\omega - 3\varphi = 7 \end{cases} \Rightarrow 6\omega = 24 \text{ οπότε } \omega = 4 \text{ και } 2 \cdot 4 + 3\varphi = 17 \Leftrightarrow 8 + 3\varphi = 17 \Leftrightarrow 3\varphi = 9 \Leftrightarrow \varphi = 3.$

β) Είναι : $\ln x = \omega \Leftrightarrow \ln x = 4 \Leftrightarrow x = e^4 \text{ και } \ln y = \varphi \Leftrightarrow \ln y = 3 \Leftrightarrow y = e^3.$

35547.α) Να αποδείξετε ότι $\log 10 - \log 2 = \log 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\log 8 + \log 2 = 4 \log 2$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Είναι $\log 10 - \log 2 = \log \frac{10}{2} = \log 5.$

β) Είναι $\log 8 + \log 2 = \log(8 \cdot 2) = \log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2.$

4ο Θέμα

20999. Ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο για το πλήθος των ανθρώπων σε μια μαθητική κοινότητα που έχουν ακούσει μια συγκεκριμένη φήμη, περιγράφεται από την ισότητα $N = P \cdot (1 - e^{-0,15k})$, όπου P ο συνολικός πληθυσμός της κοινότητας και k είναι ο αριθμός των ημερών που έχουν περάσει από τότε που ξεκίνησε η φήμη. Υποθέτουμε ότι ο συνολικός πληθυσμός της κοινότητας είναι 1000 άνθρωποι.

α) Να βρείτε πόσα μέλη της μαθητικής κοινότητας θα έχουν ακούσει τη φήμη μετά από 20 ημέρες. (Μονάδες 9)

β) Πόσες ημέρες θα περάσουν ώστε να έχουν ακούσει τη φήμη 450 άνθρωποι από τους 1000; (Μονάδες 10)

γ) Είναι δυνατόν να ακούσουν τη φήμη όλα τα μέλη της κοινότητας; Εξηγήστε. (Μονάδες 6)

Δίνονται: $e^3 \cong 20$ και $\ln(0,55) \cong -0,6$.

Λύση

α) $N = P \cdot (1 - e^{-0,15k}) = 1000 \cdot (1 - e^{-3}) = 1000 \cdot \left(1 - \frac{1}{e^3}\right) = 1000 \cdot \left(1 - \frac{1}{20}\right) = 1000 \cdot \frac{19}{20} = 950.$

β) $N = 450 \Leftrightarrow 1000 \cdot (1 - e^{-0,15k}) = 450 \Leftrightarrow 1 - e^{-0,15k} = \frac{450}{1000} \Leftrightarrow e^{-0,15k} = 1 - \frac{45}{100} \Leftrightarrow e^{-0,15k} = 1 - \frac{9}{20} \Leftrightarrow$

$e^{-0,15k} = \frac{11}{20} \Leftrightarrow -0,15k = \ln \frac{11}{20} \Leftrightarrow k = -\frac{\ln 0,55}{0,15} \Leftrightarrow k = \frac{0,6}{0,15} \Leftrightarrow k = \frac{60}{15} = 4 \text{ ημέρες.}$

γ) $N = 1000 \Leftrightarrow 1000 \cdot (1 - e^{-0,15k}) = 1000 \Leftrightarrow 1 - e^{-0,15k} = 1 \Leftrightarrow e^{-0,15k} = 0 \text{ αδύνατο.}$

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

2ο Θέμα

20997. Θεωρούμε τον αριθμό $p = \log 4 + 2 \cdot \log 5$.

α) Να αποδείξετε $\log 4 = 2 \log 2$ και στη συνέχεια ότι $p = 2$.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό x ώστε $\ln x = p$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Είναι : $\log 4 = \log 2^2 = 2\log 2$ και

$$p = \log 4 + 2\log 5 = 2\log 2 + 2\log 5 = 2(\log 2 + \log 5) = 2\log(2 \cdot 5) = 2\log 10 = 2.$$

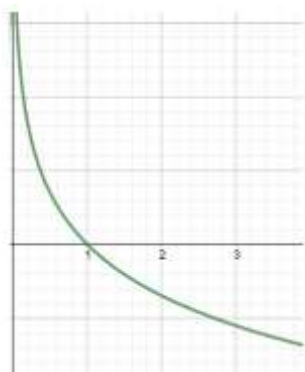
β) Είναι $\ln x = p \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$.

15592. Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1}{|x|}, x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(-1)=f(1)=0$ και $f(-2)=f(2)$.

(Μονάδες 12)

β) Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , για $x < 0$.

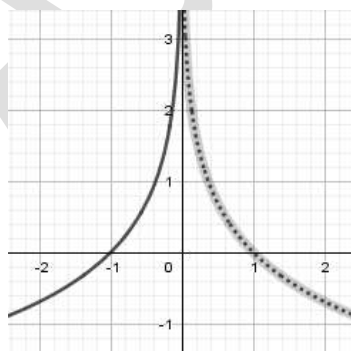


(Μονάδες 13)

Λύση

α) Είναι $f(1) = \ln \frac{1}{|1|} = \ln 1 = 0$. Η f είναι άρτια οπότε $f(-1) = f(1) = 0$ και $f(-2) = f(2)$.

β) Η f είναι άρτια άρα η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ οπότε έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση:



21285. Δίνεται η παράσταση $A = 2\log 4 + 4\log 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 4$.

(Μονάδες 13)

β) Για ποια τιμή του αριθμού $x \neq 0$ ισχύει $\ln x^2 = \frac{A}{2}$.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Είναι $A = 2\log 4 + 4\log 5 = 2\log 2^2 + 4\log 5 \Leftrightarrow A = 4\log 2 + 4\log 5 \Leftrightarrow A = 4(\log 2 + \log 5) \Leftrightarrow A = 4\log(2 \cdot 5) = 4\log 10 \Leftrightarrow A = 4$.

β) Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $\ln x^2 = \frac{A}{2} \Leftrightarrow \ln x^2 = \frac{4}{2} = 2 \Leftrightarrow x^2 = e^2 \Leftrightarrow (x = e) \text{ ή } (x = -e)$.

35619. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι $f(2) + f(11) = 1$.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Πρέπει $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι: $A_f = (1, +\infty)$.

β) Είναι $f(2) + f(11) = \log 1 + \log 10 = 0 + 1 = 1$.

4ο Θέμα

20707. Η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ μετριέται σε μονάδες ASA ή σε μονάδες DIN. Αν x μονάδες ASA συνδέονται με y μονάδες DIN με τον τύπο $y = 1 + 10 \cdot \log x$, τότε:

α) Να βρείτε πόσες μονάδες DIN είναι η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ, αν γνωρίζουμε ότι η ευαισθησία αυτού του φιλμ σε μονάδες ASA, είναι 10. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε πόσες μονάδες DIN είναι η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ, αν γνωρίζουμε ότι η ευαισθησία αυτού του φιλμ σε μονάδες ASA, είναι 200. (Μονάδες 8)

γ) Να επιλύσετε τον παραπάνω τύπο ως προς x . (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε πόσες μονάδες ASA είναι η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ, αν γνωρίζουμε ότι η ευαισθησία αυτού του φιλμ σε μονάδες DIN, είναι 13. (Μονάδες 4)

Δίνεται ότι $\log 2 = 0,3$ και $10^{\frac{6}{5}} \approx 15,85$.

Λύση

α) $y = 1 + 10 \cdot \log 10 = 1 + 10 = 11 \text{ DIN}$.

β) $y = 1 + 10 \cdot \log 200 = 1 + 10 \cdot \log(2 \cdot 100) = 1 + 10(\log 2 + \log 100) \Leftrightarrow$

$y = 1 + 10(\log 2 + \log 10^2) = 1 + 10\log 2 + 20 \Leftrightarrow y = 21 + 10 \cdot 0,3 \Leftrightarrow y = 24 \text{ DIN}$

γ) $y = 1 + 10 \cdot \log x \Leftrightarrow 10 \log x = y - 1 \Leftrightarrow \log x = \frac{y-1}{10} \Leftrightarrow x = 10^{\frac{y-1}{10}}$.

δ) $13 = 1 + 10 \cdot \log x \Leftrightarrow 10 \cdot \log x = 12 \Leftrightarrow \log x = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow \log x = \log 10^{\frac{6}{5}} \Leftrightarrow x = 10^{\frac{6}{5}} = 15,85 \text{ ASA}$.

20708. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log x$, $x > 0$ και $g(x) = \log(10x - 20)$, $x > 2$.

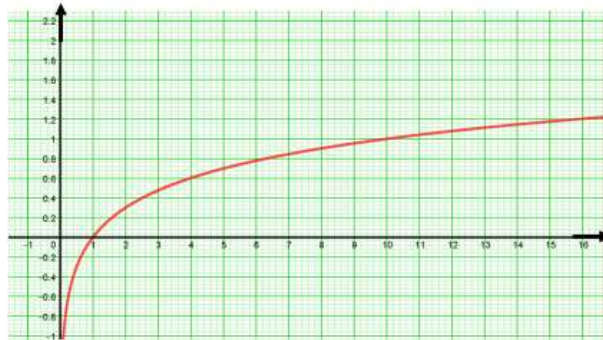
α) Να βρείτε τους αριθμούς $g(2,1)$ και $g(12)$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = 1 + f(x - 2)$.

(Μονάδες 8)

γ) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να μεταφέρετε το παρακάτω σχήμα στο γραπτό σας, το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης g . (Μονάδες 7)



Λύση

$$g(x) = \log(10x - 20)$$

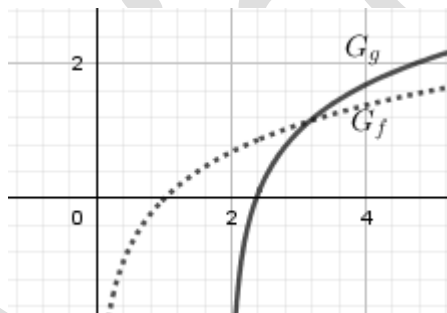
α) Είναι $g(2,1) = \log(10 \cdot 2,1 - 20) = \log(21 - 20) = \log 1 = 0$,

$$g(12) = \log(10 \cdot 12 - 20) = \log(120 - 20) = \log 100 = \log 10^2 = 2.$$

β) Έχουμε : $g(x) = \log(10x - 20) = \log[10(x - 2)] = \log 10 + \log(x - 2) = 1 + \log(x - 2) \Leftrightarrow$

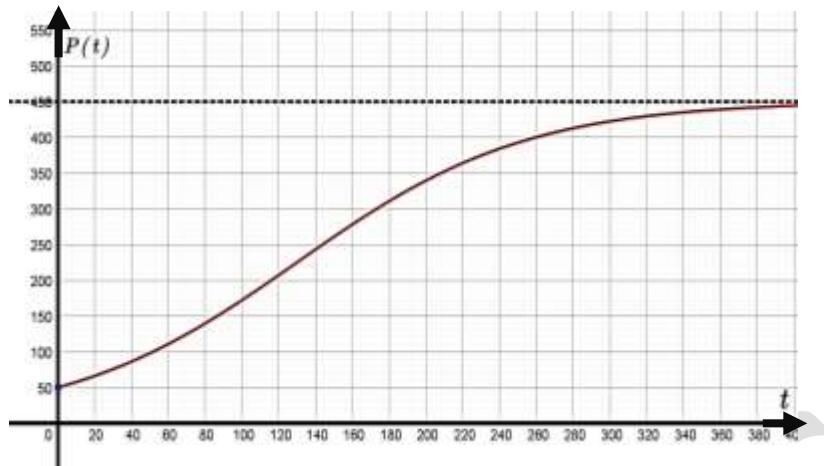
$$g(x) = 1 + f(x - 2).$$

γ) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια μετατόπιση 2 μονάδες προς τα δεξιά και 1 μονάδα προς τα πάνω.



21638. Ο αριθμός των διαφορετικών ειδών των έμβιων όντων που υπάρχουν στις Μεγάλες Λίμνες

της Β. Αμερικής, δίνεται προσεγγιστικά από τη συνάρτηση $P(t) = \frac{450}{1 + 8 \cdot e^{-0,016t}}$ μετά t χρόνια από το έτος 1900. Θεωρούμε ότι η μεταβλητή t παίρνει μη αρνητικές πραγματικές τιμές.



α) Να βρείτε πόσα είδη έμβιων όντων υπήρχαν το έτος 1900.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε, προσεγγιστικά, ποιο έτος θα υπάρχουν περίπου 225 διαφορετικά είδη.

(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(t)$. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τη μονοτονία της $P(t)$. Από ποια τιμή θα είναι πάντα μικρότερες οι τιμές $P(t)$;

(Μονάδες 7)

Δίνεται ότι $\ln 8 \cong 2,08$.

Λύση

α) Το έτος 1900 δηλαδή για $t = 0$ υπήρχαν $P(0) = \frac{450}{1+8} = \frac{450}{9} = 50$ είδη έμβιων όντων.

β) Είναι $P(t) = 225 \Leftrightarrow \frac{450}{1+8 \cdot e^{-0,016t}} = 225 \Leftrightarrow 1+8 \cdot e^{-0,016t} = 2 \Leftrightarrow$

$8 \cdot e^{-0,016t} = 1 \Leftrightarrow e^{-0,016t} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \ln e^{-0,016t} = \ln \frac{1}{8} \Leftrightarrow -0,016t \cdot \ln e = \ln 8^{-1} \Leftrightarrow -0,016t = -\ln 8 \Leftrightarrow$

$t = \frac{\ln 8}{0,016} \Leftrightarrow t = \frac{2,08}{0,016} \Leftrightarrow t = 130$. Άρα το έτος 2030 θα υπάρχουν περίπου 225 διαφορετικά είδη.

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ όπως βλέπουμε από τη γραφική της παράσταση.

Η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 450$ άρα $P(t) < 450$.