

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

- 1) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύουν $f(0) < 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 < 0$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) = e^{x_0} + x_0 \eta \mu \frac{1}{x_0}.$$

- 2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^5 + 2x - 1$. Να αποδείξετε ότι:

- i) Η εξίσωση $f(x) = x^5 + x$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$
 ii) Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε να μην υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - x^5 - x}.$$

- 3) Έστω f συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $e^{f(x)} + 2x = e^{-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρεθεί ο τύπος της f .
 β) Να δείξετε ότι είναι περιττή.
 γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)} = 1975$ έχει τουλάχιστον μία λύση.

- 4) Έστω συνεχής συνάρτηση g με $g(0) = e$, για την οποία ισχύει

$$g^2(x) + 2x^2 = 2xg(x) + e^2 \quad \text{για κάθε } x \in [-e, e].$$

Να βρείτε τον τύπο της g .

- 5) Έστω $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = x^3 - \frac{2}{x} + 5$

- α) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.
 β) Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση.
 γ) Να βρείτε τη μονοτονία της φ^{-1} .
 δ) Αν επιπλέον η φ^{-1} είναι συνεχής να βρεθούν τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\varphi^{-1}(x)} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi^{-1}(x) - x}{x + \varphi^{-1}(x)}$$

- 6) Έστω $f(x) = x + \ln(1 + e^x)$.

- α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 β) Να λυθεί η ανίσωση $e^{f(f(x))} < 6$.

- γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(\ln(e^{2x} + e^x) - 2019) = \ln \frac{1+e}{e^2}$ έχει μοναδική λύση.