

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\text{i) } f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-9}$$

$$\text{ii) } f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x^2-2}}$$

$$\text{iii) } f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x-15}}{x^2-16}$$

$$\text{iv) } f(x) = \frac{\sqrt{10-x^2}}{x-1}$$

$$\text{v) } f(x) = \sqrt{\ln(x-1)}$$

$$\text{vi) } f(x) = \log(2 - \log x)$$

2) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

$$\text{i) } f(x) = \sqrt[3]{x-4} + \sqrt{5-x}$$

$$\text{ii) } f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4x}}{|2x-5|-4}$$

$$\text{iii) } f(x) = \frac{4}{\sqrt{2-x} - \sqrt{x-1}}$$

$$\text{iv) } f(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x-4}}$$

$$\text{v) } f(x) = (|x|-1)^x$$

3) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή όταν:

$$\text{i) } f(x) = x^3 + 2\eta\mu x \quad \text{ii) } f(x) = 3^x + 3^{-x}$$

4) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^4 \sqrt{9-4x^2}$ και να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

5) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f όταν:

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{αν } x < 1 \\ x^2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{ii) } f(x) = \begin{cases} -x, & \text{αν } x \leq e \\ \ln x, & \text{αν } x > e \end{cases}$$

6) Σε καθεμία από τις ακόλουθες περιπτώσεις να εξετάσετε αν $f = g$. Αν $f \neq g$, να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

$$\text{i) } f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \quad \text{και} \quad g(x) = 2 + \sqrt{x} \quad \text{ii) } f(x) = \ln x^4 \quad \text{και} \quad g(x) = 4 \ln x$$

$$\text{iii) } f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+3|x|} \quad \text{και} \quad g(x) = 1 - \frac{3}{|x|}$$

$$\text{iv) } f(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{x}} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}}$$

7) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2-5\alpha x+6}{x^2-4}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, και $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$. Αν

$x \neq \pm 2$ να βρεθεί ο α ώστε $f = g$.

- 8) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x) - f(-x) = e^x + e^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- i) Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $M(0,2)$.
- ii) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f και να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.
- 9) Βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $\frac{f}{g}$ όταν:
- i) $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 2x + 1$ ii) $f(x) = e^x + 4$ και $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
- 10) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$ όταν:
- i) $f(x) = 2x - 1$ και $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ii) $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{x}{x+1}$
- iii) $f(x) = \sin x$ και $g(x) = \frac{1}{2x}$
- 11) Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x-1}$ να βρεθούν οι $f \circ f$ και $g \circ g$.
- 12) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ισχύει
- $$((f+g)(x))^2 - 2(fg)(x) - 2[f(x)\eta\mu x - g(x)\sigma\upsilon\nu x] + 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$
- να αποδείξετε ότι $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = -\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 13) Να βρεθεί συνάρτηση τέτοια, ώστε να ισχύει
- $$f(g(x)) = 12x^2 - 14x + 4, \text{ αν } g(x) = 1 - 2x,$$
- 14) Να βρεθεί συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει:
- $$(g \circ f)(x) = |\eta\mu x|, \text{ αν } g(x) = \sqrt{1 - x^2} \text{ και } f(x) \geq 0,$$
- 15) Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3,7]$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g όταν:
- i) $g(x) = f(1-2|x|)$ ii) $g(x) = f(x) + f(x+1)$
- 16) Αν $f(x) = 2x + 5$ και $g(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να βρείτε τη συνθήκη μεταξύ των α, β ώστε να ισχύει $f \circ g = g \circ f$.
- 17) Δίνεται η συνάρτηση f με $D_f = \mathbb{R}$. Αν για κάθε σταθερή συνάρτηση g ισχύει $f \circ g = g \circ f$ να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.
- 18) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Αν για κάθε σταθερή συνάρτηση h ισχύει $f \circ h = g \circ h$, να αποδείξετε ότι $f = g$.

Πετρόπουλος Αθανάσιος

Μαθηματικός M.Sc.