

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

- 1) Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις :

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \frac{8x-24}{2x^2-11x+15}, & x < 3 \\ 8, & x = 3 \\ \frac{2x-6}{\sqrt{x+1}-2}, & x > 3 \end{cases} \quad \beta) f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sin x}{x^2}, & x < 0 \\ \frac{\sin x}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

- 2) Να προσδιορίσετε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι συνεχείς.

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2-2x-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ \lambda, & x = 1 \end{cases} \quad \beta) f(x) = \begin{cases} \lambda x + 1, & x \leq 1 \\ \frac{1-x\sqrt{x}}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

- 3) Να βρείτε αν υπάρχουν τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε η f με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-2|x-1|+x^2-3x+2}{x-1}, & x < 1 \\ x^2+x+1+\lambda+\mu, & 1 \leq x < 2 \\ -3\lambda x+2\mu, & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής στο } \mathbb{R}.$$

- 4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha, & x \leq 0 \\ \frac{3\ln x - 2}{2 - \ln x}, & x > 0 \text{ και } x \neq e^2 \end{cases}$. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η συνάρτησης f να είναι συνεχής.

- 5) Να προσδιορίσετε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β για τις οποίες

$$\text{είναι συνεχής η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 + \beta x - 6}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 9, & x = 2 \end{cases}.$$

- 6) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + \alpha x + \beta}{|x-1|}, & x \neq 1 \\ \gamma, & x = 1 \end{cases}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι

αριθμοί α, β, γ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

- 7) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $x \cdot f(x) \geq \eta \mu 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το $f(0)$.

- 8) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \neq 0$

$$\text{ισχύει } \frac{2x^2 - \eta\mu^2 x}{x^2 + x^4} \leq f(x) \leq 1 + \frac{\sqrt{x^4 + 4} - 2}{x^2}. \text{ Να βρείτε το } f(0).$$

- 9) Αν η f είναι συνεχής στο $D_f = [-1, +\infty)$ και για κάθε $x \geq -1$ ισχύει $xf(x) + \sin x = \sqrt{x+1}$ να βρείτε την τιμή $f(0)$ και τον τύπο της συνάρτησης f .

- 10) Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|(x-2)f(x)| \leq |\eta\mu x - \pi(x-2)|$, να βρείτε την τιμή της f στο $x_0 = 2$.

- 11) Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$

$$\text{με } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} = 10.$$

α) Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1 = -1$.

$$\gamma) \text{ Να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + 5}{x + 1}.$$

- 12) Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{6}{x} - 8x + 2, \quad x \in (0, 3] \qquad \beta) f(x) = \ln x + e^x, \quad x \in (0, 1]$$

- 13) Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = x^2 + 4x, \quad x \in [0, 2] \qquad \beta) f(x) = \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4}\eta\mu x\right), \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

- 14) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1 + \eta\mu x}{x} + \frac{1 + x^{10}}{6x - \pi} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο

$$\text{διάστημα } (0, \frac{\pi}{6}).$$

- 15) Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{x+1} + \frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu\gamma}{x-1} = 0$

έχει ακριβώς δύο ρίζες.

- 16) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha^2 x^4 + \beta^2 x - \beta^2 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0, 1]$.

- 17) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 = 11 - 2x$ έχει δύο τουλάχιστον πραγματικές ρίζες.

- 18) Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $0 < f(x) < 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x + f^2(x) = 2f(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$.

- 19) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{2x^3 - 1}$ και $g(x) = \frac{5}{x}$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο M με τετμημένη $x_0 \in (1, 2)$.
- 20) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = 2\eta\mu x - \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu x$ για τις διάφορες τιμές του $x \in [0, \pi]$.
- 21) Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[0, 1]$, ώστε $f(0) > 0$ και $f(1) < 2020$. Να δειχτεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$, ώστε $f(\xi) = 2020\xi$.
- 22) Αν $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha \sigma\upsilon\nu x + \beta = x$ έχει μία τουλάχιστον θετική πραγματική ρίζα που δεν υπερβαίνει τον $\alpha + \beta$.
- 23) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x + x^2 - 2 = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- 24) Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 1]$. Να δειχτεί ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x}$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(0, 1)$.
- 25) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \leq g(\alpha)$ και $f(\beta) \geq g(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.
- 26) Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, με $\alpha \neq -\beta$, ώστε $f(\alpha) = \beta^2$ και $f(\beta) = \alpha^2$. Να δειχτεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ του διαστήματος (α, β) , ώστε $f(\xi) = \xi^2$.
- 27) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $kf(\alpha) + \lambda f(\beta) = 0$ με $k\lambda > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει (τουλάχιστον ένα) $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.
- 28) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x \leq 1 \\ x^2+2x+1, & x > 1 \end{cases}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 0$.
- 29) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + 1 = 0$ έχει δύο θετικές ρίζες και μία αρνητική.
- 30) Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $2x \leq f(x) \leq x^2 + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δειχτεί ότι:
- α) Η f είναι συνεχής στο 1.
- β) Αν η f είναι συνεχής, τότε η εξίσωση $f(x) = 2004x$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

- 31) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{x-1} = 3$ και $\eta\mu 2x \leq x \cdot f(x) \leq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι οι C_f και C_g όπου $g(x) = x^2 + 1$, τέμνονται σε σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.
- 32) Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις f, g στο διάστημα Δ , ώστε $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. Αν $\alpha, \beta \in \Delta$, με $\alpha \neq \beta$, να δειχτεί ότι $f(\alpha)f(\beta) + g(\alpha)g(\beta) > f(\alpha)g(\beta) + f(\beta)g(\alpha)$.
- 33) Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ για την οποία ισχύει:

$$x^2 + 2\alpha\beta x - f(\alpha)f(\beta) + \beta^2 f(\alpha) + \alpha^2 f(\beta) > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
 Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .
- 34) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = -3$.
 Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(f(3) - 1)x^3 + x + 1 \right]$.
- 35) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{\beta - \alpha}{2}\right)$.
- 36) Οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα $[-a, a]$, $a > 0$, και επιπλέον η f είναι περιττή ενώ για τη g έχουμε $g(a) = -a$ και $g(-a) = a$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-a, a)$ τέτοιο, ώστε $f(g(x_0)) + f(x_0) + g(x_0) = 0$.
- 37) Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία $\varepsilon: y = x$.
- 38) Αν για κάθε $x \in [-3, 3]$ η f είναι συνεχής και $x^2 + [f(x)]^2 = 9$, να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-3, 3)$. Αν επιπλέον $f(0) = 3$ να βρεθεί ο τύπος της f .
- 39) Έστω συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(\alpha)f(\beta) > 0$. Αν υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) = 0$, τότε να αποδείξετε ότι $f(x)f(\alpha) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
- 40) Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [1, 3] \rightarrow [1, 3]$ με $g(1) = 3$ και $g(3) = 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [1, 3]$ τέτοιο, ώστε $f(f(\xi)) = g(g(\xi))$.
- 41) Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής και γνησίως μονότονη στο $[0, 5]$ με $f(0) = 4$ και $f(5) = 1$.
 α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας.
 β) Αν $\lambda \in [1, 4]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0, 5]$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 \in (0,5)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \frac{f(1) + 2f(3) + 3f(4)}{6}.$$

42) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(5) = 3$ και $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (3,5)$ ώστε $f(x_0) = 2$.

β) Να βρεθεί το $f(2)$.

43) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η εξίσωση

$$x^2 + 2[f(\alpha) - f(\beta)]x + f^2(\alpha) + f^2(\beta) = 0$$

έχει δύο ρίζες άνισες τότε να αποδείξετε ότι η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β) .

44) Αν η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ τότε η $f(x) = 0$ δεν έχει καμία ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

45) Να δείξετε ότι κάθε πολωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.