

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.2

1. Να βρείτε την συνάρτηση $f'(x)$ αν:

i) $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$

ii) $f(x) = \frac{\sin 5}{x}$

iii) $f(x) = \frac{x^3 - 11\sqrt{x^5}}{5}$

iv) $f(x) = \sqrt[5]{x^7} - \frac{3}{\sqrt[17]{x^3}}$

2. Ομοίως:

i) $f(x) = (2x-3)(\sin x - 5)$

ii) $f(x) = (x^3 + 2x^{-2})(x^6 + 1)$

iii) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

iv) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

v) $f(x) = x \cdot \ln x + e^x \cdot \sin x$

vi) $f(x) = \ln x \cdot \log x$

vii) $f(x) = x^e \cdot e^x$

viii) $f(x) = 5^x \cdot x^5$

3. Ομοίως:

i) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$

ii) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x}$

iii) $f(x) = \frac{x + \sin x}{x^2}$

iv) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

4. Ομοίως:

i) $f(x) = (1 - x^3)^5$

ii) $f(x) = (x^2 - 2x^4)^{-3}$

iii) $f(x) = 2\sin^3(4e^x - 9)$

iv) $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$

v) $f(x) = \frac{1 - \sin 5x}{1 + \sin 5x}$

vi) $f(x) = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x}$

vii) $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$

viii) $f(x) = \ln(\sin^7(3x))$

ix) $f(x) = \sin x^{\sin x}$

x) $f(x) = (2x^2 - 1)^x$

5. Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = e^{x^2+2}$

ii) $f(x) = \sin^5(x-1)$

6. Να ορίσετε την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$\text{i)} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{αν } x \leq 1 \\ \sqrt{x} & , \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + 1 & , x < 0 \\ x + 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

7. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, όταν:

$$\text{i)} \quad f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 - 12x + 3 & , x < 0 \\ 3x^2 - 12 & , x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ii)} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - x^3 & , x < 0 \\ \eta\mu^2 x & , x \geq 0 \end{cases}$$

8. Δίνεται ότι $y = \frac{x^2 + 2}{\sin x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$, τότε να αποδείξετε

$$\text{ότι:} \quad \sin x \cdot \frac{dy}{dx} - \eta\mu x \cdot y = 2x$$

9. Αν $f(x) = x^2 + x^4 + \dots + x^{2^v}$, να βρείτε την $f'(-1)$.

10. Να βρείτε πολώνυμο $P(x)$, τρίτου βαθμού τέτοιο, ώστε να ισχύουν $f(0) = 1$, $f'(1) = 7$, $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ και $f'''(10) = 12$.

11. Αν $f(x) = x^2 - 2$, να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της C_f στα σημεία τομής της με τους άξονες.

12. Αν $f(x) = x^2 - 2$ και $g(x) = -\sqrt{x}$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στο κοινό τους σημείο τέμνονται κάθετα.

13. Αν $f(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta$, να βρείτε τις τιμές των $a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $O(0,0)$ και $A(-1, 1)$ είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

14. Αν $f(x) = \frac{\kappa}{x^2 + 4}$, να βρείτε για ποια τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη -1 είναι κάθετη στην ευθεία $y = -5x + 2$.

15. Αν $f(x) = 3x^2 - ax + \beta$, να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, 4)$:

i) να έχει κλίση -2 , ii) να διέρχεται από το σημείο $B(3, 5)$,

iii) να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{\pi}{3}$

iv) να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $4x + 2y = 1$.

17. Αν $f(x) = \frac{a}{\eta\mu x} + \frac{\beta}{\sin x}$, $a, \beta \in \mathbb{R}^*$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

18. Έστω συνάρτηση f με $f(x) = x^a$, $0 < a \neq 1$, να βρείτε:

i) τις συναρτήσεις f' και f'' ii) τη συνάρτηση $f^{(v)}$, $v \in \mathbb{N}^*$

iii) το άθροισμα $S = f'(x) + f''(x) + \dots + f^{(v)}(x)$, $v \in \mathbb{N}^*$, όταν $a = e$.

19. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, να βρείτε την $\left. \frac{d^2}{dx^2} (f(x) \ln x) \right|_{x=1}$.

20. Αν ε είναι η εφαπτομένη της παραβολής $f(x) = x^2$ στο σημείο $A(-2,4)$, τότε να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής η οποία είναι κάθετη στην ε .

21. Αν C_1 και C_2 είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 4x + 5$ και $g(x) = x^2 + 2x - 4$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_1 στο σημείο $A(3, f(3))$ εφάπτεται και στη C_2 .

22. Να βρεθούν τα κ και λ , ώστε η εφαπτομένη της $f(x) = 2x^2 - x + 2$ στο $M(0,2)$ να εφάπτεται της $g(x) = x^2 - \kappa x + \lambda$ στο $N(1,1)$.

23. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f(x^2) = -f^2(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Αν } f(0) = f'(0) = -2 \text{ να βρείτε τον αριθμό } f''(0).$$

24. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[a, b]$ και είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{a-\xi} + \frac{1}{b-\xi}$$

25. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^5 + x + 2$ και $g(x) = \sin x$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f για την οποία υπάρχει παράλληλη προς αυτή εφαπτομένη της C_g .

26. Αφού αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ που είναι άρτια έχει πρώτη παράγωγο περιττή με $f'(0) = 0$, κατόπιν να δείξετε ότι για την συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 \eta \mu^5 x \cdot \sin^{10} x \cdot \ln(x^6 + 1)$ ισχύει $f'(0) = 0$.

27. Έστω ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x^3 + x) = 5x^2 + 4$, όπου f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να βρεθούν :

i) ο αριθμός $f'(2)$

ii) η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$.

28. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f(\sin x) = e^x \eta \mu x$ για κάθε $x \in [0, \pi]$. Να βρείτε:

- i) το $f'(0)$
- ii) το εμβαδόν που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ με τους άξονες.

29. Αν η συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$f(x) = (x - 3)^2 g(2x - 1) \text{ με } g(5) = 5,$$

να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον $f''(3)$.

30. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f(a + x) + x = f(a - x) - x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(a, f(a))$ είναι κάθετη στην ευθεία $y = x$.

31. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f'(1) = 1$. Αν $g(x) = f(x^2 + x + \sin x) - \sin x$,

$x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ εφάπτεται της C_g στο σημείο $B(0, g(0))$.