

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ_2

1) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι παρ/μη, γνησίως αύξουσα και κοίλη. Επιπλέον είναι $f(1) = f'(1) = 2$.

α) Να δείξετε ότι $f'(e^x - x) \leq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - |x-1| = 2x$.

δ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x) - 2x}$

ε) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια $f^{-1}(x) \geq \frac{x}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)e^x + 2$.

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 + 1) = 2 - e$.

iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > -x$.

3) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι κυρτή και ισχύουν:

- Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$,
- $f(x) \geq e^x + x - \ln(x^2 + 1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να λυθεί η εξίσωση $f(x) - 2x = 1$.

4) Έστω $f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια κυρτή συνάρτηση, της οποίας η C_f εφάπτεται στην ευ-

θεία $y = 2$ στο $x_0 = -1$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) - 2}{x + 1}$,

$x > -1$, είναι γνησίως αύξουσα.

5) α) Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι κυρτή στο διάστημα Δ . Αν $\alpha < \beta < \gamma$ με

$\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, να δείξετε ότι $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$ είναι κυρτή.

γ) Αν $0 < \alpha < \beta < \gamma$ και α, β, γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δείξετε ότι

$$\beta^\beta < \sqrt{\alpha^\alpha \cdot \gamma^\gamma}.$$

6) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = \ln 2$, για την οποία ισχύει

$$f'(x) = e^{-f(x)} - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(e^x + 1) - x$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη κυρτότητα.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{f(-2f'(x))} > \frac{e+1}{e}$.

7) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$ η οποία είναι 2 φορές παρ/μη και ισχύουν οι σχέσεις:

- $x^2 + f(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $f''(x) + 2f(x) + 2xf'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί ο τύπος της f .

β) Αν $f(x) = e^{-x^2}$, να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > 0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}xe^{x^2 - \frac{1}{2}} + 1 = 2e^{x^2 - \frac{1}{2}}$, στο $(0, +\infty)$.