

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΕ

ΣΗΜΕΙΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$. Να βρεθεί η παράγωγός της στο $x_0 = 1$.
- Να προσδιοριστούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x, & x \geq 3 \\ 2\alpha x + \beta + 5, & x < 3 \end{cases} \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 3.$$

- Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^2(\pi | x |)}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}. \text{ Να βρεθεί ο } f'(0).$$

- Να εξετάσετε αν ορίζεται ο παράγωγος της f στο $x_0 = 1$, όπου:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 6, & \text{αν } x \leq 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

- Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (\sqrt{99} - \sqrt{x})^2$. Να δείξετε ότι $f'(11) = -2$.

- Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \leq 3 \\ (x^2 - 9)f'(3) + f(3), & \text{αν } x > 3 \end{cases}$

Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο 3, να υπολογίσετε τον $f'(3)$ και τον $g'(3)$.

- Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο 2 και συνάρτηση g με:

$$g(x) = \begin{cases} f(2x), & \text{αν } x \leq 1 \\ f(4x - 2), & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο 1, αν και μόνο αν, $f'(2) = 0$.

- Έστω συνάρτηση f , συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει:

$$\eta\mu x - x^2 \leq f(x) \leq \eta\mu x + x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

- Έστω συνεχής συνάρτηση f , για την οποία ισχύει:

$$|f(x) - \alpha x^2| \leq x^4, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και να βρείτε τον $f'(0)$.

- Έστω συνάρτηση f με $f(0) = 3$ και $f'(0) = 1$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g για

την οποία ισχύει $g(x) = f^4(x) + x^{2004}$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $g'(0) = 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3$

11. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \alpha}{x^2 - a^2} = \alpha, \quad \alpha \neq 0$$

Να βρεθεί ο $f'(a)$.

12. Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4}{x} = 1$ και $f(0) = 4$

Έστω επίσης συνάρτηση g με $g(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)f(x)$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον $f'(0)$ και τον $g'(0)$.

13. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $x = 4$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - \sqrt{x+12}}{x-4} = \frac{3}{8}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 4$.

14. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 2014$ και $f(1) = 2015$.

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x) - 2015}{x-1}$.

15. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = (-\alpha, \alpha)$, $\alpha > 0$, παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. Αν $g(x) = f(|x|)$, $x \in \Delta$, να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, αν και μόνο αν, $f'(0) = 0$.

16. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + \gamma & , \text{αν } x \geq 1 \\ \frac{x^2 + \gamma x - 2}{x-1} & , \text{αν } x < 1 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Κατόπιν να δείξετε ότι $f'(3) = 0$

17. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(x+y) = f(x)f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, ▪ f παραγωγίσιμη στο $x_0 = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Πετρόπουλος Αθανάσιος

Μαθηματικός M.Sc.