

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

- 1) α) Να αποδείξετε ότι συνάρτηση $f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 1}$ είναι 1-1 και να βρείτε την f^{-1} .
 β) Ομοίως για την $f(x) = x^3$.
- 2) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g , με $f(x) = \frac{e^x + 3}{e^x}$ και $g(x) = \ln(2 + e^x) - x$ αντιστρέφονται και να βρείτε την αντίστροφή τους.
- 3) Αν $f(x) = \frac{2 \ln x - 3}{5}$ και $g(x) = 1 + \ln x$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την $\varphi = f^{-1} \circ g$.
- 4) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες στο σύνολο A και για κάθε $x \in A$ είναι $f(x) \geq 0$ και $g(x) \geq 0$, να δείξετε ότι:
 α) η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο A ,
 β) να μελετηθεί ως προς την μονοτονία στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ η συνάρτηση $h(x) = \frac{x^2}{\eta \mu x}$,
 γ) αν $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \beta < \pi$, τότε $\beta^2 \eta \mu \alpha - \alpha^2 \eta \mu \beta > 0$.
- 5) α) Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, να αποδείξετε ότι η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.
 β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία να ισχύει $f(f(x)) + 3x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 6) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $6f(x^2) - f^2(x) \geq 9$, να αποδείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται.
- 7) α) Αν οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, να αποδείξετε ότι οι $f \circ g, g \circ f, f \circ f$ και $g \circ g$ είναι επίσης 1-1.
 β) Αν για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $(g \circ f)(x) = e^{x^2 - x}$, να αποδείξετε ότι μία τουλάχιστον από τις f και g δεν είναι 1-1.
- 8) Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι 1-1 και περιττή. Να αποδείξετε ότι και η αντίστροφή της θα είναι περιττή.
- 9) α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{3^x} - 2x$ είναι 1-1.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-9} - 2(x^2-9) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} - 2x-6$

- 10)** Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.
- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x - 2) = f(2 - x)$.
- 11)** Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f^5(x) + f(x) + x = 0$ να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και κατόπιν να βρεθεί η f^{-1} .
- 12)** Έστω συνάρτηση $f(x)$ για την οποία για κάθε $x > 0$ ισχύει $e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x$, να δείξετε ότι $f(x) = \ln x$.
- 13)** Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$ και $B(5,-2)$.
- α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- β) Να δείξετε ότι η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.
- γ) Να λύσετε: i) $f(f(e^x)) < -2$ ii) $f(x^2 - 5x + 7) = 5$.
- 14)** Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες είναι γνησίως αύξουσες και ισχύει $g(1) = 2$ και $f(-1) = 3$. Τότε:
- α) Να βρείτε το λ ώστε $f^{-1}(2 + g^{-1}(e^{\lambda-1})) = -1$.
- β) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $f + g$ είναι γνησίως αύξουσες.
- γ) Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(2x-1) + f(3x-2)$, $x \in \mathbb{R}$.
- i) Να εξετάσετε την h ως προς την μονοτονία.
- ii) Αν η C_f τέμνει τον $x'x$ στο $x_0 = 1$, να λύσετε την ανίσωση:
- $$f(2x-1) < -f(3x-2).$$
- 15)** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (1), να δείξετε ότι:
- α) $f(0) = 0$ β) η f είναι περιττή
- γ) Αν η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το $x = 0$, τότε η f αντιστρέφεται.
- δ) $f^{-1}(a + \beta) = f^{-1}(a) + f^{-1}(\beta)$

Πετρόπουλος Αθανάσιος
Μαθηματικός M.Sc.