

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ – De L' HOSPITAL

1. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \sigma\phi x, x \in (0, \pi),$

ii) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3},$

iii) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & , \text{αν } x < 1 \\ 3x + 2 & , \text{αν } x \geq 1 \end{cases}.$

2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f της f , όταν:

i) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{3-x}},$

ii) $f(x) = \ln(4 - x^2),$

iii) $f(x) = \frac{\eta\mu 2x}{x},$

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^2},$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x}),$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + e^x}{x + e^x},$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^3}{e^x},$

v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln^3 x}.$

4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f όταν:

i) $f(x) = xe^x,$

ii) $f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1},$

iii) $f(x) = x \ln x^2,$

5. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η ευθεία με εξίσωση $x = 1$ είναι ασύμπτωτη

της C_f της $f(x) = \frac{x^2 + x + \alpha - 1}{x - \alpha^4}$.

6. Αν η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + 1}{x - \beta}$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $x = -1$ και $y = 3$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = -1$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{\kappa x^2 + \lambda x + 4}{x - 1}$. Να προσδιοριστούν τα κ , λ ώστε η ευθεία $y = 2x + 3$ να είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

8. Αν η ευθεία $y = 2x + 7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$ να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3xf(x) + x^2 - 1}{x^2 f(x) - 2x^3}$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ell \ln x}{\ell \ln x - 2}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να εξετάσετε αν η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

10. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln \sqrt{x}}{x - 1} & , \text{αν } 0 < x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & , \text{αν } x = 1 \end{cases}$ να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι συνεχής, ii) $f'(1) = \frac{1}{4}$.

11. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 3 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = f'(0) = 0$ και

$$f''(0) = 1. \text{ Να δείξετε ότι η συνάρτηση } g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & , \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & , \text{αν } x = 0 \end{cases} \text{ είναι παρ/μη}$$

στο $x_0 = 0$ και να βρείτε τον $g'(0)$.

Πετρόπουλος Αθανάσιος, Μαθηματικός M.Sc.