

1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1.1. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1.1.1. Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών και βασικά υποσύνολα του.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ είναι το σύνολο των φυσικών (natural) αριθμών.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ είναι το σύνολο των ακεραίων (integers) αριθμών.
- Το σύνολο $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\kappa}{\nu} / \kappa, \nu \in \mathbb{Z}, \text{ με } \nu \neq 0 \right\}$ είναι το σύνολο των ρητών (rational) αριθμών.
- Οι αριθμοί που δεν μπορούν να γραφούν στην παραπάνω μορφή $\frac{\kappa}{\nu}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{Z}^*$, δηλαδή αριθμοί που στη δεκαδική τους μορφή έχουν άπειρα μη περιοδικά δεκαδικά ψηφία, ονομάζονται άρρητοι (irrational), π.χ.: $\sqrt{2}$, e , π , η_{11} , $\ln 4$ κλπ.

1.1.2. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και συγκεκριμένα ισχύει:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$
- Πολλές φορές για να δηλώσουμε ότι σε ένα από τα παραπάνω σύνολα δεν περιέχεται το 0 χρησιμοποιούμε αστερίσκο ως εκθέτη, π.χ. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
- Κάθε σημείο ενός άξονα αντιστοιχεί σ' έναν πραγματικό αριθμό, αλλά και κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σ' ένα σημείο ενός άξονα.
- Μεταξύ δύο ρητών αριθμών α και β υπάρχουν άπειροι ρητοί και άπειροι άρρητοι αριθμοί. Αλλά και μεταξύ δύο άρρητων υπάρχουν άπειροι ρητοί και άπειροι άρρητοι. Όπως λέμε τότε το σύνολο των ρητών είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

1.1.3. Ιδιότητες των πραγματικών αριθμών

- (1) Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha + \gamma < \beta + \delta$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αφαίρεση ανισοτήτων κατά μέλη **δε γίνεται**.

- (2) Αν $0 < \alpha < \beta$ και $0 < \gamma < \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$.

ΠΡΟΣΟΧΗ:

- ♦ Για να πολλαπλασιάσουμε ανισότητες κατά μέλη θα πρέπει να έχουν την ίδια φορά και οι όροι να είναι θετικοί.
- ♦ Διάρθρωση ανισοτήτων κατά μέλη **δε γίνεται**.

$$(3) \text{ Αν } \alpha \geq \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \cdot \gamma \geq \beta \cdot \gamma, & \text{αν } \gamma > 0 \\ \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma, & \text{αν } \gamma < 0 \end{cases}$$

$$(4) \frac{\alpha}{\beta} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \geq 0 \text{ (ομόσημοι) με } \beta \neq 0.$$

$$(5) \text{ Αν } \alpha, \beta \text{ ομόσημοι τότε } \alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}.$$

$$(6) \text{ Αν } \alpha, \beta > 0 \text{ και } n \in \mathbb{N}^*, \text{ τότε } \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^n < \beta^n.$$

1.1.4. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε η απόλυτη τιμή του α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και είναι ίση με:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α , παριστάνει την *απόσταση* του σημείου A , με τετμημένη α , από την αρχή του άξονα των πραγματικών αριθμών. Ενώ η απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο πραγματικών αριθμών, για παράδειγμα $|\alpha - \beta|$, παριστάνει την απόσταση των σημείων A και B , με τετμημένες α και β αντίστοιχα, πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

1.1.5. Ιδιότητες των απολύτων τιμών:

Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$(1) |\alpha| \geq 0$$

$$(2) |\alpha|^2 = \alpha^2$$

$$(3) |\alpha| = |- \alpha|$$

$$(4) |\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$(5) |\alpha| > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$$

$$(6) \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$$

$$(7) |\alpha| \geq \alpha$$

$$(8) |\alpha| \geq -\alpha$$

$$(9) \text{ Αν } \theta > 0 \text{ τότε } \begin{cases} |\alpha| = \theta \Leftrightarrow \alpha = \theta \text{ ή } \alpha = -\theta \\ |\alpha| < \theta \Leftrightarrow -\theta < \alpha < \theta \\ |\alpha| > \theta \Leftrightarrow \alpha < -\theta \text{ ή } \alpha > \theta \end{cases}$$

$$(10) |\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

$$(11) \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \beta \neq 0$$

$$(12) \left| |\alpha| - |\beta| \right| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \text{ (τριγωνική ανισότητα).}$$

1.1.6. Διαστήματα πραγματικών αριθμών

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. *Διάστημα (interval)* καλείται κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που έχει μία από τις παρακάτω μορφές:

$$(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x < \beta\} \text{ ανοικτό διάστημα (open interval)}$$

$$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x \leq \beta\} \text{ κλειστό διάστημα (closed interval)}$$

$$[\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x < \beta\}$$

$$(\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x \leq \beta\}$$

$$[\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \alpha\}$$

$$(\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > \alpha\}$$

$$(-\infty, \alpha] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \alpha\}$$

$$(-\infty, \alpha) = \{x \in \mathbb{R} : x < \alpha\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

1.1.7. Παρατηρήσεις.

- (1) *Εσωτερικά σημεία* ενός διαστήματος Δ καλούνται τα σημεία του Δ εκτός από τα άκρα του.
- (2) Να θυμόμαστε ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχει τουλάχιστον ένας άρρητος. Επίσης ανάμεσα σε δύο άρρητους υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός.
- (3) Η ένωση δύο ή περισσότερων διαστημάτων δεν είναι διάστημα. Για παράδειγμα το σύνολο $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ δεν είναι διάστημα.

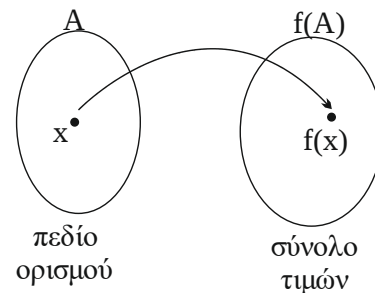
1.2. Συναρτήσεις – Βασικές έννοιες

1.2.1. Ορισμός. Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε *πραγματική συνάρτηση (function – map)* μιας πραγματικής μεταβλητής, με πεδίο ορισμού το A , μία διαδικασία f με την οποία κάθε στοιχείο του A , αντιστοιχίζεται σε έναν μόνο πραγματικό αριθμό.

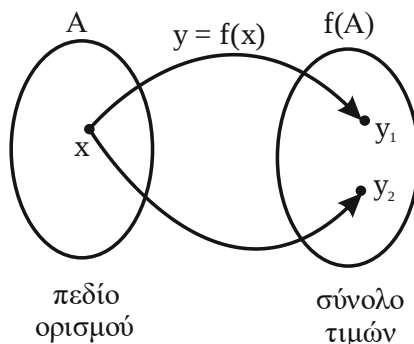
1.2.2. Παρατηρήσεις.

- (1) Αν $x \in A$, τότε την τιμή της συνάρτησης f στο x την συμβολίζουμε με $f(x)$.
- (2) Ο συμβολισμός $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ σημαίνει ότι η f είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού (Π.Ο.) το A , της οποίας οι τιμές ανήκουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.
- (3) Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f συμβολίζεται με D_f (Domain Set – Definition Set).
- (4) Η μεταβλητή που παριστάνει το τυχαίο στοιχείο του πεδίου ορισμού καλείται *ανεξάρτητη μεταβλητή*, ενώ η μεταβλητή που παριστάνει την τιμή της f στο x λέγεται *εξαρτημένη μεταβλητή*.
- (5) Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f για όλα τα $x \in A$ λέγεται *σύνολο τιμών της f* και συμβολίζεται με $f(A)$. Δηλαδή:

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in A\}$$



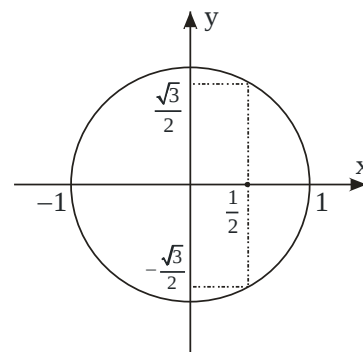
- (6) Αν η f είναι συνάρτηση, θα πρέπει κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού να έχει, μέσω της f μία τιμή, δηλαδή να αντιστοιχίζεται σε ένα στοιχείο του συνόλου τιμών.



Επειδή το $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε δύο τιμές, $y_1, y_2 \in f(A)$, Η f **ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ** συνάρτηση.

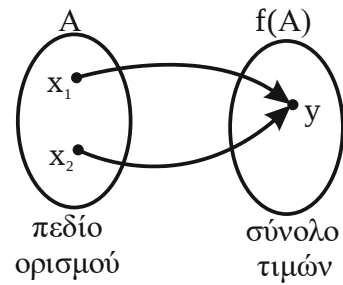
Για παράδειγμα, ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$, δεν είναι συνάρτηση, διότι για $x = \frac{1}{2}$ παίρνουμε

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



- (7) Αντιθέτως, σε μία συνάρτηση δύο στοιχεία του πεδίου ορισμού A μπορούν να έχουν την ίδια τιμή. Δηλαδή μπορεί να είναι $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$, με $x_1, x_2 \in A$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = x^2$, έχουμε $f(1) = f(-1) = 1$.



1.2.3. Προσδιορισμός πεδίου ορισμού συνάρτησης

Αν δεν μας δίνεται το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, τότε θεωρούμε ως πεδίο ορισμού, το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, για τα στοιχεία x του οποίου το $f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός. Ειδικότερα:

- (1) Αν η συνάρτηση είναι πολυώνυμο τότε το πεδίο ορισμού της είναι όλο το $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = x^3 + 2x - 4$, $D_f = \mathbb{R}$.

- (2) Οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

- (3) Αν η συνάρτηση είναι άρρητη, δηλαδή αν περιέχει **ριζικό (radical)**, τότε η υπόριζη ποσότητα θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός (μη αρνητική).

Παράδειγμα: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, πρέπει $x^2 - 4 \geq 0$ δηλ $D_f = (-\infty, 2] \cup [2, +\infty)$.

- (4) Αν η συνάρτηση περιέχει **κλάσμα (fraction)** θα πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός.

Παράδειγμα: $f(x) = \frac{x-4}{x^2+2x+1}$, πρέπει $x^2+2x+1 \neq 0$ δηλ $(x+1)^2 \neq 0$ άρα

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}.$$

- (5) Αν περιέχει παράσταση της μορφής $\log h(x)$ ή $\ln h(x)$ θα πρέπει $h(x) > 0$.

Παράδειγμα: $f(x) = \ln(x^2 - 25)$. Πρέπει:

$$\begin{aligned} x^2 - 25 > 0 &\Leftrightarrow (x-5)(x+5) > 0 \\ &\Leftrightarrow x < -5 \text{ ή } x > 5 \end{aligned}$$

Άρα $D_f = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$.



- (6) Αν έχουμε παράσταση της μορφής $(f(x))^{g(x)}$, πρέπει $f(x) > 0$ και $g(x) \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα: $f(x) = (2x^2 - 2)^{x^2-1}$. Πρέπει $2x^2 - 2 > 0$. Οπότε

$$2x^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 > 2 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1.$$

$$\text{Άρα } D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Σημείωση: Γενικά αν $g(x) > 0$ για κάθε $x \in D_g$ ισχύει:

$$g(x)^{h(x)} = e^{\ln(g(x))^{h(x)}} = e^{h(x) \ln g(x)}$$

$$\text{Παράδειγμα: } (x^2 + 1)^{x-3} = e^{(x-3) \ln(x^2 + 1)}.$$

$$(7) \text{ Αν } f(x) = \varepsilon\phi x, \text{ τότε πρέπει } \sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z},$$

$$\text{δηλαδή } D_f = \{x \in \mathbb{R} / \sin x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$(8) \text{ Αν } f(x) = \sigma\phi x, \text{ τότε πρέπει } \eta\mu x \neq 0 \Rightarrow x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z},$$

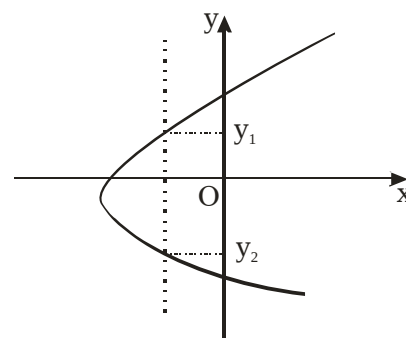
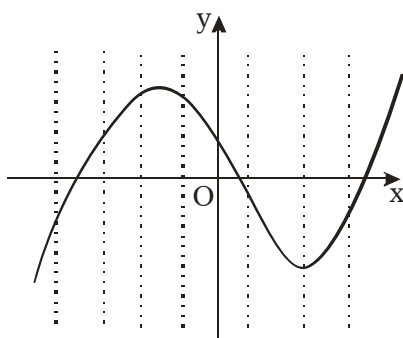
$$\text{δηλαδή } D_f = \{x \in \mathbb{R} / \eta\mu x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\}.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού μόνο όταν δεν μας δίνεται.

1.2.4. Ορισμός. Έστω μια $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση. Το σύνολο $\{(x, y) : y = f(x) \text{ με } x \in A\}$, ονομάζεται *γραφική παράσταση* της f και συμβολίζεται με C_f . Δηλαδή

$$C_f = \{(x, y) : y = f(x) \text{ με } x \in A\}.$$

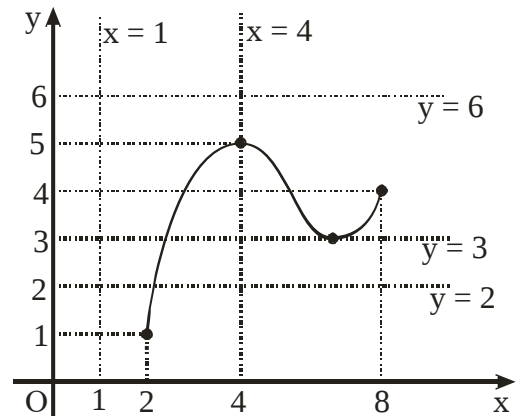
ΠΡΟΣΟΧΗ: Όταν δίνεται η γραφική παράσταση μιας καμπύλης και αυτή η καμπύλη είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, θα πρέπει οποιαδήποτε κατακόρυφη ευθεία να τέμνει τη C_f σε **ένα το πολύ σημείο** {από τον ορισμό της συνάρτησης κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε μία τιμή $f(x)$ }.



ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1.2.5. Παρατηρήσεις.

- (1) Ένας αριθμός x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αν και μόνον αν η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = x_0$ έχει ένα κοινό σημείο με τη C_f . Για παράδειγμα το 4 ανήκει στο D_f γιατί η κατακόρυφη ευθεία $x = 4$ τέμνει τη C_f , ενώ το 1 δεν ανήκει, αφού η κατακόρυφη ευθεία $x = 1$ δεν τέμνει την C_f .



- (2) Ένας αριθμός y_0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f αν και μόνον αν η οριζόντια ευθεία $y = y_0$ τέμνει σε ένα τουλάχιστον σημείο τη C_f . Στο παράδειγμα του σχήματος οι αριθμοί 2 και 3 είναι τιμές της f (τόσο η $y = 2$ όσο και η $y = 3$ τέμνουν τη C_f), ενώ ο αριθμός 6 δεν είναι τιμή της f , αφού η ευθεία $y = 6$ δεν τέμνει τη C_f .
- (3) Η προβολή της C_f στον άξονα $x'x$ μας δίνει το πεδίο ορισμού A της f . Στο παράδειγμά μας το D_f είναι το σύνολο $A = [2, 8]$.
- (4) Η προβολή της C_f στον άξονα $y'y$ μας δίνει το σύνολο τιμών της f . Στο παράδειγμά μας το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A) = [1, 5]$.
- (5) Αν γνωρίζουμε τη C_f , τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + c$, $c \in \mathbb{R}^*$, προκύπτει από τη μετατόπιση της C_f κατά c μονάδες, προς τα πάνω αν $c > 0$ ή προς τα κάτω αν $c < 0$.
- (6) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = f(x - c)$, $c \in \mathbb{R}^*$, προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της C_f κατά c μονάδες προς τα δεξιά αν $c > 0$ ή κατά c μονάδες προς τα αριστερά αν $c < 0$.
- (7) Όταν λέμε ότι η συνάρτηση f διέρχεται από το σημείο $A(\alpha, \beta)$ εννοούμε ότι το σημείο A ανήκει στην C_f και προφανώς οι συντεταγμένες του θα επαληθεύει τον τύπο της f . Δηλαδή θα ισχύει $f(\alpha) = \beta$.
- (8) Στην έκφραση «για ποιες τιμές του x η C_f είναι πάνω από την C_g » αρκεί να λύσουμε την ανισότητα $f(x) > g(x)$.

(9) Στην έκφραση «για ποιες τιμές του x η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ » αρκεί να λύσουμε την ανισότητα $f(x) > 0$.

(10) Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **άρτια** όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = f(x).$$

Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

(11) Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **περιττή** όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

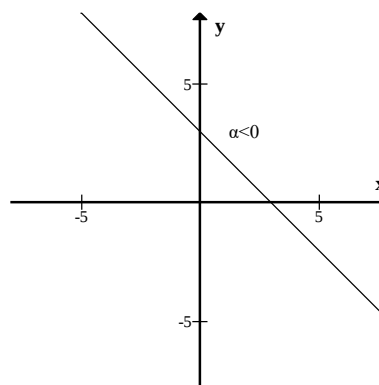
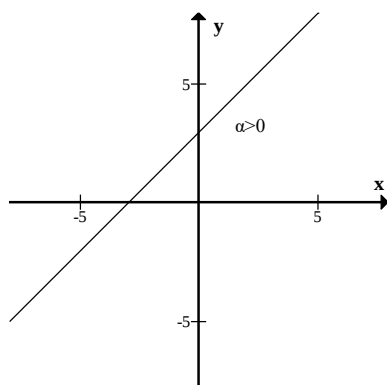
$$-x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x).$$

Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων. Αν το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού μιας περιττής συνάρτησης τότε $f(0) = 0$.

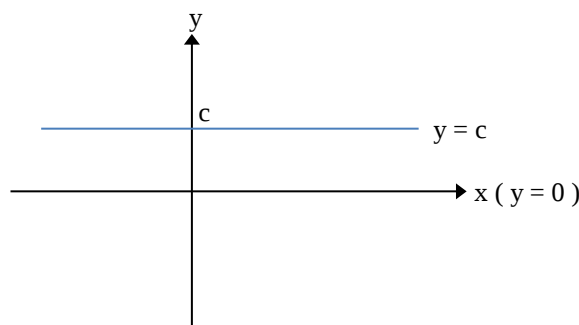
1.2.6. Βασικές συναρτήσεις

Πολυωνυμική συνάρτηση 1^{ου} βαθμού $f(x) = ax + \beta$ (ευθεία).

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

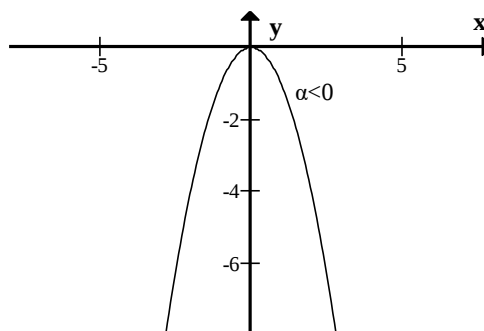
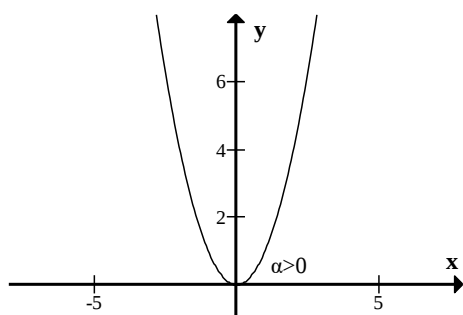


Ειδική περίπτωση $f(x) = c$ (σταθερή συνάρτηση). Πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το **μο-νοσύνολο** $\{c\}$.



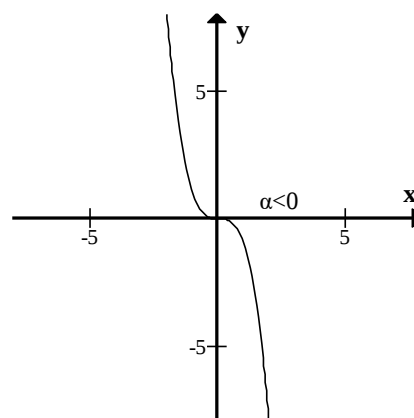
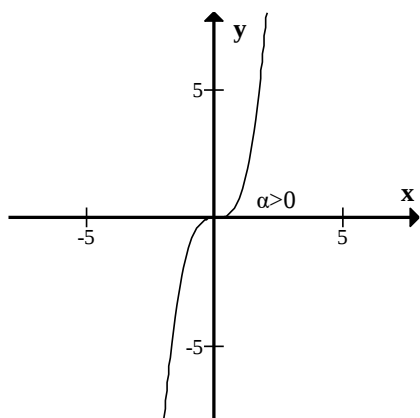
Η συνάρτηση $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$ (παραβολή).

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και: αν $a > 0$ σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$, ενώ αν $a < 0$ τότε έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, 0]$.



Η συνάρτηση $f(x) = ax^3$, $a \neq 0$.

Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.



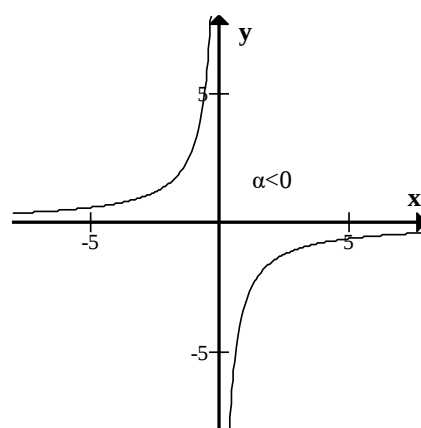
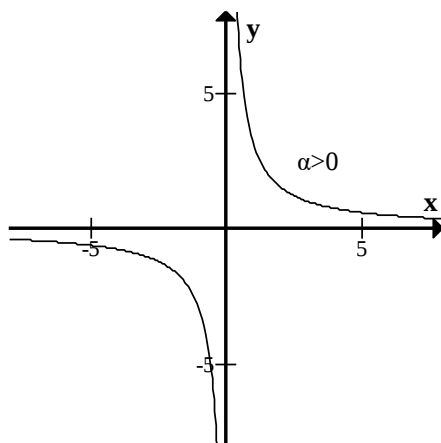
Ρητή συνάρτηση.

Ρητή συνάρτηση λέγεται μια συνάρτηση της μορφής $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου τα $P(x), Q(x)$ είναι

πολυώνυμα. Η συνάρτηση $R(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{\text{ρίζες του παρονομαστή}\}$ και το πεδίο τιμών εξαρτάται από την περίπτωση.

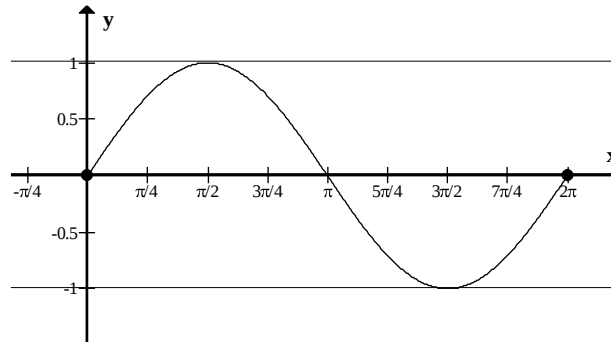
Ειδική περίπτωση: η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$. (υπερβολή).

Η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}^*$.



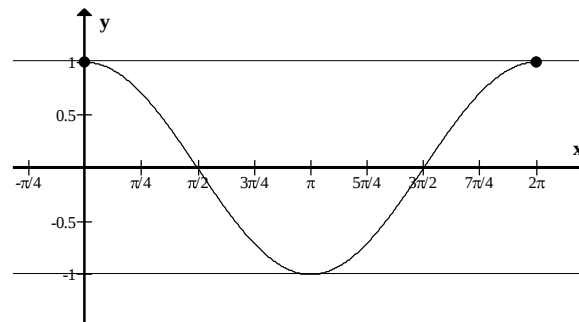
Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$.

Η $\eta\mu x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το σύνολο $[-1, 1]$. Η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$. Γι' αυτό και μελετάμε την f σ' ένα διάστημα πλάτους 2π . Συνήθως στο $[0, 2\pi]$.



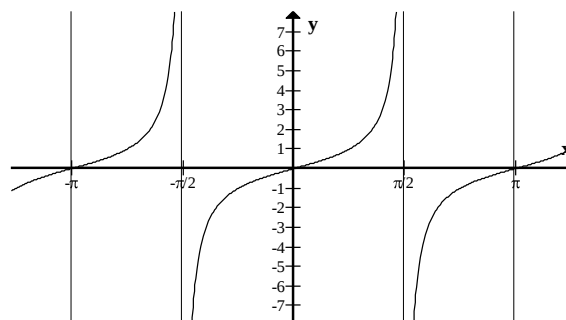
Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\eta x$.

Η $\sigma\upsilon\eta x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το σύνολο $[-1, 1]$. Παρουσιάζει περίοδο $T=2\pi$, οπότε η γραφική της παράσταση θα γίνει στο διάστημα $[0, 2\pi]$.



Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$.

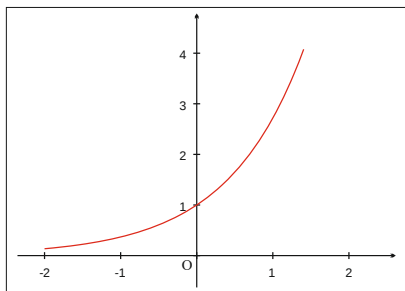
Η $\epsilon\phi x$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$ και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.



Παρατήρηση: για τις παραπάνω τριγωνομετρικές συναρτήσεις η ανεξάρτητη μεταβλητή x εκφράζει το μέτρο της γωνίας σε **ακτίνια** και όχι σε μοίρες.

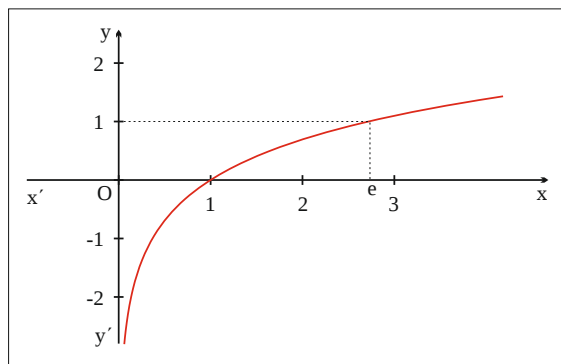
Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ (Εκθετική συνάρτηση).

Η εκθετική συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το σύνολο $(0, +\infty)$.



Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ (Λογαριθμική συνάρτηση).

Η λογαριθμική συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.



1.2.7. Ορισμός (Ισότητα συναρτήσεων) Δύο συναρτήσεις f, g λέμε ότι είναι *ίσες* και συμβολικά γράφουμε $f = g$, όταν ισχύουν τα παρακάτω:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A , δηλαδή $D_f = D_g = A$,
- ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

1.2.8. Παράδειγμα.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x^4 + 3x^2}{4x^2 + 6}$ και $g(x) = \frac{x^4 + x^2}{2x^2 + 2}$. Οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δηλαδή $D_f = D_g = \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f(x) = \frac{2x^4 + 3x^2}{4x^2 + 6} = \frac{x^2(2x^2 + 3)}{2(2x^2 + 3)} = \frac{x^2}{2} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^4 + x^2}{2x^2 + 2} = \frac{x^2(x^2 + 1)}{2(x^2 + 1)} = \frac{x^2}{2}.$$

Άρα $f = g$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Μπορεί δύο συναρτήσεις να είναι ίσες σε κάποιο υποσύνολο των πεδίων ορισμού τους. Δηλαδή αν A, B τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα και ισχύει $\Gamma \subseteq A$, $\Gamma \subseteq B$, τότε οι f και g είναι ίσες στο Γ μόνο όταν $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \Gamma$.

1.2.9. Παράδειγμα.

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ και $g(x) = \frac{x^2}{x^2 - x}$. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $B = \mathbb{R} - \{0, 1\}$. Επειδή $A \neq B$ συμπεραίνουμε ότι $f \neq g$. Όμως για κάθε

$$x \in \Gamma = A \cap B = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$$

ισχύει:

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x-1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^2}{x^2 - x} = \frac{x^2}{x(x-1)} = \frac{x}{x-1}$$

Δηλαδή $f = g$ για κάθε $x \in \Gamma$. $\square$

1.3. Πράξεις συναρτήσεων – Σύνθεση συναρτήσεων

1.3.1. Πράξεις με συναρτήσεις.

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ και $A \cap B \neq \emptyset$. Τότε για κάθε $x \in A \cap B$ ορίζουμε τις συναρτήσεις:

- **άθροισμα $f + g$** με τύπο $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
- **διαφορά $f - g$** με τύπο $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$,
- **γινόμενο $f \cdot g$** με τύπο $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- Για κάθε $x \in A \cap B$ και $g(x) \neq 0$, ορίζεται το **πηλίκο** $\frac{f}{g}$, με $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ και πεδίο ορισμού το σύνολο $\{x / x \in A \text{ και } x \in B \text{ με } g(x) \neq 0\}$

1.3.2. Παράδειγμα.

Έστω $f(x) = 4 - \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{x+1}{2-x}$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

Είναι $D_f = A = \mathbb{R} - \{0\}$ και $D_g = B = \mathbb{R} - \{2\}$. Άρα $A \cap B = \mathbb{R} - \{0, 2\}$.

Συνεπώς $D_{f+g} = A \cap B = \mathbb{R} - \{0, 2\}$. Οπότε

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) = 4 - \frac{1}{x} + \frac{x+1}{2-x} = \frac{4x-1}{x} + \frac{x+1}{2-x} = \frac{(4x-1)(2-x) + x(x+1)}{x(2-x)} \\ &= \frac{-3x^2 + 10x - 2}{x(2-x)}\end{aligned}$$

$D_{f \cdot g} = A \cap B = \mathbb{R} - \{0, 2\}$. Οπότε

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{4x-1}{x} \cdot \frac{x+1}{2-x} = \frac{4x^2 + 3x - 1}{2x - x^2}$$

Για το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ πρέπει επιπλέον να ισχύει $\frac{x+1}{2-x} \neq 0$, δηλ. $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Συ-

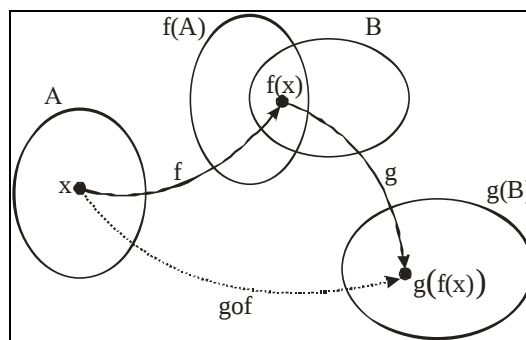
νεπώς $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{0, -1, 2\}$. Οπότε

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{4x-1}{x}}{\frac{x+1}{2-x}} = \frac{(4x-1)(2-x)}{x(x+1)} = \frac{-4x^2 + 9x - 2}{x^2 + x}. \quad \square$$

1.3.3. Ορισμός (Σύνθεση συναρτήσεων). Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}, g: B \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις. Η συνάρτηση $h: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $\Gamma = \{x \in A : f(x) \in B\}$, με τύπο $h(x) = g(f(x))$ καλείται *σύνθεση της f με την g* και συμβολίζεται με $g \circ f$. Ο τύπος της είναι

$$h(x) = (g \circ f)(x).$$

Σχηματικά η σύνθεση μπορεί να περιγραφεί με το παρακάτω σχήμα:



1.3.4. Παρατηρήσεις:

(1) Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$, όπου $f: A \rightarrow \mathbb{R}, g: B \rightarrow \mathbb{R}$ είναι το σύνολο των λύσεων του

$$\text{συστήματος } \begin{cases} x \in D_f = A \\ f(x) \in D_g = B \end{cases}. \text{ Δηλαδή, η συνάρτηση } g \circ f \text{ ορίζεται αν } f(A) \cap B \neq \emptyset.$$

(2) Για τον προσδιορισμό της σύνθεσης της g με την f , δηλαδή της $f \circ g$ ακολουθούμε παρόμοια διαδικασία. Το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$. Τον τύπο της $f \circ g$ τον βρίσκουμε από τη σχέση $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Αν οι προϋποθέσεις $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$ δεν συναληθεύουν, δηλαδή αν $g(B) \cap A = \emptyset$ τότε, δεν ορίζεται η $f \circ g$.

(3) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε και οι συναρτήσεις $f \circ g$, $g \circ f$ έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

(4) Όταν ορίζονται οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$, δεν είναι απαραίτητο ότι θα είναι και ίσες. Δηλαδή στη σύνθεση συναρτήσεων **δεν ισχύει** η αντιμεταθετική ιδιότητα.

(5) Αν f, g και h είναι τρεις συναρτήσεις για τις οποίες ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Η παραπάνω συνάρτηση λέγεται σύνθεση των f, g και h και συμβολίζεται με $h \circ g \circ f$.

1.3.5. Παράδειγμα. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = 2x - 4$ και $g(x) = \sqrt{x + 5}$. Να βρεθεί η συνάρτηση $g \circ f$.

Είναι $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = [-5, +\infty)$.

Η $g \circ f$ ορίζεται αν $x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$, δηλαδή

$$\left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ f(x) \geq -5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ 2x - 4 \geq -5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ 2x \geq -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$$

Άρα $D_{g \circ f} = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ και τότε $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 4) = \sqrt{2x - 4 + 5} = \sqrt{2x + 1}$. $\square$

1.3.6. Παράδειγμα. Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x - 1}$ να βρεθεί η συνάρτηση $f \circ g$.

$D_f = (0, +\infty)$ και $D_g = [1, +\infty)$. Η $f \circ g$ ορίζεται αν $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$, Έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 1 \\ \text{και} \\ g(x) > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 1 \\ \text{και} \\ \sqrt{x-1} > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 1 \\ \text{και} \\ x > 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x > 1$$

άρα $D_{f \circ g} = (1, +\infty)$ και τότε

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-1}) = \ln \sqrt{x-1} = \ln(x-1)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln(x-1). \quad \square$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.3.7. Άσκηση. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = ax + \beta$

(α) Να βρεθούν τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

(β) Αν η C_f και η ευθεία (ε) τέμνονται πάνω στην ευθεία $(\varepsilon'): x = 1$ και η (ε) διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$ να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Λύση

(α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για $x = 0$ είναι $f(0) = -2$, άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $A(0, -2)$. Επίσης για $y = 0: x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$, δηλ. η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $B(\sqrt{2}, 0), \Gamma(-\sqrt{2}, 0)$.

(β) Έστω $g(x) = ax + \beta$, επειδή τέμνονται στην ευθεία $x=1$ σημαίνει

$$f(1) = g(1) \Leftrightarrow 1^2 - 2 = \alpha + \beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = -1.$$

Και επειδή $g(-1) = 3$ είναι $-\alpha + \beta = 3$. Λύνουμε το σύστημα και τελικά $\alpha = -2, \beta = 1$. $\square$

1.3.8. Άσκηση. Έστω συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - f(x) - 1 = x(x-1)$ για κάθε $x \in A$. Να δείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

Λύση

Έστω ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε σημείο $(x_0, f(x_0))$. Τότε είναι $f(x_0) = 0$. Η δοσμένη σχέση για $x = x_0$ γίνεται:

$$f^2(x_0) - f(x_0) - 1 = x_0(x_0 - 1) \Leftrightarrow 0^2 - 0 - 1 = x_0^2 - x_0 \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 + 1 = 0.$$

ΑΤΟΠΟ αφού $\Delta = -3$ και συνεπώς το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες. Συνεπώς η C_f δεν

τέμνει τον άξονα $x'x$. $\square$

1.3.9. Άσκηση. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A = (-2, 3]$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(3x-5)$.

Λύση

Έστω $g(x) = 3x-5$ με πεδίο ορισμού το $D_g = \mathbb{R}$. Τότε είναι $f(3x-5) = f(g(x))$ και το πεδίο ορισμού της σύνθεσης είναι το $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\}$ δηλ. $x \in D_g \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ και

$$g(x) \in D_f \Leftrightarrow 3x-5 \in (-2, 3] \Leftrightarrow 3 < 3x \leq 8 \Leftrightarrow 1 < x \leq \frac{8}{3}.$$

Συνεπώς $D_{f \circ g} = \left(1, \frac{8}{3}\right]$. $\square$

1.3.10. Άσκηση. Να βρεθεί συνάρτηση f όταν $(f \circ g)(x) = e^x + x^2 - 1$ και $g(x) = x-1$.

Λύση

Είναι $f(g(x)) = e^x + x^2 - 1$, οπότε $f(x-1) = e^x + x^2 - 1$. Θέτουμε $x-1 = \omega$ ή $x = \omega + 1$. Άρα

$$f(\omega) = e^{\omega+1} + (\omega+1)^2 - 1 \text{ ή } f(\omega) = e^{\omega+1} + \omega^2 + 2\omega.$$

Δηλαδή $f(x) = e^{x+1} + x^2 + 2x$. $\square$

1.3.11. Άσκηση. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f(\ln x) = 3x + 2 \ln x - 1, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Λύση

Θέτουμε $y = \ln x$. Οπότε $e^y = x$, $y \in \mathbb{R}$. Αντικαθιστούμε στη δοσμένη σχέση και έχουμε:

$$f(\ln e^y) = 3e^y + 2 \ln e^y - 1 \Leftrightarrow f(y) = 3e^y + 2y - 1, y \in \mathbb{R}.$$

Άρα ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = 3e^x + 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

1.3.12. Άσκηση. Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων:

(α) $f(x) = e^{-x}$

(β) $f(x) = \eta \mu^2 3x$

(γ) $f(x) = e^{g(x)} - g^3(x) - \eta \mu g(x)$, όπου g συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Λύση

(α) Θεωρούμε τις συναρτήσεις g και h με τύπους $g(x) = e^x$ και $h(x) = -x$. Τότε

$$f(x) = g(h(x)) = g \circ h(x).$$

(β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις g , h και s με τύπους $g(x) = x^2$, $h(x) = \eta\mu x$ και $s(x) = 3x$. Τότε

$$f(x) = g(h(s(x))) = g \circ h \circ s(x).$$

(γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση h με τύπο $h(x) = e^x - x^3 - \eta\mu x$. Τότε

$$f(x) = h(g(x)) = h \circ g(x).$$

1.3.13. Άσκηση. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) = 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδειχθεί ότι $f(2x - 1) = 2f(x) - 1$

(β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

Λύση

(α) Θέτουμε όπου x το $f(x)$ και τότε:

$$f(f(f(x))) = 2f(x) - 1 \quad \text{ή} \quad f(2x - 1) = 2f(x) - 1,$$

αφού $f(f(x)) = 2x - 1$.

(β) Για $x = 1$ η προηγούμενη σχέση δίνει

$$f(1) = 2f(1) - 1 \Leftrightarrow f(1) = 1,$$

δηλ. η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει λύση $x = 1$, διότι την επαληθεύει.

1.4 Μονοτονία – Ακρότατα – Ένα προς ένα – Αντίστροφη συνάρτηση

1.4.1. Ορισμός. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Η f καλείται:

➤ Γνησίως αύξουσα στο Δ , αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, ισχύει η πρόταση

$$\text{αν } x_1 < x_2 \text{ τότε } f(x_1) < f(x_2).$$

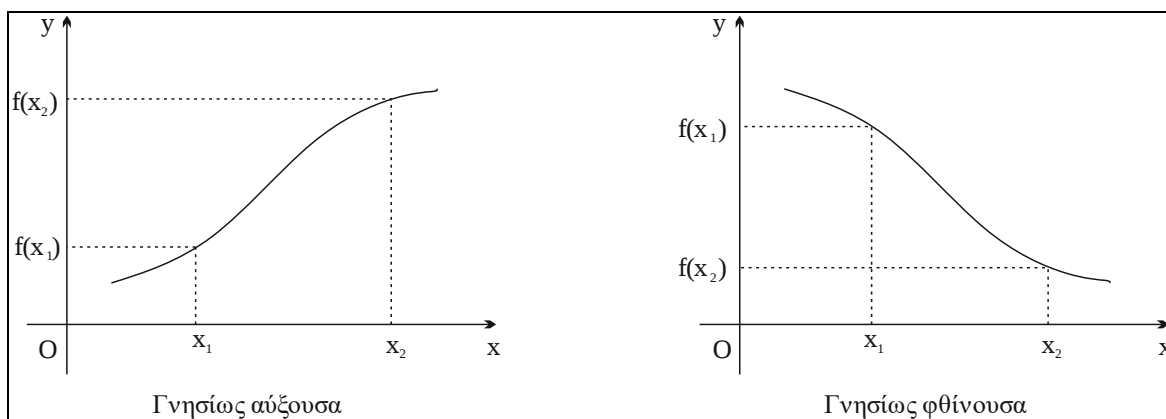
{Δηλαδή, όσο αυξάνεται το x , αυξάνεται και η αντίστοιχη τιμή $f(x)$ }

➤ Γνησίως φθίνουσα στο Δ , αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, ισχύει η πρόταση

$$\text{αν } x_1 < x_2 \text{ τότε } f(x_1) > f(x_2).$$

{Δηλαδή, όσο αυξάνεται το x , η αντίστοιχη τιμή του $f(x)$ ελαττώνεται}

Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ τότε γράφουμε $f \uparrow \Delta$, ενώ αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ , τότε γράφουμε $f \downarrow \Delta$.



1.4.2. Παρατηρήσεις.

- (1) Να προσεχθεί ιδιαίτερα ότι η μονοτονία είναι ιδιότητα διαστήματος.
- (2) Μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ λέγεται *γνησίως μονότονη στο Δ* , όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ .
- (3) Αν μία συνάρτηση έχει για D_f ένα διάστημα και είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε καλείται απλά γνησίως μονότονη.
- (4) Έστω συνάρτηση $f \uparrow \Delta$. Τότε για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$, ισχύουν οι ισοδυναμίες:
 - (α) $\alpha < \beta \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta)$
 - (β) $\alpha > \beta \Leftrightarrow f(\alpha) > f(\beta)$
 - (γ) $\alpha = \beta \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta)$
- (5) Έστω συνάρτηση $f \downarrow \Delta$. Τότε για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$, ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$(\alpha) \quad \alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) > f(\beta)$$

$$(\beta) \quad \alpha > \beta \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta)$$

$$(\gamma) \quad \alpha = \beta \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta)$$

(6) Μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ λέγεται:

♦ *αύξουσα στο Δ* , αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$,

♦ *φθίνουσα στο Δ* , αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$.

(7) Μία γνησίως μονότονη έχει το πολύ μία ρίζα.

(8) Γενικά χρειάζονται οι παρακάτω ιδιότητες:

(α) Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma > 0$, τότε $\alpha\gamma < \beta\gamma$, ενώ αν $\gamma < 0$, τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$.

(β) Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha + \gamma < \beta + \delta$. Αν όλοι οι α, β, γ και δ είναι θετικοί τότε μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη, οπότε $\alpha\gamma < \beta\delta$.

(γ) Αν α, β ομόσημοι, τότε

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}.$$

(δ) Αν n περιττός, τότε

$$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha^n < \beta^n.$$

(ε) Αν n άρτιος, τότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν α, β θετικοί, τότε ισχύει

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^n < \beta^n.$$

(ii) Αν α, β αρνητικοί, τότε ισχύει

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n.$$

(στ) Αν α, β μη αρνητικοί και κ θετικός ακέραιος, τότε

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\kappa]{\alpha} < \sqrt[\kappa]{\beta}.$$

1.4.3. Παράδειγμα. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + e^x$, $x \geq 0$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1^2 < 3x_2^2 \\ e^{x_1} < e^{x_2} \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} 3x_1^2 + e^{x_1} < 3x_2^2 + e^{x_2} \text{ δηλαδή } f(x_1) < f(x_2),$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. $\square$

1.4.4. Ορισμός. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση και έστω $x_0 \in A$. Λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$:

- (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$,
- (ολικό) ελάχιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

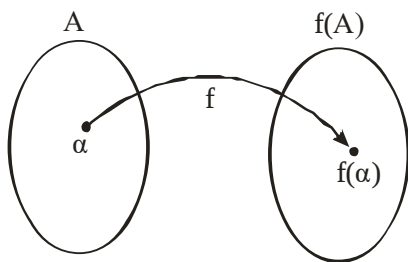
1.4.5. Ορισμός. Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται ένα προς ένα (1-1) όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η πρόταση

$$\text{αν } x_1 \neq x_2 \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2).$$

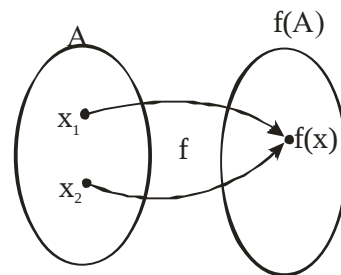
Η ισοδύναμα

$$\text{αν } f(x_1) = f(x_2) \text{ τότε } x_1 = x_2.$$

Δηλαδή, μια συνάρτηση είναι 1-1 όταν κάθε στοιχείο του συνόλου τιμών της f αντιστοιχεί σε ένα μόνο στοιχείο του πεδίου ορισμού.



Σε κάθε $f(a) \in f(A)$ αντιστοιχεί μοναδικό $a \in A$



Η f δεν είναι 1-1 γιατί για $x_1 \neq x_2$ έχουμε

$$f(x_1) = f(x_2).$$

1.4.6. Παρατηρήσεις.

(1) Μια συνάρτηση f είναι 1-1 αν και μόνο αν:

- ♦ Για κάθε y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x (στο πεδίο ορισμού της).
- ♦ Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης τα οποία να έχουν την ίδια τεταγμένη, δηλαδή κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη C_f το πολύ σε ένα σημείο.
- ♦ Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι 1-1. {βασικότερη πρόταση την οποία θα χρησιμοποιήσουμε αρκετά στις ασκήσεις}. Γενικά το αντίθετο δεν ισχύει.

- (2) Μία άρτια συνάρτηση δεν είναι ποτέ 1-1. Μία περιττή συνάρτηση μπορεί να είναι 1-1.
- (3) Αν η συνάρτηση f δεν είναι 1-1 τότε υπάρχουν, τουλάχιστον, δύο στοιχεία $x_1, x_2 \in D_f$ τέτοια ώστε $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$. Για παράδειγμα η $f(x) = x^2$ δεν είναι 1-1, αφού είναι $-2 \neq 2$ και $f(-2) = f(2) = 4$.
- (4) Αν η f είναι 1-1 τότε κάθε παράλληλη ευθεία στο $x'x$ τέμνει το πολύ σε ένα σημείο τη C_f .
- (5) Αν $x_1 = x_2$ και $x_1, x_2 \in D_f$ ΙΣΧΥΕΙ ΠΑΝΤΑ $f(x_1) = f(x_2)$. Αν όμως $f(x_1) = f(x_2)$ τότε μόνο αν είναι η f είναι 1-1 έχουμε $x_1 = x_2$.
- (6) Έστω η εξίσωση $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι 1-1, τότε η εξίσωση έχει το πολύ μία ρίζα.

1.4.7. Παράδειγμα. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$ είναι 1-1.

Είναι $D_f = [1, +\infty)$. Έστω $x_1, x_2 \in D_f$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε:

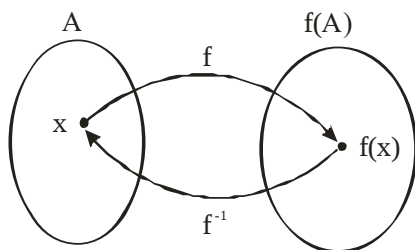
$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{x_1-1} = \sqrt{x_2-1} \Leftrightarrow (\sqrt{x_1-1})^2 = (\sqrt{x_2-1})^2 \Leftrightarrow x_1-1 = x_2-1 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Συνεπώς η f είναι 1-1. $\square$

1.4.8. Ορισμός (αντίστροφης συνάρτησης). Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση 1-1. Τότε ορίζεται η συνάρτηση $g: f(A) \rightarrow A$, η οποία σε κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζει το μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $y = f(x)$. Η συνάρτηση g καλείται *αντίστροφη συνάρτηση* της f και συμβολίζεται με f^{-1} . Δηλαδή

$$y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

Σχηματικά έχουμε

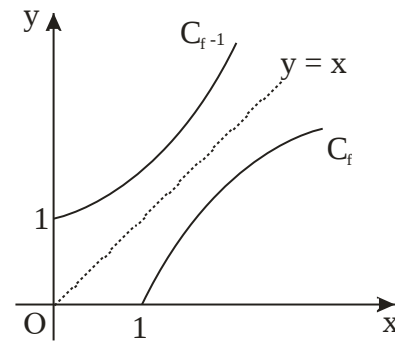


$$f: A \rightarrow f(A) \Leftrightarrow f^{-1}: f(A) \rightarrow A$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία με εξίσωση $y = x$.



Πράγματι, έστω $A(\alpha, \beta) \in C_f$, τότε

$$f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow f^{-1}(\beta) = \alpha \Leftrightarrow B(\beta, f^{-1}(\beta)) \equiv B(\beta, \alpha) \in C_{f^{-1}}.$$

Εφόσον τα σημεία $A(\alpha, \beta)$ και $B(\beta, \alpha)$ είναι συμμετρικά ως προς την $y = x$, έχουμε το ζητούμενο.

1.4.9. Παρατηρήσεις.

- (1) Η συνάρτηση $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ ορίζεται αν η συνάρτηση f είναι 1-1. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f , ενώ το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της f . Ο τύπος της αντίστροφης προκύπτει κατά την διαδικασία εύρεσης του συνόλου τιμών της f . Είναι $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ και άρα $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. Δηλαδή

$$\begin{aligned} f &: A \rightarrow f(A) \\ f^{-1} &: f(A) \rightarrow A \end{aligned}$$

- (2) Από τα παραπάνω προκύπτουν ότι $f(f^{-1}(y)) = y$ και $f^{-1}(f(x)) = x$.
- (3) Κάθε συνάρτηση γνησίως μονότονη είναι 1-1 άρα και αντιστρέψιμη.
- (4) Η αντίστροφη μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας (Βασική άσκηση).
- (5) Η γραφική παράσταση της C_f τέμνει (αν την τέμνει) τη διχοτόμο $y = x$ στα ίδια σημεία με την $C_{f^{-1}}$. Αυτό συμβαίνει λόγω συμμετρίας. Άρα η εξίσωση $f(x) = x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$. Δηλαδή

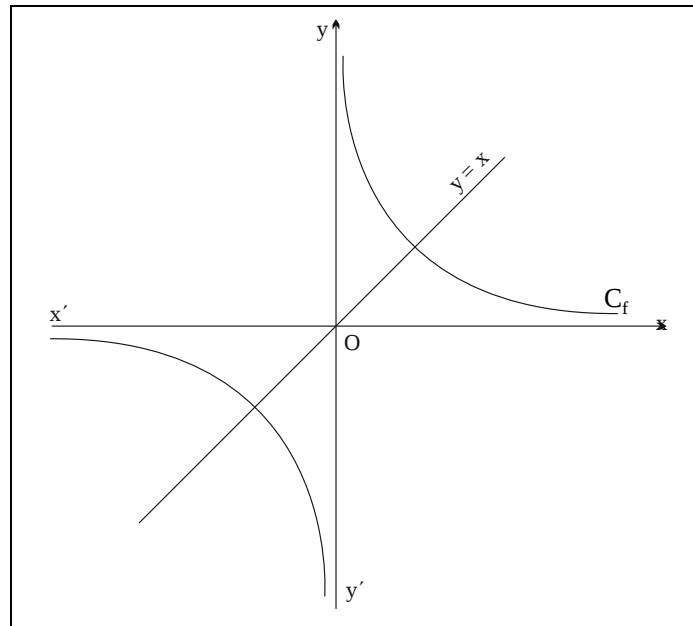
$$f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x.$$

Προσοχή, η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$ δεν έχει τις ίδιες λύσεις με τις παραπάνω εξισώσεις.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, είναι 1-1 και έχει αντίστροφη τον

εαυτό της, δηλαδή $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$. Άρα η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$, έχει άπειρες λύσεις. Όμως,

οι εξισώσεις $f(x) = x$ και $f^{-1}(x) = x$, έχουν λύσεις τις $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.4.10. Άσκηση. Αν οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσες ναδειχθεί ότι:

- (α) $f + g$ γνησίως αύξουσα
- (β) $2f + 5g$ γνησίως αύξουσα
- (γ) $f \circ g$ γνησίως αύξουσα

Στηρίζομαστε στον ορισμό. Οπότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ και $g(x_1) < g(x_2)$.

(α) Προσθέτουμε κατά μέλη: $(f + g)(x_1) < (f + g)(x_2)$ δηλ. η συνάρτηση $f + g$ είναι %

(β) Ισχύει $2f(x_1) < 2f(x_2)$ προσθέτουμε και $5g(x_1) < 5g(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $2f+5g$ είναι %.

(γ) Έστω $x_1 < x_2$. Εφόσον η συνάρτηση g είναι % έχουμε $g(x_1) < g(x_2)$ και επειδή η f είναι % ισχύει $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$ ή $(f \circ g)(x_1) < (f \circ g)(x_2)$. Δηλ. $f \circ g$ %. $\square$

1.4.11. Άσκηση. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln(x+1) - 1$.

(α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την μονοτονία.

(β) Να λυθεί η ανίσωση $e^{x^2} + \ln(x^2+1) > 1$.

(γ) Να λυθεί η εξίσωση $e^{x^2} - e^{x+2} = \ln \frac{x+3}{x^2+1}$.

(α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-1, +\infty)$. Έστω $x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε είναι

$$e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1 \quad (I)$$

$$\ln x_1 < \ln x_2 \Rightarrow \ln(x_1+1) < \ln(x_2+1) \quad (II)$$

Από σχέσεις (I) και (II) έχουμε

$$e^{x_1} + \ln(x_1+1) - 1 < e^{x_2} + \ln(x_2+1) - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

(β) Η δοσμένη ανίσωση δεν μπορεί να επιλυθεί με αλγεβρικές μεθόδους. Θα εκμεταλλευτούμε την μονοτονία της f . Παρατηρούμε ότι η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$e^{x^2} + \ln(x^2+1) > 1 \Leftrightarrow e^{x^2} + \ln(x^2+1) - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x^2) > f(0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 0 \quad (\text{αφού } f\%)$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0.$$

Συνεπώς $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(γ) Ομοίως η εξίσωση αυτή δεν λύνεται με αλγεβρικές μεθόδους. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση έχει πεδίο ορισμού το $(-3, 0)$. Οπότε:

$$\begin{aligned}
e^{x^2} - e^{x+2} &= \ln \frac{x+3}{x^2+1} \Leftrightarrow e^{x^2} - e^{x+2} = \ln(x+3) - \ln(x^2+1) \\
&\Leftrightarrow e^{x^2} + \ln(x^2+1) = e^{x+2} + \ln(x+2+1) \\
&\Leftrightarrow e^{x^2} + \ln(x^2+1) - 1 = e^{x+2} + \ln(x+2+1) - 1 \\
&\Leftrightarrow f(x^2) = f(x+2)
\end{aligned}$$

Και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, είναι και 1-1 έχουμε τελικά

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -1.$$

Οι οποίες είναι δεκτές και οι δύο. $\square$

1.4.12. Άσκηση. Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης f , με τύπο $f(x) = e^{2x-1}$.

Το πεδίο ορισμού της f είναι $A = \mathbb{R}$.

(Αποδεικνύουμε ότι η f είναι 1-1)

Έστω $x_1, x_2 \in A$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε έχουμε

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{2x_1-1} = e^{2x_2-1} \Rightarrow 2x_1-1 = 2x_2-1 \Rightarrow x_1 = x_2, \text{ άρα η } f \text{ είναι 1-1}$$

(Θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x)

Από την $y = f(x)$ ισοδύναμα έχουμε:

$$e^{2x-1} = y \Leftrightarrow 2x-1 = \ln y \Leftrightarrow 2x = 1 + \ln y \Leftrightarrow x = \frac{1 + \ln y}{2}, \text{ με } y > 0$$

(Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f , το οποίο είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1})

Η f έχει σύνολο τιμών το $f(A) = (0, +\infty)$. Δηλαδή ορίζεται η $f^{-1}: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f^{-1}(y) = \frac{1 + \ln y}{2} \text{ \{αφού } f^{-1}(y) = x \text{ \}. ή ισοδύναμα } f^{-1}(x) = \frac{1 + \ln x}{2}, x \in (0, +\infty). \square$$

1.4.13. Άσκηση. Να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση της f με $f(x) = \sqrt{x-2}$.

Είναι $D_f = [2, +\infty)$. Έστω $x_1, x_2 \in D_f$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{x_1-2} = \sqrt{x_2-2} \Leftrightarrow (\sqrt{x_1-2})^2 = (\sqrt{x_2-2})^2 \Leftrightarrow x_1-2 = x_2-2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα η f είναι 1-1 και συνεπώς αντιστρέφεται. Για να υπολογίσουμε την αντίστροφη της f θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x . Είναι $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = y$ η οποία έχει λύση για $y \geq$

0. Συνεπώς για $y \geq 0$ έχουμε $x - 2 = y^2 \Leftrightarrow x = y^2 + 2$. Από την επίλυση της $f(x) = y$ προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[2, +\infty)$. Επίσης $f^{-1}(y) = y^2 + 2$ ή $f^{-1}(x) = x^2 + 2, x \geq 0$. $\square$

1.4.14. Άσκηση. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}$.

Να δειχθεί ότι $f(1) = 1$ και ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 - xf(x) + 1$ δεν είναι 1-1.

Θέτουμε όπου x το $f(x)$ και τότε

$$f(f(f(x))) = f^2(x) - f(x) + 1 \text{ ή ισοδύναμα } f(x^2 - x + x) = f^2(x) - f(x) + 1.$$

Για $x = 1$ παίρνουμε

$$f(1) = f^2(1) - f(1) + 1 \Leftrightarrow f^2(1) - 2f(1) + 1 = 0 \Leftrightarrow [f(1) - 1]^2 = 0 \text{ ή } f(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1.$$

Στην g για $x = 0$ και για $x = 1$ έχουμε ότι $g(0) = 1$ και $g(1) = 1 - f(1) + 1 = 1$. Δηλ. $g(0) = g(1)$.

Άρα η g δεν είναι 1-1. $\square$

1.4.15. Άσκηση. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη συνάρτηση, με

$$f(3) = 2 \text{ και } f(5) = 9.$$

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και ότι αντιστρέφεται.

(β) Να βρεθούν οι τιμές $f^{-1}(2), f^{-1}(9)$.

(γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(2 + f^{-1}(x^2 + x)) = 9$.

(δ) Να λυθεί η ανίσωση $f(f^{-1}(x^2 - 8x) - 2) < 2$.

(α) Είναι $3 < 5$ και $f(3) < f(5)$. Άρα η f δεν μπορεί να είναι γνησίως φθίνουσα. Εφόσον είναι γνησίως μονότονη είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς αντιστρέφεται.

(β) Είναι $f(3) = 2 \Leftrightarrow f^{-1}(2) = 3$ και $f(5) = 9 \Leftrightarrow f^{-1}(9) = 5$.

$$(γ) f(2 + f^{-1}(x^2 + x)) = 9 \Leftrightarrow f^{-1}(f(2 + f^{-1}(x^2 + x))) = f^{-1}(9) \Leftrightarrow 2 + f^{-1}(x^2 + x) = 5$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x^2 + x) = 3 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x^2 + x)) = f(3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 1$$

(δ) Εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$\begin{aligned}f\left(f^{-1}\left(x^2-8x\right)-2\right)<f(3)&\Leftrightarrow f^{-1}\left(x^2-8x\right)-2<3\Leftrightarrow f^{-1}\left(x^2-8x\right)<5\\&\Leftrightarrow f\left(f^{-1}\left(x^2-8x\right)\right)<f(5)\Leftrightarrow x^2-8x<9\\&\Leftrightarrow x^2-8x-9<0\Leftrightarrow -1<x<9.\end{aligned}$$

Επειδή όμως $D_f = (0, +\infty)$ είναι $0 < x < 9$. $\square$

2. ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

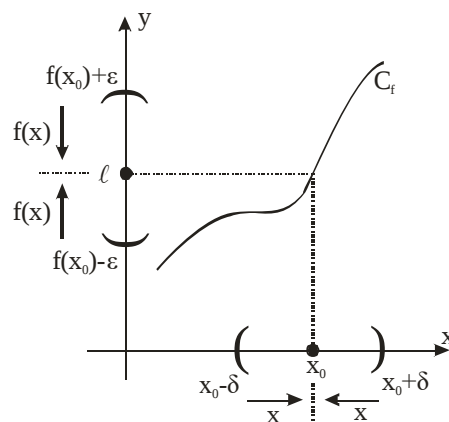
2.1. Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

2.1.1. Η έννοια του ορίου

Θα ορίσουμε στην παράγραφο αυτή την έννοια του ορίου μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι η τιμή του $y = f(x)$ μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται το x . Όταν η τιμή του x “πλησιάζει”, με οποιονδήποτε τρόπο, τη τιμή $x_0 \in \mathbb{R}$ και η τιμή του $f(x)$ πλησιάζει (βλέπε σχήμα) κάποια τιμή ℓ , τότε λέμε τότε ότι το όριο της f , όταν το x τείνει στο x_0 , είναι ℓ και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

Το x_0 θα μπορούσε να ανήκει ή να μην ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και το ℓ θα μπορούσε να ανήκει ή να μην ανήκει στο σύνολο τιμών της. Για να έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου μιας συνάρτησης στο x_0 , πρέπει η συνάρτηση να ορίζεται σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

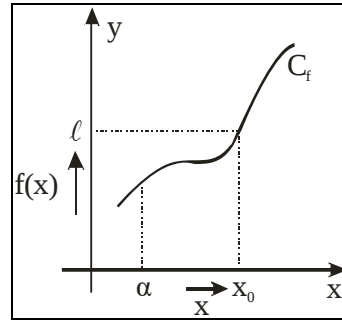


2.1.2. Πλευρικά όρια

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$.

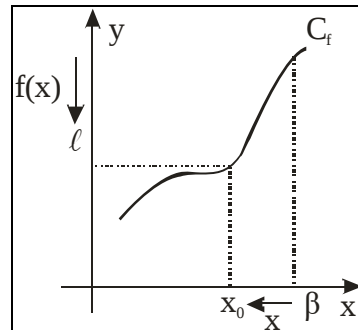
- ♦ Αν η f ορίζεται σ' ένα διάστημα της μορφής (α, x_0) και το $f(x)$ πλησιάζει «όσο θέλουμε» τον αριθμό ℓ , καθώς το x πλησιάζει από αριστερά, με οποιονδήποτε τρόπο, τον αριθμό x_0 , δηλαδή $x \rightarrow x_0$, με $x < x_0$, τότε λέμε ότι το αριστερό πλευρικό όριο της f στο x_0 είναι το ℓ και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell.$$



- ♦ Αν η f ορίζεται σ' ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) και το $f(x)$ πλησιάζει «όσο θέλουμε» τον αριθμό ℓ καθώς το x πλησιάζει από δεξιά, με οποιονδήποτε τρόπο, τον αριθμό x_0 , δηλαδή $x \rightarrow x_0$, με $x > x_0$, τότε λέμε ότι το δεξιό πλευρικό όριο της f στο x_0 είναι το ℓ και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell.$$



2.1.3. Παρατηρήσεις.

- (1) Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 πρέπει αυτή να ορίζεται σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (α, x_0) {για αριστερό όριο} ή (x_0, β) {για δεξιό όριο}.
- (2) Αποδεικνύεται ότι αν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 , τότε αυτό είναι μοναδικό.
- (3) Αν μια συνάρτηση f ορίζεται σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$

Συνθήκη ύπαρξης ορίου. Μια συνάρτηση έχει όριο, στο x_0 , τον αριθμό ℓ , αν τα πλευρικά της όρια είναι ίσα με ℓ .

- (4) Αν μια συνάρτηση ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α, x_0) , ενώ δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0, β) , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.
- (5) Αν μια συνάρτηση ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0, β) , ενώ δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α, x_0) , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

(6) Το όριο μιας συνάρτησης f , όταν αυτό υπάρχει, είναι ανεξάρτητο από τα άκρα των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0, β) στα οποία ορίζεται η f .

(7) Όταν λέμε ότι μια συνάρτηση έχει μία ιδιότητα I κοντά στο x_0 , εννοούμε ότι η συνάρτηση έχει την ιδιότητα I για τα $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή για τα $x \in (\alpha, x_0)$ ή για τα $x \in (x_0, \beta)$, για κατάλληλα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(8) Αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} (x_0 + h) = \ell \end{aligned}$$

2.1.4. Όριο ταυτοτικής και σταθερής συνάρτησης

- ♦ Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = x$ καλείται *ταυτοτική συνάρτηση*. Για την ταυτοτική συνάρτηση αποδεικνύεται ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.
- ♦ Αν $f(x) = c$ (σταθερή συνάρτηση), $c \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

2.1.5. Όριο και διάταξη

Κάνοντας χρήση του ορισμού του ορίου (εκτός ύλης) αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα.

Θεώρ. 1: Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 και αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$

κοντά στο x_0 .

Θεώρ. 2: Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

2.1.6. Παράδειγμα

Έστω συνάρτηση f τέτοια, ώστε $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3$. Τότε υπάρχει $x_0 < 0$ (κοντά στο -2) τέτοιος,

ώστε $f(x_0) > 0$. Επίσης, αν για τη συνάρτηση g είναι $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 6$, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 < 0$

(κοντά στο -2) τέτοιοι, ώστε $f(x_1) < g(x_2)$.

Προσοχή, το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = -x^2$ είναι αρνητική κοντά στο 0, αλλά $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

2.1.6. Όρια και πράξεις

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν όριο πραγματικό αριθμό, στο x_0 , τότε:

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} (\kappa f(x)) = \kappa \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \kappa \in \mathbb{R}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \text{ και εφόσον } f(x) \geq 0 \text{ κοντά στο } x_0.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^v, v \in \mathbb{N}^*.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ εφόσον } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

Στις παραπάνω ιδιότητες θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις $f \pm g$, $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$ ορίζονται κοντά στο x_0 .

2.1.7. Όριο πολωνυμικής και ρητής συνάρτησης

Θεώρημα 1: Έστω η πολωνυμική συνάρτηση $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $P(x) = \alpha_v x^v + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$. Τότε αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) = \alpha_v x_0^v + \dots + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 = P(x_0).$$

Θεώρημα 2: Έστω η ρητή συνάρτηση R , με τύπο $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, με $Q(x_0) \neq 0$. Σύμφωνα με το

προηγούμενο θεώρημα είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = R(x_0).$$

2.1.8. Κριτήριο παρεμβολής * (Sandwich rule)

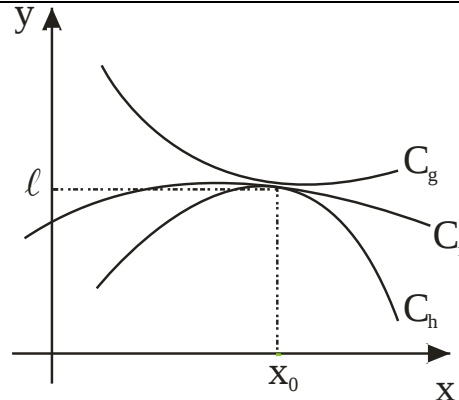
Θεώρημα.

Αν για τις συναρτήσεις f , g και h ισχύουν:

➤ $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, κοντά στο x_0 και

➤ $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$, με $\ell \in \mathbb{R}$,

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.



* Το παραπάνω θεώρημα είναι σημαντικό και θα έχει μεγάλη εφαρμογή στις ασκήσεις!

2.1.9. Όριο σύνθετης συνάρτησης

Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0 , ακολου-

θούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.
2. Υπολογίζουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Αν υπάρχει, έστω $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, τότε $u \rightarrow u_0$.
3. Συνεπώς $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$. Το όριο του 2^{ου} μέλους είναι πιο απλό.

2.1.10. Βασικά τριγωνομετρικά όρια

➤ Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x| \leq |x|$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$). Ειδικότερα:

♦ Αν $x > 0$, τότε η ανισότητα γράφεται :

$$|\eta\mu x| \leq |x| \Leftrightarrow |\eta\mu x| \leq x \Leftrightarrow -x \leq \eta\mu x \leq x$$

♦ Αν $x < 0$, τότε η ανισότητα γράφεται :

$$|\eta\mu x| \leq |x| \Leftrightarrow |\eta\mu x| \leq -x \Leftrightarrow x \leq \eta\mu x \leq -x$$

➤ $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$

➤ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

Με τη βοήθεια της παραπάνω ιδιότητας προκύπτει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(ax)}{ax} \stackrel{\omega=ax}{=} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\eta\mu\omega}{\omega} = 1$.

➤ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

2.1.11. Μεθοδολογία στον υπολογισμό του ορίου

Πριν τον υπολογισμό του ορίου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ βρίσκω ΠΑΝΤΑ το πεδίο ορισμού της f . Αυτό χρειάζεται για να ελέγξουμε αν μπορεί το $x \rightarrow x_0$, δηλαδή αν τα σύνολα $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (a, x_0) ή (x_0, β) ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Όταν το $x \rightarrow x_0$ αντικαθιστούμε όπου x το x_0 και τα δυνατά αποτελέσματα είναι:

1. Να προκύψει πραγματικός αριθμός ℓ . Στην περίπτωση αυτή το ℓ είναι το όριο.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{x^2 + 2} = \frac{e^0 + 1}{0 + 2} = \frac{2}{2} = 1.$$

2. Να προκύψει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Η απροσδιοριστία άρεται με:

(α) Παραγοντοποίηση – απλοποίηση:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \frac{0}{0} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x+3} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}.$$

(β) Συζυγή παράσταση – απλοποίηση:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}^2 - 1^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = 2 \\ \text{(ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{\sqrt{x}-\sqrt{7}} &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(\sqrt{x}+\sqrt{7})}{(\sqrt{x}-\sqrt{7})(\sqrt{x}+\sqrt{7})} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(\sqrt{x}+\sqrt{7})}{\sqrt{x}^2 - \sqrt{7}^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} (\sqrt{x}+\sqrt{7}) = 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

(γ) Κανόνα De L' Hospital (θα διδαχθεί στο κεφάλαιο των παραγώγων)

(δ) Με την βοήθεια γνωστών ορίων π.χ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$.

3. μορφή $\frac{\alpha}{0}$ με $\alpha \neq 0$ (θα διδαχθεί στην επόμενη παράγραφο).

Ειδικότερα αν έχουμε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: Ζητείται το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ με $f(x) = \begin{cases} g(x), & x \leq x_0 \\ h(x), & x > x_0 \end{cases}$.

Για να υπάρχει το όριο της $f(x)$ στο x_0 πρέπει να ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Δηλαδή αν ζητάμε το όριο σε σημείο που αλλάζει ο τύπος, τότε παίρνουμε υποχρεωτικά πλευρικά όρια. Για παράδειγμα:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \geq 1 \\ 2-x^2, & x < 1 \end{cases}$$

Τότε για το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x-1) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2-x^2) = 1$$

Εφόσον $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και είναι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: Ζητείται το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και η f περιέχει απόλυτο της μορφής $|A(x)|$.

- ♦ Εάν το x_0 δεν είναι ρίζα της $A(x)$, τότε βγάζουμε το απόλυτο αναλόγως με το πρόσημο του $A(x_0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x+3|}{3-x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{3-x} = \frac{2+3}{3-2} = 5.$$

- ♦ Εάν το x_0 είναι ρίζα της $A(x)$, δηλ. $A(x_0) = 0$, τότε βρίσκω το πρόσημο της παράστασης $A(x)$ κοντά στο x_0 και παίρνω πλευρικά όρια στο x_0 .

Για το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+1|}{x+1}$ παρατηρούμε ότι το -1 είναι ρίζα της παράστασης $|x+1|$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x+1|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{x+1} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x+1|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-(x+1)}{x+1} = -1$$

Εφόσον $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+1|}{x+1}$ δεν υπάρχει.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3: Ζητείται το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$. Θέτουμε $u = g(x)$ και βρίσκουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ (βλέπε λυμένη Άσκηση 2.2.4).

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4: Κριτήριο παρεμβολής: Αν ισχύει

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{κοντά στο } x_0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \quad \text{τότε έχουμε} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad (\text{βλέπε λυμένη Άσκηση 2.2.5}).$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5: Για τα τριγωνομετρικά όρια ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \alpha x}{\alpha x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0.$$

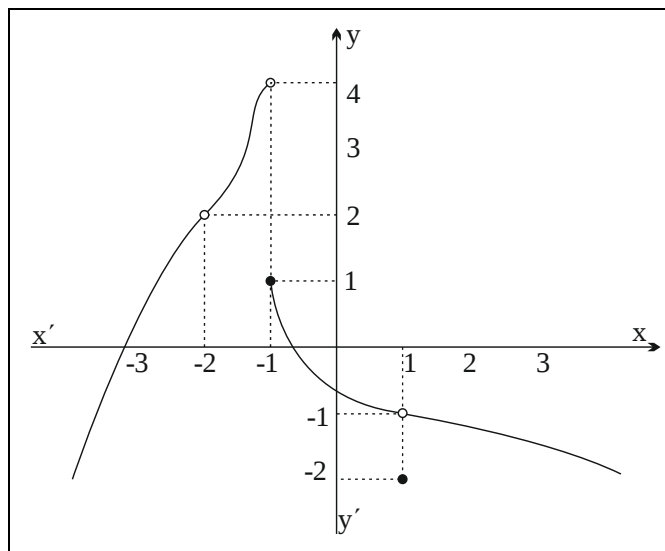
Αν έχουμε όρια της μορφής: $g(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$ ή $g(x) \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}$ (για $x \rightarrow 0$), χρησιμοποιούμε κριτήριο παρεμβολής. (βλέπε λυμένη Άσκηση 2.2.7)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 6: Όταν μας ΔΙΝΕΤΑΙ ένα όριο τότε χρησιμοποιούμε βοηθητική συνάρτηση.

Για παράδειγμα στο $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + 3x] = 5$, θέτουμε $g(x) = f(x) + 3$ και συνεχίζουμε ... (βλέπε λυμένη Άσκηση 2.2.6)

2.2. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 2.2.1. Θεωρούμε συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- (β) Να βρείτε τις τιμές $f(-1)$ και $f(1)$.
- (γ) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Για τα όρια που δεν υπάρχουν να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΛΥΣΗ

- (α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.
- (β) Από το σχήμα βλέπουμε ότι $f(-1) = 1$ και $f(1) = -2$.

(γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$. Το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ δεν υπάρχει, εφόσον τα πλευρικά όρια της f στο -1 δεν είναι ίσα. Για την ακρίβεια είναι $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 4$ και $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$. Επίσης $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$.

Άσκηση 2.2.2. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

$$(α) \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x^3 + x)^2 \cdot \ln(x - 1 + e) \right] \qquad (β) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x - 4}{x^2 - 1}$$

ΛΥΣΗ

(α) Με τις ιδιότητες των ορίων έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x)^2 = (1^3 + 1)^2 = 4$.

Για το $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x - 1 + e)$, θέτουμε $x - 1 + e = u$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1 + e) = e$. Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x - 1 + e) = \lim_{u \rightarrow e} \ln u = \ln e = 1$$

Τελικά $\lim_{x \rightarrow 1} \left[(x^3 + x)^2 \cdot \ln(x - 1 + e) \right] = 4 \cdot 1 = 4$.

(β) Με ιδιότητες έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 3x - 4) = 1 + 3 - 4 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$ δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Οπότε παραγοντοποιούμε (με σχήμα Horner) βρίσκουμε ότι

$$x^3 + 3x - 4 = (x - 1)(x^2 + x + 4)$$

και τελικά

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 4)}{\cancel{(x-1)}(x + 1)} = \frac{1 + 1 + 4}{1 + 1} = 3.$$

Άσκηση 2.2.3. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$.

ΛΥΣΗ

Με ιδιότητες έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+3} - 2) = \sqrt{4} - 2 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$. Οπότε, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση του α-

ριθμητή:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - 2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{\sqrt{1+3}+2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Άσκηση 2.2.4. Να βρεθούν τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 6x}{5x},$

(β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{x^2 - x}$

ΛΥΣΗ

Σε περίπτωση απροσδιοριστίας τριγωνομετρικών ορίων χρησιμοποιούμε τα γνωστά όρια

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0,$$

είτε στην μορφή που είναι, είτε ως σύνθετη συνάρτηση δηλαδή $\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 1$. Οπότε:

$$\begin{aligned}(\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 6x}{5x} &= \frac{1}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 6x}{x} = \frac{6}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 6x}{6x} \quad (\text{Θέτουμε } 6x = u \text{ οπότε } u_0 = \lim_{x \rightarrow 0} 6x = 0) \\ &= \frac{6}{5} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = \frac{6}{5} \cdot 1 = \frac{6}{5}.\end{aligned}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu 4x}{x} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(4 \frac{\eta\mu 4x}{4x} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{0-1} = -4, \text{ διότι αν θέσουμε}$$

$$4x = u \text{ είναι } u \rightarrow 0, \text{ συνεπώς } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{4x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1.$$

Άσκηση 2.2.5. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $x^2 + 2x \leq f(x) \leq 2x^2 + 1$ να βρεθούν τα όρια

(α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

(β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+3}{x+1}$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x-1}$

ΛΥΣΗ

(α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 1) = 2 \cdot 1^2 + 1 = 3$. Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε ότι και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.

(β) Με ιδιότητες ορίων έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + 3] = 3 + 3 = 6$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+3}{x+1} = \frac{6}{2} = 3.$$

(γ) Με ιδιότητες έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ και για να δουλέψουμε με κριτήριο παρεμβολής, πρέπει πρώτα στην διπλή ανίσωση να κατασκευάσουμε το $\frac{f(x)-3}{x-1}$.

♦ Αν $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ τότε:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x \leq f(x) \leq 2x^2 + 1 &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq f(x) - 3 \leq 2x^2 - 1 - 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} \leq \frac{f(x)-3}{x-1} \leq \frac{2x^2 - 2}{x-1} \\ &\Leftrightarrow \frac{\cancel{x-1}(x+3)}{\cancel{x-1}} \leq \frac{f(x)-3}{x-1} \leq \frac{2\cancel{x-1}(x+1)}{\cancel{x-1}} \end{aligned}$$

Όμως, $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x+3) = 4 = \lim_{x \rightarrow 1^+} [2(x+1)]$ και σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-3}{x-1} = 4.$$

♦ Ομοίως αν $x < 1$, διαιρούμε με $x-1$, αλλάζει η φορά και βρίσκουμε $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-3}{x-1} = 4$.

Επειδή τα πλευρικά όρια είναι ίσα, υπάρχει όριο και είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x-1} = 4$.

Άσκηση 2.2.6. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x-1} = 2$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $g(x) = \frac{f(x)-3}{x-1}$, με $x \neq 1$, άρα $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$. Είναι $f(x) = (x-1)g(x) + 3$. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)g(x) + 3] = 0 \cdot 2 + 3 = 3.$$

Άσκηση 2.2.7. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta \mu x \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x} \right) = 0$ (Μηδενική επί φραγμένη).

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε:

$$\left| \eta \mu x \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x} \right| = |\eta \mu x| \cdot \left| \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x} \right| \leq |\eta \mu x| \cdot 1.$$

$$\text{Δηλαδή } \left| \eta \mu x \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x} \right| \leq |\eta \mu x| \Leftrightarrow -|\eta \mu x| \leq \eta \mu x \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x} \leq |\eta \mu x|.$$

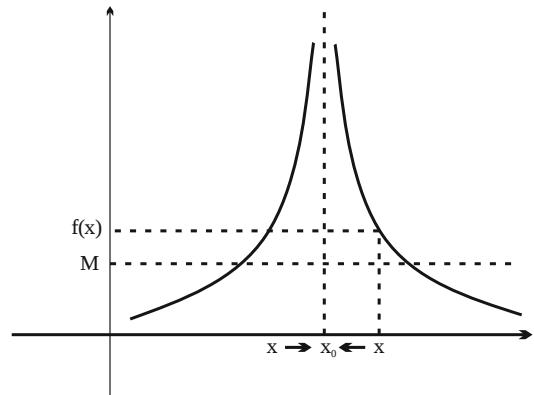
Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} (-|\eta \mu x|) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} |\eta \mu x|$, από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta \mu x \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x} \right) = 0$.

2.2. Μη πεπερασμένο όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

2.2.1. Γεωμετρική ερμηνεία

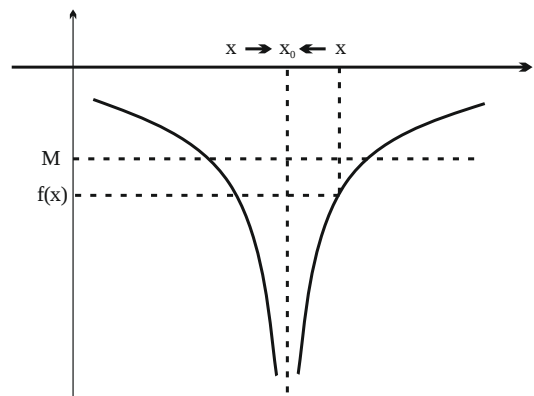
Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε, $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \in A$. Αν οι τιμές της f , καθώς το $x \rightarrow x_0$, μπορούν να γίνουν μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό M , τότε λέμε ότι η f έχει όριο στο x_0 το $+\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty.$$



Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε, $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \in A$. Αν οι τιμές της f , καθώς το $x \rightarrow x_0$, μπορούν να γίνουν μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό πραγματικό αριθμό M , τότε λέμε ότι η f έχει όριο στο x_0 το $-\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$



2.2.2. Βασικές ιδιότητες

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη τουλάχιστον σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$(1) \quad \text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty.$$

$$(2) \quad \text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty.$$

$$(3) \quad \text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \text{ τότε } f(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0, \text{ ενώ}$$

$$\text{αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \text{ τότε } f(x) < 0 \text{ κοντά στο } x_0.$$

$$(4) \quad \text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty, \text{ ενώ}$$

αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$.

(5) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

(6) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\begin{cases} f(x) > 0 & \text{ κοντά στο } x_0, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \\ f(x) < 0 & \text{ κοντά στο } x_0, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty \end{cases}$

(7) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.

(8) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$.

2.2.3. Βασικά όρια

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v}} = +\infty$, ($2v$ άρτιος) $v \in \mathbb{N}^*$,

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ δηλαδή το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει. Γενικότερα, ισχύει

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2v+1}} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v+1}} = -\infty$, $v \in \mathbb{N}$. Επομένως η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^{2v+1}}$, $v \in \mathbb{N}$,

δεν έχει όριο στο 0, εφόσον $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

2.2.4. Απροσδιόριστες μορφές

Υπάρχουν πράξεις ορίων οι οποίες δεν δίνουν **πάντα** το ίδιο αποτέλεσμα και για τον λόγο αυτό ονομάζονται **απροσδιόριστες μορφές**. Τέτοιες είναι οι $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (δηλ. όταν λέμε ότι έχουμε μορφή $\frac{0}{0}$ εννοούμε ότι έχουμε πηλίκο με το όριο του αριθμητή και του παρονομαστή να είναι μηδέν).

Σε τέτοιες περιπτώσεις για να βρούμε το όριο προσπαθούμε να άρουμε την απροσδιοριστία.

Γενικότερα για τα όρια ισχύουν οι εξής πράξεις:

(1) $a + (+\infty) = +\infty$ και $a + (-\infty) = -\infty$

$$(2) \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty \quad \text{και} \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

(3) η πράξη $(+\infty) + (-\infty) = +\infty - \infty$ δεν μπορεί να γίνει (απροσδιόριστη μορφή)

$$(4) \quad (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$(5) \quad \lambda \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \lambda > 0 \\ -\infty, & \lambda < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad \lambda \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \lambda > 0 \\ +\infty, & \lambda < 0 \end{cases}$$

(6) η πράξη $0 \cdot (\pm\infty)$ δεν μπορεί να γίνει (απροσδιόριστη μορφή)

$$(7) \quad \frac{\lambda}{\pm\infty} = 0 \quad \text{με} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ. Σε περίπτωση που έχουμε όριο της μορφής $\frac{a}{0}$, $a \neq 0$ και ο παρονομαστής αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 , τότε παίρνουμε πλευρικά όρια.

2.2.5. Πρόταση (Βασική άσκηση). Αν $f(x) \leq g(x)$ (I) κοντά στο x_0 και

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \quad \text{τότε και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty.$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty, \quad \text{τότε και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

Απόδειξη. (ΔΕ ΧΡΕΙΑΖΕΤΑΙ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ)

(1) Εφόσον $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ είναι $f(x) > 0$, κοντά στο x_0 και λόγω (I) έχουμε $g(x) > 0$. Συνεπώς, κοντά στο x_0 ισχύει

$$0 < f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{g(x)} \leq \frac{1}{f(x)}.$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$. Σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = 0 \quad \text{και συνεπώς} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty.$$

(2) Η απόδειξη είναι παρόμοια. $\square$

2.3. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 2.3.1. Να βρεθούν τα όρια:

$$(α) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x}{(x-1)^2}, \quad (β) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x}, \quad (γ) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2-1}{(x-1)^3}.$$

ΛΥΣΗ

(α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$. Επίσης $(x-1)^2 > 0$, για κάθε x κοντά στο 1.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} \left((2-x) \cdot \frac{1}{(x-1)^2} \right) = 1 \cdot (+\infty) = +\infty.$$

(β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} (x-3) = -3$ και $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Παρατηρούμε ότι το πρόσημο του παρονομαστή δεν είναι σταθερό. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

$$x > 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(x-3) \cdot \frac{1}{x} \right] = -3(+\infty) = -\infty$$

$$x < 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[(x-3) \cdot \frac{1}{x} \right] = -3(-\infty) = +\infty$$

Τελικά δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(γ) $\lim_{x \rightarrow 1} (\alpha x^2 - 1) = \alpha - 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^3 = 0$. Οπότε

♦ Αν $\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x+1) \frac{1}{(x-1)^2} \right] = 2 \cdot (+\infty) = +\infty$$

♦ Αν $\alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow 1} \left[(\alpha x^2 - 1) \frac{1}{(x-1)^3} \right] = \begin{cases} (\alpha - 1)(+\infty) = +\infty, & \text{αν } x > 1 \\ (\alpha - 1)(-\infty) = -\infty, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$ και

συνεπώς δεν υπάρχει το όριο.

♦ Αντίστοιχες πράξεις όταν $\alpha - 1 < 0$.

Άσκηση 2.3.2. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} (|x-2|f(x)) = 1$. Να βρεθούν τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 2f(x) + 5}{f^3(x) + 1}.$$

ΛΥΣΗ

Για $x \neq 2$ θέτουμε

$$|x-2|f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{g(x)}{|x-2|}.$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(g(x) \frac{1}{|x-2|} \right) = 1(+\infty) = +\infty$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{f^2(x)} \left[1 - \frac{2}{f(x)} + \frac{5}{f^2(x)} \right]}{\cancel{f^2(x)} \left[1 + \frac{1}{f^3(x)} \right]} = 0 \cdot \frac{1-0+0}{1+0} = 0.$$

Άσκηση 2.3.3. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ , να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \lambda x + \lambda}{|x - 2|}$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - \lambda x + \lambda}{|x - 2|}$, $x \neq 2$. Έχουμε

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - \lambda x + \lambda)}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[(x^2 - \lambda x + \lambda) \cdot \frac{1}{|x - 2|} \right] = (4 - \lambda) \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \lambda < 4 \\ -\infty, & \lambda > 4 \end{cases}$$

• Αν $\lambda = 4$, τότε είναι

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4x + 4)}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)^2}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|^2}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2} |x - 2| = 0.$$

Συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \lambda < 4 \\ -\infty, & \lambda > 4 \\ 0, & \lambda = 4 \end{cases}$$

Άσκηση 2.3.4. Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 + x - 2}{x^2 - x}$ να είναι πραγματικός αριθμός.

ΛΥΣΗ

Έστω $f(x) = \frac{\alpha x^2 + x - 2}{x^2 - x}$. Τότε κοντά στο 1 έχουμε:

$$f(x) \cdot (x^2 - x) = \alpha x^2 + x - 2.$$

Εφόσον είναι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot (x^2 - x)] = \lim_{x \rightarrow 1} (\alpha x^2 + x - 2) \Rightarrow \ell \cdot 0 = \alpha + 1 - 2 \Rightarrow \alpha = 1.$$

Επαλήθευση:

Για $\alpha = 1$ και για $x \neq 0, 1$ είναι $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)} = \frac{x+2}{x}$. Συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x} = \frac{3}{1} = 3 \in \mathbb{R}.$$

Άρα η τιμή $a = 1$ είναι δεκτή.

Άσκηση 2.3.5. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση, για την οποία ισχύει $f(x) \leq -\frac{1}{x}$, για $x > 0$.

Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ΛΥΣΗ

Κοντά στο 0^+ έχουμε:

$$f(x) \leq -\frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow -x \leq \frac{1}{f(x)} < 0.$$

Εφόσον $\lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} 0$, από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = 0$. Όμως $f(x) < 0$

και συνεπώς $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

Άσκηση 2.3.6. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 1$. Να υπολο-

γίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{f(x)}$.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $g(x) = x^2 f(x)$. Οπότε για $x \neq 0$ έχουμε $f(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. Συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((x-1) \cdot \frac{1}{f(x)} \right) = (-1) \cdot 0 = 0.$$

2.3. Όριο συνάρτησης στο άπειρο ($x \rightarrow \pm\infty$)

2.3.1. Γνωστά όρια

(1) Για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\lambda = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\lambda} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\lambda} = 0$.

(2) Για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } v \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } v \text{ περιττός} \end{cases}$.

(3) Για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^v} = 0$.

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^\lambda) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 0 \\ -\infty, & \text{αν } a < 0 \end{cases}, \lambda > 0$.

(5) Αν v άρτιος, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^v) = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } a < 0 \\ +\infty, & \text{αν } a > 0 \end{cases}$

και αν v περιττός $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^v) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a < 0 \\ -\infty, & \text{αν } a > 0 \end{cases}$.

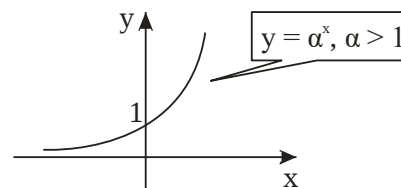
(6) Αν $f(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και $a_v \neq 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_v x^v)$.

(7) Αν $f(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$, και $g(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$, με $a_v \neq 0$ και $\beta_\mu \neq 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_v x^v}{\beta_\mu x^\mu}$.

(8) Για την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, ισχύουν τα εξής:

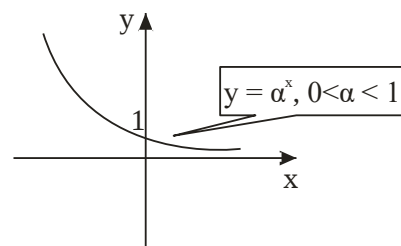
• Αν $a > 1$, τότε:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$



• Αν $0 < a < 1$, τότε:

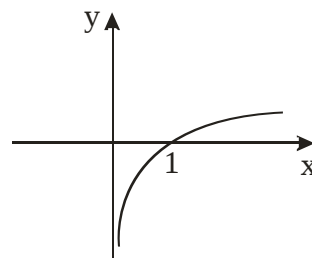
$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$



(9) Για τη λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log x$, $x > 0$ ή $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$



2.3.2. Παρατηρήσεις.

- (1) Το κριτήριο παρεμβολής ισχύει και σε αυτή την κατηγορία των ορίων.
 (2) Δεν ορίζονται τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta\mu x, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sigma\upsilon\nu x, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \epsilon\phi x, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sigma\phi x.$$

2.3.3. Τριγωνομετρικά όρια στο $\pm\infty$. Ισχύουν τα παρακάτω:

- (1) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0.$
 (2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 1.$

Απόδειξη (ΑΠΑΙΤΕΙΤΑΙ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ)

- (1) Εφόσον $x \rightarrow \pm\infty$ είναι $x \neq 0$. Οπότε

$$\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|x|} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) = 0 \end{array} \right\}, \text{ από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.$$

Θέτω $\frac{1}{x} = u$ επειδή $x \rightarrow \pm\infty$, $u \rightarrow 0$ άρα το παραπάνω όριο γίνεται $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$

2.4. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 2.4.1. Να βρείτε τα όρια (α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - |x^3 - x - 1|)$ (β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu \frac{2x-1}{x^2+1}.$

ΛΥΣΗ

(α) Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ είναι $x^3 - x - 1 > 0$ για $x \rightarrow +\infty$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - |x^3 - x - 1|) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x - (x^3 - x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$

(β) Έστω $u = \frac{2x-1}{x^2+1}$. Τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu \frac{2x-1}{x^2+1} = \lim_{u \rightarrow 0} \eta\mu u = \eta\mu 0 = 0.$$

Άσκηση 2.4.2. Να βρεθούν τα όρια :

$$(α) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+2} \right), \quad (β) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+2} \right).$$

ΛΥΣΗ

(α) Με ιδιότητες ορίων έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+2} \right) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$ διότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2+x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ άρα και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x+1} = +\infty \text{ (ομοίως η δεύτερη ρίζα).}$$

(β) Με ιδιότητες έχουμε απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) - (+\infty)$. Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+2} \right) \left(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+2} \right)}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+2}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + x + 1 - \cancel{x^2} - 2}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \right)} = \frac{1-0}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.4.3. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^{x+1}}{2^{x+1} + 3^x}$.

ΛΥΣΗ

$$\text{Έχουμε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^{x+1}}{2^{x+1} + 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3 \cdot 3^x}{2 \cdot 2^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \left(\frac{2^x}{3^x} + 3 \right)}{3^x \left(2 \frac{2^x}{3^x} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^x + 3}{2 \left(\frac{2}{3} \right)^x + 1} = \frac{0+3}{2 \cdot 0 + 1} = 3$$

$$\text{Διότι } 0 < \frac{2}{3} < 1, \text{ οπότε και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^x = 0.$$

Άσκηση 2.4.4. Αν $f(x) = \frac{\alpha^{x+2} + 2^x}{\alpha^x + 2^{x+1}}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ όταν $\alpha > 0$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $f(x) = \frac{\alpha^{x+2} + 2^x}{\alpha^x + 2^{x+1}} = \frac{\alpha^2 \cdot \alpha^x + 2^x}{\alpha^x + 2 \cdot 2^x}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

♦ Αν $0 < \alpha < 2$ τότε $0 < \frac{\alpha}{2} < 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right)^x + 1}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^x + 2} = \frac{1}{2}$ αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^x = 0$.

♦ Αν $\alpha = 2$ τότε $f(x) = \frac{2^{x+2} + 2^x}{2^x + 2^{x+1}} = \frac{4 \cdot 2^x + 2^x}{2^x + 2 \cdot 2^x} = \frac{5 \cdot 2^x}{3 \cdot 2^x} = \frac{5}{3}$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$.

♦ Αν $\alpha > 2$ τότε $\frac{2}{\alpha} < 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^2 + \left(\frac{2}{\alpha}\right)^x}{1 + 2\left(\frac{2}{\alpha}\right)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^2 = \alpha^2$ αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^x = 0$.

Άσκηση 2.4.5. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - \eta\mu x}{x^2 + \sigma\upsilon\nu x}$.

ΛΥΣΗ

Έστω $f(x) = \frac{2x^2 - \eta\mu x}{x^2 + \sigma\upsilon\nu x}$. Επειδή για $x > 1$ είναι $x^2 > 1 \Leftrightarrow x^2 + \sigma\upsilon\nu x > 1 + \sigma\upsilon\nu x \geq 0$. Συνεπώς

$(1, +\infty) \subseteq D_f$ και επομένως έχει έννοια το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Έχουμε:

$$f(x) = \frac{x^2 \left(2 - \frac{\eta\mu x}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right)} = \frac{2 - \frac{\eta\mu x}{x^2}}{1 + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}}.$$

Είναι $\left|\frac{\eta\mu x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\eta\mu x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ και $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

Αλλά $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ και σύμφωνα με το κρ. παρεμβ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} = 0$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

Άσκηση 2.4.6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left[\ln(1+2^x) - \ln(1+3^x)\right]$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ΛΥΣΗ

Επειδή $1+2^x > 0$ και $1+3^x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $D_f = \mathbb{R}$.

Έχουμε $f(x) = \ln \frac{1+2^x}{1+3^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Θέτουμε $u = \frac{1+2^x}{1+3^x} > 0$. Τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2^x}{1+3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \left[\left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x \right]}{3^x \left[\left(\frac{1}{3}\right)^x + 1 \right]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x}{\left(\frac{1}{3}\right)^x + 1} = 0,$

αφού $0 < \frac{1}{3} < 1$, $0 < \frac{2}{3} < 1$, άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$.

Επομένως $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln u = -\infty$.

Άσκηση 2.4.7. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x} + \frac{2}{x}}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

ΛΥΣΗ

Έστω $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x} + \frac{2}{x}}{\sqrt{x^2+1}-x}$. Είναι $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$ άρα $\sqrt{x^2+1}-x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε $D_f = \mathbb{R}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\eta\mu \frac{1}{x} + \frac{2}{x}}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{\left(\eta\mu \frac{1}{x} + \frac{2}{x}\right)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)} = \frac{\left(\eta\mu \frac{1}{x} + \frac{2}{x}\right)\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x\right)}{(x^2+1)-x^2} = \\ &= \left(\eta\mu \frac{1}{x} + \frac{2}{x}\right)\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x\right) \end{aligned}$$

Αφού αναζητούμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, περιορίζουμε την f σε διάστημα $(\alpha, +\infty)$, με $\alpha > 0$. Τότε $x > 0$,

οπότε $|x| = x$ και συνεπώς

$$f(x) = \left(\eta\mu \frac{1}{x} + \frac{2}{x}\right)x \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right) = \left(x\eta\mu \frac{1}{x} + 2\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right).$$

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x\eta\mu \frac{1}{x} + 2\right) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} + 2\right) \left(\sqrt{1+\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}}+1\right) = \left(\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu u}{u} + 2\right) 2 = (1+2)2 = 6.$$

Άσκηση 2.4.8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x^3 - 2x + 3| + x - 1}{x^4 + 2x + 2}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ΛΥΣΗ

- Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$, υπάρχει $\alpha < 0$, τέτοιο ώστε $x^3 - 2x + 3 < 0$, για κάθε $x < \alpha$.
- Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 2x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$, υπάρχει $\beta < 0$, τέτοιο ώστε $x^4 + 2x + 2 > 0$ για κάθε $x < \beta$. Έστω $\kappa = \min\{\alpha, \beta\}$. Περιορίζοντας την f στο διάστημα $(-\infty, \kappa)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^3 - 2x + 3| + x - 1}{x^4 + 2x + 2} \stackrel{x < \kappa}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 + 2x - 3 + x - 1}{x^4 + 2x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 + 3x - 4}{x^4 + 2x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^4} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.4.9. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 f(x) - 2x^2 + 1}{x^2 + 2} = 3.$$

Να υπολογίσετε τα όρια

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \qquad (\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3xf(x) + 1}{2x + 1}$$

ΛΥΣΗ

Έστω $\frac{x^2 f(x) - 2x^2 + 1}{x^2 + 2} = g(x)$. Τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$.

$$x^2 f(x) - 2x^2 + 1 = (x^2 + 2)g(x) \Leftrightarrow x^2 f(x) = (x^2 + 2)g(x) + 2x^2 - 1$$

$$\stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} f(x) = \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)g(x) + 2 - \frac{1}{x^2}$$

$$(\alpha) \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 \cdot 3 + 2 = 5$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3xf(x) + 1}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[3f(x) + \frac{1}{x} \right]}{x \left(2 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3f(x) + \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2}.$$

Άσκηση 2.4.10. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία είναι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$. Να υπολογίσετε τα όρια

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) + f(x) + 1}{f^3(x) - f(x) - 2}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{f^2(x) + 1} + f(x) \right)$$

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $y = f(x)$ και εφόσον $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) + f(x) + 1}{f^3(x) - f(x) - 2} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{2y^2 + y + 1}{y^3 - y - 2} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{2y}{y^3} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{2}{y^2} = 0.$$

$$\begin{aligned} \beta) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{f^2(x) + 1} + f(x) \right) &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{y^2 + 1} + y \right) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y^2 + 1 - y^2}{\sqrt{y^2 + 1} - y} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{|y| \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} - y} \\ &= \lim_{\substack{y < 0 \\ y \rightarrow -\infty}} \frac{1}{-y \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} - y} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} - 1} \right) = 0 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

2.4. Συνέχεια συνάρτησης σε σημείο

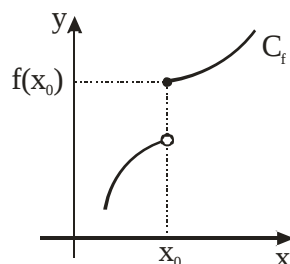
2.4.1. Ορισμός. Μια συνάρτηση f καλείται *συνεχής σ' ένα σημείο x_0* του πεδίου ορισμού της, αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

2.4.2. Παρατήρηση

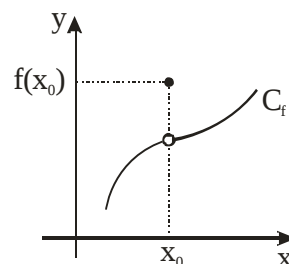
Μια συνάρτηση f ΔΕΝ είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

(α) Αν δεν υπάρχει το όριο της f όταν $x \rightarrow x_0$.

(β) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, αλλά δεν είναι ίσο με το $f(x_0)$.



(α) περίπτωση



(β) περίπτωση

(γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$.

2.4.3. Παρατήρηση.

Αν η συνάρτηση ορίζεται δεξιά και αριστερά από το x_0 , τότε είναι συνεχής στο x_0 , αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

2.4.4. Παράδειγμα. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f , με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \eta \mu x, & x \leq 0 \\ \sigma \upsilon \nu^2 x - 1, & x > 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής, στο $x_0 = 0$.

Λύση. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x \cdot \eta \mu x) = 0 \cdot \eta \mu 0 = 0$ και

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sigma \upsilon \nu^2 x - 1) = \sigma \upsilon \nu^2 0 - 1 = 1 - 1 = 0$. Επίσης $f(0) = 0 \cdot \eta \mu 0 = 0$.

Εφόσον $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Δεν έχει νόημα να εξετάσουμε την συνέχεια μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της, διότι μπορεί να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ αλλά δεν υπάρχει η τιμή $f(x_0)$.

2.4.5. Ορισμός. Μία συνάρτηση f καλείται *συνεχής* σ' ένα υποσύνολο A , του πεδίου ορισμού της, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A . Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε καλείται απλά συνεχής.

2.4.6. Ορισμός. Η f καλείται συνεχής σ' ένα διάστημα (α, β) , αν είναι συνεχής σε κάθε εσωτερικό σημείο του (α, β) . Η f καλείται συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$.

2.4.7. Βασικές συνεχείς συναρτήσεις

Οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:

(1) $f(x) = c$ (σταθερή)

$$(2) \quad f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad (\text{πολυωνυμική})$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad (\text{ρητή, με } p(x) \text{ και } q(x) \text{ πολυώνυμα})$$

$$(4) \quad \eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x, \epsilon\phi x, \sigma\phi x \quad (\text{τριγωνομετρικές})$$

$$(5) \quad a^x \text{ με } a > 0, a \neq 1 \quad (\text{εκθετική})$$

$$(6) \quad \log x \text{ και } \ln x, x > 0. \quad (\text{λογαριθμική})$$

2.4.8. Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

- Αν f, g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε και οι συναρτήσεις $f + g, f - g, f \cdot g, c \cdot f, c \in \mathbb{R}, \frac{f}{g}$ με $g(x_0) \neq 0, |f|, \sqrt[k]{f}$ με $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 και $k \in \mathbb{N}$, είναι συνεχείς στο x_0 .
- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η συνάρτηση $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

2.5. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 2.5.1. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = \begin{cases} \alpha x - 1, & x < 0 \\ x^2 - \beta x + \alpha, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2e^{x-1} - \alpha x + \beta + 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $D_f = (-\infty, 0) \cup [0, 1] \cup [1, +\infty) = \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, 1)$ ως πολυωνυμική. Επίσης η f είναι συνεχής στο διάστημα $(1, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Για να είναι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ πρέπει να είναι συνεχής στα σημεία $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$.

- Η f είναι συνεχής στο $x_1 = 0$ αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ (1)

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x - 1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - \beta x + \alpha) = \alpha, \text{ και } f(0) = \alpha, \text{ άρα από (1) έχουμε } \alpha = -1.$$

- Η f είναι συνεχής στο $x_2 = 1$ αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ (2)

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - \beta x + \alpha) = 1 - \beta + \alpha \stackrel{\alpha=-1}{=} -\beta$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2e^{x-1} + x + \beta + 1) = 2e^0 + 1 + \beta + 1 = 2 + 1 + \beta + 1 = \beta + 4 \text{ και } f(1) = \beta + 4.$$

Άρα από (2) έχουμε $-\beta = \beta + 4 \Leftrightarrow \beta = -2$.

Άσκηση 2.5.2. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με την ιδιότητα

$$f^2(x) + g^2(x) - 2xf(x) - 2g(x)\eta\mu x \leq 2x\eta\mu x \quad (1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς στο $x_0 = 0$.

ΛΥΣΗ

Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$.

- Από την (1) για $x = 0$ έχουμε

$$f^2(0) + g^2(0) \leq 0 \Leftrightarrow f^2(0) + g^2(0) = 0 \text{ ή } f^2(0) + g^2(0) < 0.$$

$$\text{Εφόσον } f^2(0) + g^2(0) \geq 0 \text{ είναι } f^2(0) + g^2(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = g(0) = 0.$$

- Επίσης η (1) γράφεται διαδοχικά

$$f^2(x) + g^2(x) - 2xf(x) - 2g(x)\eta\mu x \leq 2x\eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) - 2xf(x) + x^2 - x^2 + g^2(x) - 2g(x)\eta\mu x + \eta\mu^2 x - \eta\mu^2 x \leq 2x\eta\mu x$$

$$(f(x) - x)^2 + (g(x) - \eta\mu x)^2 \leq 2x\eta\mu x + \eta\mu^2 x + x^2 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - x)^2 + (g(x) - \eta\mu x)^2 \leq (\eta\mu x + x)^2$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - x)^2 + (g(x) - \eta\mu x)^2] \leq \lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x + x)^2 \text{ ή}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - x)^2 + \lim_{x \rightarrow 0} (g(x) - \eta\mu x)^2 \leq 0, \text{ άρα}$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - x) \right]^2 = 0 \text{ και } \left[\lim_{x \rightarrow 0} (g(x) - \eta\mu x) \right]^2 = 0 \text{ ή}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} (g(x) - \eta\mu x) = 0 \text{ ή}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu x = 0 \text{ ή}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0).$$

Άσκηση 2.5.3. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0 = 0$, για την οποία ισχύει:

$$\sqrt{9 - x^4} \eta \mu \frac{1}{x} \leq 3 + x^2 f(x) \leq \sqrt{9 + x^6} \quad (1)$$

για κάθε $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Να βρείτε το $f(0)$.

ΛΥΣΗ

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ θα ισχύει $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (2)

- Η (1), για $x \neq 0$, γράφεται

$$\sqrt{9 - x^4} \eta \mu \frac{1}{x} - 3 \leq x^2 f(x) \leq \sqrt{9 + x^6} - 3 \stackrel{x^2 > 0}{\Leftrightarrow} \frac{\sqrt{9 - x^4} \eta \mu \frac{1}{x} - 3}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{9 + x^6} - 3}{x^2} \quad (3)$$

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 - x^4} \eta \mu \frac{1}{x} - 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^4 \eta \mu \frac{1}{x}}{x^2 \left(\sqrt{9 - x^4} \eta \mu \frac{1}{x} + 3 \right)} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta \mu \frac{1}{x}}{\sqrt{9 - x^4} \eta \mu \frac{1}{x} + 3} = \frac{0}{6} = 0,$$

$$\text{διότι } \left| x^2 \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq |x^2| = x^2 \text{ και } \left| x^4 \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq |x^4| = x^4 \Leftrightarrow$$

$$-x^2 \leq x^2 \eta \mu \frac{1}{x} \leq x^2 \text{ και } -x^4 \leq x^4 \eta \mu \frac{1}{x} \leq x^4. \text{ Από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \eta \mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{x^2 \left(\sqrt{9 + x^6} + 3 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\sqrt{9 + x^6} + 3} = \frac{0}{6} = 0.$$

Άρα από (3) και κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Τέλος από (2) έχουμε $f(0) = 0$.

Άσκηση 2.5.4. Να μελετήσετε, ως προς την συνέχεια, τη συνάρτηση $f(x) = \ln(\sqrt{\eta \mu^2 x + 2})$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$g(x) = \ln x, \quad h(x) = \sqrt{x}, \quad s(x) = x^2 + 2, \quad q(x) = \eta \mu x,$$

οι οποίες είναι συνεχείς. Παρατηρούμε ότι

$$f(x) = g(h(s(q(x)))).$$

Δηλαδή $f = q \circ s \circ h \circ g$. Συνεπώς η f , ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής.

2.5. Βασικά θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων.

2.5.1. Θεώρημα Bolzano. (Bernard Bolzano* 1781 – 1848)

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $[α,β]$. Αν

α) η f είναι συνεχής στο $[α,β]$

β) $f(α) \cdot f(β) < 0$,

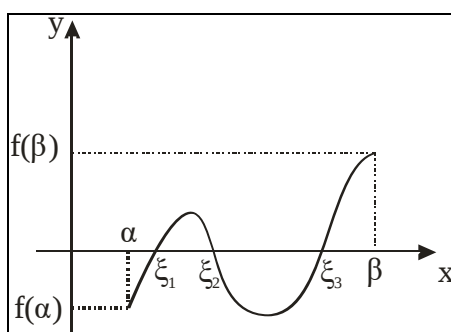
τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (α,β)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.



* Ο Bolzano (Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano) γεννήθηκε στην Πράγα (τότε Βασίλειο της Βοημίας – σήμερα Τσεχία) από Ιταλό πατέρα και Γερμανίδα μητέρα. Εισήχθη, στο πανεπιστήμιο της Πράγας και σπούδασε Μαθηματικά, Φιλοσοφία, Φυσική και Θεολογία. Έγινε καθολικός ιερέας και δίδαξε στο ίδιο πανεπιστήμιο. Ο έντονος αντιμιλιταριστικός του αγώνας του στοίχισε, τελικά, την ακαδημαϊκή καριέρα. Άφησε πλούσιο επιστημονικό έργο.

2.5.2. Γεωμετρική ερμηνεία.

Αν ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος Bolzano τότε η γραφική παράσταση της f τέμνει σε ένα, τουλάχιστον, σημείο τον x 'x, εντός του διαστήματος $(α,β)$.



2.5.3. ΠΡΟΣΟΧΗ

- (1) Το θεώρημα Bolzano εξυπηρετεί στο να διαπιστώσουμε αν μια εξίσωση έχει ρίζα σε ένα συγκεκριμένο διάστημα. **Δεν μας δείχνει τη ρίζα ή το πλήθος των ριζών της εξίσωσης.** Δηλαδή αν ισχύουν οι υποθέσεις του θ. Bolzano σ' ένα διάστημα $[α,β]$, τότε δεν αποκλείεται η f να έχει περισσότερες από μία ρίζες στο $(α,β)$ (βλ. παραπάνω σχήμα).
- (2) Αν δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano για την f στο $(α,β)$ δεν σημαίνει ότι η f αποκλείεται να έχει ρίζα στο $(α,β)$.

π.χ. η συνάρτηση $f(x) = x^2$ η οποία έχει ρίζα το 0 αλλά δεν υπάρχει διάστημα στο οποίο να εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano.

- (3) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δεν έχει ρίζα στο Δ (δηλαδή $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$), τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ .

2.5.4. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

- (1) Όταν ζητείται να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

βήμα 1^ο: κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, εάν η εξίσωση δεν ορίζεται στο διάστημα $[a, b]$ που ψάχνουμε για ρίζα,

βήμα 2^ο: φέρνουμε όλους τους όρους στο 1^ο μέλος της εξίσωσης,

βήμα 3^ο: θέτουμε το 1^ο μέλος με βοηθητική συνάρτηση,

βήμα 4^ο: εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano για την f , ελέγχοντας αν ισχύουν και οι δύο προϋποθέσεις. (βλέπε Παράδειγμα 2.5.5).

- (2) Αν κατά την εφαρμογή του Bolzano προκύψει $f(a) \cdot f(b) \leq 0$, τότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Μία για $f(a) \cdot f(b) < 0$ και μία για $f(a) \cdot f(b) = 0$.

- (3) Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον n ρίζες, αρκεί να εφαρμόσουμε το θ. Bolzano σε n κατάλληλα διαστήματα ξένα μεταξύ τους.

- (4) Όταν ζητείται να δείξουμε ότι μια συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάποιο διάστημα (a, b) , χρησιμοποιούμε την «εις άτοπο απαγωγή». Δηλαδή υποθέτουμε ότι η f δε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (a, b) . Άρα θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a, b)$ με $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$.

Από το συμπέρασμα του θεωρήματος Bolzano για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x_1, x_2]$, καταλήγουμε σε άτοπο. Συνεπώς η f διατηρεί σταθερό πρόσημο. (βλέπε Παράδειγμα 2.5.7)

- (5) ΣΥΧΝΕΣ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ:

«τουλάχιστον μια ρίζα» = το λιγότερο μία ρίζα = $\{1, 2, 3 \dots \text{ρίζες}\}$

«το πολύ μία ρίζα» = μέχρι μία ρίζα = $\{0 \text{ ή } 1 \text{ ρίζα}\}$

«μόνο μία ρίζα» = «μοναδική ρίζα» = ακριβώς μία ρίζα = $\{1 \text{ ρίζα}\}$

2.5.5. Παράδειγμα. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta \mu x = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 1)$.

Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται $\eta \mu x - x = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x - x$, η οποία είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε:

$$f(-1) = \eta \mu(-1) - (-1) = -\eta \mu 1 + 1 > 0 \text{ και } f(1) = \eta \mu 1 - 1 < 0.$$

Δηλαδή $f(-1) \cdot f(1) < 0$ και συνεπώς από το θ. Bolzano υπάρχει, τουλάχιστον, ένα $x_0 \in (-1,1)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή $\eta\mu x_0 = x_0$.

2.5.6. Σημείωση.

Το Παράδειγμα 2.5.5 μπορεί να δοθεί επίσης με μια από τις παρακάτω εκφωνήσεις:

- (1) Έστω συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x - x$. Να αποδειχθεί ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$, σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $(-1,1)$.
- (2) Έστω συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x - x$. Να αποδείξετε ότι η f παίρνει την τιμή 0 για ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,1)$.
- (3) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $\eta\mu \xi = \xi$.
- (4) Έστω συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x - x$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$.
- (5) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = x$, έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(-1,1)$.

2.5.7. Παράδειγμα. Έστω f συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $x^2 + f^2(x) = 1$, για κάθε $x \in [-1,1]$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(-1,1)$.

Έστω ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,1)$. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-1,1)$, με $x_1 \neq x_2$ στα οποία η συνάρτηση f παρουσιάζει ετερόσημες τιμές. Δηλαδή $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$. Αν $x_1 < x_2$, τότε η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2] \subseteq (-1,1)$. Επομένως ισχύει για την f το θ. Bolzano και άρα υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Εφόσον $x_0 \in (x_1, x_2)$ έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} x_0^2 + [f(x_0)]^2 = 1 \\ \text{με } f(x_0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_0^2 = 1 \Rightarrow x_0 = \pm 1.$$

Άτοπο, αφού $x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq (-1,1)$. Άρα η f δεν έχει ρίζα στο $(-1,1)$ και συνεπώς διατηρεί πρόσημο στο $(-1,1)$.

2.5.8. Παρατηρήσεις.

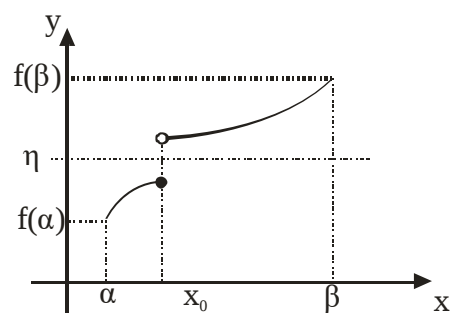
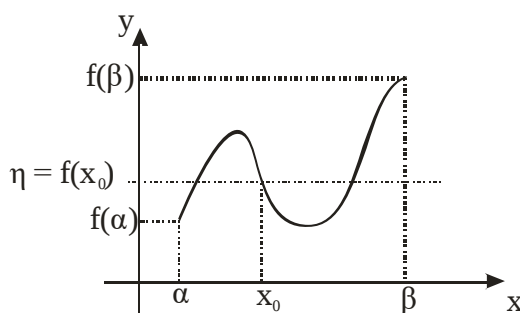
- (1) Εάν δεν δίνεται διάστημα για να εφαρμόσουμε το θεώρημα Bolzano τότε με κατάλληλες επιλογές δημιουργούμε μόνοι μας ένα διάστημα (α, β) , βάζοντας τιμές στον τύπο της συνάρτησης έτσι ώστε $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.
- (2) Η μοναδικότητα της ρίζας ελέγχεται με την υπόθεση ότι έχουμε δυο ρίζες και με πράξεις καταλήγουμε σε άτοπο.
- (3) Επίσης αν η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη (άρα και 1-1) η ρίζα είναι μοναδική.
- (4) Αν δεν μπορούμε άμεσα να βρούμε το πρόσημο, τότε υπολογίζουμε το γινόμενο και βρίσκουμε το αρνητικό πρόσημο μετά από πράξεις.
- (5) Μία συνεχής συνάρτηση κρατάει σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα διάστημα που ορίζουν δύο διαδοχικές της ρίζες.

2.5.9. Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών (ΘΕΤ)

Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $[a, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

τότε για κάθε αριθμό η ανάμεσα στους $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει, τουλάχιστον, ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \eta$.



Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε δεν είναι υποχρεωτικό να παίρνει ως τιμή της κάθε αριθμό κ που βρίσκεται μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

2.5.10. Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[a, b]$, τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[a, b]$.

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, b]$, τέτοια ώστε:

$$\left. \begin{array}{l} f(x_1) = m \leq f(x) \\ f(x_2) = M \geq f(x) \end{array} \right\}, \text{ για κάθε } x \in [a, b].$$

Επομένως,

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ για κάθε } x \in [a, b].$$

2.5.11. Παρατηρήσεις.

- (1) Αν η f δεν είναι συνεχής στο Δ ή αν το Δ δεν είναι κλειστό τότε δεν είναι απαραίτητο η f να έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή στο Δ .
- (2) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα. Όχι απαραίτητα ίδιου τύπου με το διάστημα Δ .
- (3) Σύμφωνα με το *Θεώρημα 2.5.10*, η εικόνα ενός κλειστού διαστήματος μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι επίσης κλειστό διάστημα.

2.5.12. Σύνολο τιμών διαστήματος

Βασική προϋπόθεση η f να είναι συνεχής σε κάθε διάστημα.

	$[a, b]$	$(a, b]$	$[a, b)$	(a, b)
$f \%$	$[f(a), f(b)]$	$\left(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b) \right]$	$\left[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right)$	$\left(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right)$
$f \&$	$[f(b), f(a)]$	$\left[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right)$	$\left(\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a) \right]$	$\left(\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right)$

Τα a και b μπορεί να είναι κάποιο από τα $+\infty$ ή $-\infty$.

2.6. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 2.6.1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ και $g(x) = -x^2 + \beta x + \gamma$, με $\gamma \neq 0$.

Αν ρ_1 είναι ρίζα της f και ρ_2 ρίζα της g με $\rho_1 < \rho_2$ τότε, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + 2g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) + 2g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .

Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως πολυωνυμικές. Επομένως η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Αφού ρ_1, ρ_2 ρίζες των f, g αντίστοιχα, θα έχουμε:

$$f(\rho_1) = 0 \Leftrightarrow \rho_1^2 + \beta\rho_1 + \gamma = 0 \quad (\text{I}) \text{ και}$$

$$g(\rho_2) = 0 \Leftrightarrow -\rho_2^2 + \beta\rho_2 + \gamma = 0 \quad (\text{II})$$

είναι $\rho_1 \neq 0$ και $\rho_2 \neq 0$, διότι αν $\rho_1 = 0$ ή $\rho_2 = 0$, από (I) και (II) θα είχαμε $\gamma = 0$, άτοπο.

Έχουμε:

$$h(\rho_1) = f(\rho_1) + 2g(\rho_1) = 2g(\rho_1) = 2(-\rho_1^2 + \beta\rho_1 + \gamma) \stackrel{(1)}{=} 2(-\rho_1^2 - \rho_1^2) = -4\rho_1^2 < 0$$

$$h(\rho_2) = f(\rho_2) + 2g(\rho_2) = f(\rho_2) = \rho_2^2 + \beta\rho_2 + \gamma \stackrel{(2)}{=} \rho_2^2 + \rho_2^2 = 2\rho_2^2 > 0$$

Επομένως $h(\rho_1) \cdot h(\rho_2) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .

Άσκηση 2.6.2. Θεωρούμε την εξίσωση $x^5 - x^4 + x^2 - 2x + 1 = 0$. Να αποδείξετε ότι:

- (α) έχει ακριβώς μία ακεραία ρίζα,
 (β) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

ΛΥΣΗ

(α) Η δοθείσα εξίσωση είναι πολυωνυμική, με ακεραίους συντελεστές. Άρα, αν έχει ακέραιες ρίζες αυτές θα διαιρούν το σταθερό όρο 1. Οι διαιρέτες του 1 είναι οι -1 και 1 . Παρατηρούμε ότι:

$$(-1)^5 - (-1)^4 + (-1)^2 - 2(-1) + 1 = -1 - 1 + 1 + 2 + 1 = 2 \neq 0$$

$$\text{και } 1^5 - 1^4 + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0.$$

Άρα μοναδική ακεραία ρίζα της εξίσωσης είναι ο 1.

(β) Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = x^5 - x^4 + x^2 - 2x + 1$. Από το (α) ερώτημα το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x - 1$. Κάνουμε Horner για να βρούμε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x - 1)$.

1	-1	0	1	-2	1	1
	1	0	0	1	-1	
1	0	0	1	-1	0	

Συνεπώς

$$P(x) = (x-1)(x^4 + x - 1).$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι το πολυώνυμο $x^4 + x - 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$. Θεωρούμε συνάρτηση g , με τύπο $g(x) = x^4 + x - 1$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως πολυωνυμική.

Επίσης

$$g(0) = -1 \text{ και } g(1) = 1.$$

Αρα $g(0) \cdot g(1) < 0$ και συνεπώς ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για την g στο $[0,1]$. Συνεπώς, η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

Άσκηση 2.6.3. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[0,4]$ με $f(0) = f(4)$.

Έστω, επίσης, συνάρτηση g , με τύπο $g(x) = f(x) - f(x+2)$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g .

(β) Να αποδείξετε ότι γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο του $[0,2]$.

ΛΥΣΗ

(α) Πρέπει $x+2 \in [0,4] \Leftrightarrow 0 \leq x+2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$. Όμως $x \in [0,4] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$. Επομένως $0 \leq x \leq 2$. Άρα $D_g = [0,2]$.

(β) Η συνάρτηση $f(x+2)$ είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και άρα η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0,2]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Έχουμε $g(0) = f(0) - f(2)$ και $g(2) = f(2) - f(4) = f(2) - f(0) = -(f(0) - f(2))$.

Οπότε $g(0)g(2) = -(f(0) - f(2))^2 \leq 0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1^η: Αν $g(0)g(2) = 0 \Leftrightarrow g(0) = 0$ ή $g(2) = 0$, τότε $x = 0$ ή $x = 2$ και συνεπώς η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες 0 και 2.

2^η: Αν $g(0) \cdot g(2) < 0$, τότε σύμφωνα με το θ. Bolzano, η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο του διαστήματος $[0, 2]$.

Άσκηση 2.6.4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_v \neq 0$, με $v \in \mathbb{N}^*$ περιττό. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$ (Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{R}$).

ΛΥΣΗ

Έστω $a_v > 0$, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_v x^v) = +\infty.$$

Επομένως υπάρχει διάστημα $(\alpha, +\infty)$, με $\alpha > 0$, όπου $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, +\infty)$. Άρα υπάρχει $\kappa \in (\alpha, +\infty)$, τέτοιο ώστε $f(\kappa) > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_v x^v) = -\infty.$$

Επομένως υπάρχει διάστημα $(-\infty, \beta)$, με $\beta < 0$, όπου $f(x) < 0$, για κάθε $x \in (-\infty, \beta)$. Άρα υπάρχει $\lambda \in (-\infty, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(\lambda) < 0$.

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\lambda, \kappa]$ ως πολυωνυμική και ισχύει $f(\lambda) \cdot f(\kappa) < 0$. Επομένως από το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(\lambda, \kappa) \subseteq \mathbb{R}$.

Ομοίως αν $a_v < 0$.

Άσκηση 2.6.5. Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως αύξουσα, για την οποία ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \gamma \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \delta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός θετικός x_0 , τέτοιος ώστε

$$f(x_0) + e^{x_0+1} + \ln x_0 = 1.$$

ΛΥΣΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) + e^{x+1} + \ln x = 1$ ή ισοδύναμα η εξίσωση

$$f(x) + e^{x+1} + \ln x - 1 = 0,$$

έχει μοναδική θετική ρίζα. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) + e^{x+1} + \ln x - 1$, $x > 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x) + e^{x+1} + \ln x - 1] = \gamma + e + (-\infty) - 1 = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + e^{x+1} + \ln x - 1] = \delta + (+\infty) + (+\infty) - 1 = +\infty.$$

Έστω $x_1, x_2 > 0$, με $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$, εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow e^{x_1+1} < e^{x_2+1}$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2$$

Με πρόσθεση των ανισοτήτων κατά μέλη βρίσκουμε:

$$f(x_1) + e^{x_1+1} + \ln x_1 - 1 < f(x_2) + e^{x_2+1} + \ln x_2 - 1 \text{ ή } g(x_1) < g(x_2).$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και αφού είναι και συνεχής (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων) το σύνολο τιμών της είναι:

$$g((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Επειδή $0 \in g((0, +\infty)) = \mathbb{R}$ υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$. Δηλαδή η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, +\infty)$ και αφού η g είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Άσκηση 2.6.6. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$.

(α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στα διαστήματα

$$\left[1, \frac{3}{2}\right] \text{ και } \left[\frac{3}{2}, 2\right].$$

(β) Με την βοήθεια του ερωτήματος (1), να δικαιολογήσετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ ανήκει στο διάστημα

$$\left(1, \frac{3}{2}\right), \text{ ενώ ο } \sqrt{3} \text{ στο διάστημα } \left(\frac{3}{2}, 2\right).$$

ΛΥΣΗ

(α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, επομένως και στα διαστήματα

$$\left[1, \frac{3}{2}\right] \subseteq \mathbb{R} \text{ και } \left[\frac{3}{2}, 2\right] \subseteq \mathbb{R}. \text{ Είναι } f(1) = 1 \neq \frac{9}{4} = f\left(\frac{3}{2}\right) \text{ και } f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \neq 4 = f(2). \text{ Επομένως}$$

ισχύει το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών f σε καθένα από τα παραπάνω διαστήματα.

(β) Από το (α) προκύπτει ότι η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ $f(1) = 1$ και $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$ δηλαδή η

f παίρνει όλες τις τιμές στο διάστημα $\left(1, \frac{9}{4}\right)$. Επειδή $2 \in \left(1, \frac{9}{4}\right)$ υπάρχει $x_0 \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$, τέτοιο

ώστε $f(x_0) = 2 \Leftrightarrow x_0^2 = 2 \Leftrightarrow x_0 = \sqrt{2}$, αφού $x_0 > 0$. Άρα $\sqrt{2} \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$.

Ομοίως δείχνουμε ότι $\sqrt{3} \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

Άσκηση 2.6.7. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \ln(x^2 - 1)$.

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- (β) Να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια και τη μονοτονία.
- (γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- (δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

(α) Πρέπει

$$x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x|^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1.$$

Άρα πεδίο ορισμού είναι το $A = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

(β) Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\Delta_1 = (-\infty, -1)$ και $\Delta_2 = (1, +\infty)$, ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $g(x) = x^2 - 1$ και $h(x) = \ln x$.

- Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, -1)$, με $x_1 < x_2$, τότε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 - 1 > x_2^2 - 1 \Leftrightarrow \ln(x_1^2 - 1) > \ln(x_2^2 - 1) \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, -1)$.

- Έστω $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, με $x_1 < x_2$, τότε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 - 1 < x_2^2 - 1 \Leftrightarrow \ln(x_1^2 - 1) < \ln(x_2^2 - 1) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = (1, +\infty)$.

(γ) Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, -1)$.

Άρα $f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)$. Έστω $u = x^2 - 1$. Τότε $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 - 1) = 0$. Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} [\ln(x^2 - 1)] = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty.$$

Συνεπώς $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln(x^2 - 1) \right] = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$. Επομένως $f(\Delta_1) = (-\infty, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = (1, +\infty)$, επομένως:

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\ln(x^2 - 1) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln(x^2 - 1) \right] = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = +\infty, \text{ επομένως } f(\Delta_2) = (-\infty, +\infty).$$

Συνεπώς,

$$f(A) = f(\Delta_1 \cup \Delta_2) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (-\infty, +\infty) \cup (-\infty, +\infty) = (-\infty, +\infty).$$

- (δ) Το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει λύση. Ειδικότερα η εξίσωση έχει ρίζα στο $\Delta_1 = (-\infty, -1)$, αφού $f(\Delta_1) = (-\infty, +\infty)$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ και η f είναι συνεχής. Η ρίζα αυτή είναι μοναδική εφόσον η f είναι γν. φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, -1)$. Ομοίως η εξίσωση έχει ρίζα στο $\Delta_2 = (1, +\infty)$, εφόσον $f(\Delta_2) = (-\infty, +\infty)$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ και η f είναι συνεχής. Η ρίζα αυτή είναι μοναδικά αφού η f είναι γν. αύξουσα στο $\Delta_2 = (1, +\infty)$. Τελικά η εξίσωση $f(x) = \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει ακριβώς δύο ρίζες.