

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

- 1) Για μια συνάρτηση f ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$ και $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lambda(3 - 2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να

αποδείξετε ότι η f δεν έχει όριο καθώς $x \rightarrow 2$.

- 2) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 8}{x^3 + 1} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - \sqrt{x} - 2} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x - 20}{x^2 - 16} + \frac{2}{x - 4} \right)$$

- 3) Να υπολογίσετε τα όρια

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{5}}{x} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{2x^2 - 18} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$$

- 4) Να βρεθούν τα όρια:

$$\alpha) \beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|5-3x| - |3x-1|}{x^2 - 1} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 - x + 2| - 2}{x - 1} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 2x|}{x - 2}$$

- 5) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5\epsilon\phi 3x}{2x} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4 - 3\eta\mu^4 x}{8x^2 \eta\mu^2 x} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{\sqrt{2x+4} - 2}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\eta\mu^2 x - 2x\epsilon\phi x}{4x^6 + 5x\eta\mu x} \quad \epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu ax}{x^2} \quad \sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^3 + 2x^2 + 3x}$$

- 6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x < -1 \\ a^2 x + 3, & -1 \leq x < 0 \\ 3a, & x \geq 0 \end{cases}$. Να βρεθούν οι τιμές του

$a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες :

α) η f έχει όριο στο -1 , το οποίο και να βρεθεί,

β) η f έχει όριο στο -1 και δεν έχει στο 0 .

- 7) Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + \beta, & x < 2 \\ 5ax + 2\beta, & x \geq 2 \end{cases}$. Βρείτε τις τιμές των a, β ώστε η $f(x)$ να

διέρχεται από $A(1, -1)$ και να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

- 8) Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) + x - 6}{x - 2} = 8$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

- 9) Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και αν $\lim_{x \rightarrow -3} (f(x) + 2x - 5) = 4$ να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

- 10) Αν η f είναι περιττή και $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 3 + x^2) = 5$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.
- 11) Για τη συνάρτηση f υποθέτουμε ότι ισχύει $f(x+y) = f(x)\eta\mu y + f(y)\eta\mu x$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 5$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in \mathbb{R}$.
- 12) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -2} \left[(x+2) \left(2 + \eta\mu \frac{1}{x+2} \right) \right] = 0$.
- 13) Να υπολογιστούν τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(x-3)}{\sqrt{2x+3}-3}$ β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1}$
- 14) Να αποδείξετε ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow -a} \frac{\eta\mu(x+a)^3}{(x+a)^2}$, $a \in \mathbb{R}$, είναι ανεξάρτητο του a .
- 15) Αν f είναι μια άρτια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -2} \left(f(x) + \frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2-4} \right)$.
- 16) Αν ισχύει $10x - 50 \leq (x-5)f(x) \leq x^2 - 25$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$.
- 17) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|\eta\mu x - xf(x)| \leq |x - \eta\mu x|$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- 18) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(x^2 - 5x)f(x) \geq x^2 - 25$, και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$, να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2$.
- 19) Αν $f''(x) + 2f(x) + \sin^2 x \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$.
- 20) Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$, να υπολογίσετε τα όρια:
 α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot f(x) + x^2}{5\eta\mu^2 x - 3x^2}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)\eta\mu x + f^3(x) - x^2 f(x)}{xf^2(x) + f(x)\eta\mu^2 x + x^3}$
- 21) Αν ισχύει $2x - x^2 \leq f(x) \leq 2x + x^2$, για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2f(x) + x}{f(x) + 2x} = \frac{5}{4}$.
- 22) Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^\mu + \beta x^\nu + \gamma}{x-1} = \alpha\mu + \beta\nu$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$.

Πετρόπουλος Αθανάσιος, Μαθηματικός M.Sc.