

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.4.1

### ROLLE

1. Να βρείτε τους  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , ώστε να ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο

$$\text{διάστημα } [-1,1] \text{ για την } f \text{ με } f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + 2 & , -1 \leq x < 0 \\ x^3 + \beta x^2 + 3x + \gamma & , 0 \leq x \leq 1 \end{cases}. \text{ Στη}$$

συνέχεια για τις τιμές αυτές των  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  να βρείτε ένα  $x_0 \in (-1, 1)$  τέτοιο, ώστε  $f'(x_0) = 0$ .

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $4\beta x^3 + \beta = 2x + 1$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(-1, 0)$ .
3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $8\alpha x^3 + 9\beta x^2 - 6\beta x - 2\alpha = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0,1)$ .

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x \ln \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ . Να δειχθεί ότι αληθεύει το Θ. Rolle

στο  $\left[0, \frac{1}{v\pi}\right]$  ( $v \in \mathbb{N}^*$ ) και να δειχθεί ότι η εξίσωση  $\varepsilon \varphi \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $\left(0, \frac{1}{v\pi}\right)$ .

5. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[a, \beta]$  και ισχύουν  $f(a) = f(\beta)$  και  $f'(a) = f'(\beta) = 0$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (a, \beta)$ , ώστε  $f'''(\xi) = 0$ .
6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - \sin x$  έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες.
7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $3x^5 - 2x^3 = 4$  έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα  $(1,2)$ .
8. Να αποδείξετε ότι οι γρ. παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = 3^x$  και  $g(x) = -3x^2 + 10x + 1$  έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία, τα  $A(0, 1)$  και  $B(2, 9)$ .
9. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:
- α)  $1 + xe^x = e^x$ ,
- β)  $2^x + 5^x = 2 + 5x$ .
10. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^7 + \alpha x^2 + \lambda = 0$  έχει το πολύ τρεις, ανά δύο άνισες μεταξύ τους, πραγματικές ρίζες.

11. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[α,β]$  και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(α,β)$ . Αν  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (α,β)$ , να αποδείξετε ότι  $f(α) \neq f(β)$ .
12. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^5 + 1 = 5x$  έχει ακριβώς μια ρίζα στο  $(-1,1)$ .
13. Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$  και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(α, β)$ . Αν υπάρχει  $\gamma \in (α, β)$  έτσι ώστε  $f(α) = f(\gamma) = f(β)$  τότε υπάρχει  $\xi \in (α, β)$  με  $f''(\xi) = 0$ .
14. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f: [α, β] \rightarrow \mathbb{R}$ , συνεχή στο  $[α, β]$ , παραγωγίσιμη στο  $(α, β)$  και  $f(β) - f(α) = \beta^2 - \alpha^2$ . Να δειχθεί ότι υπάρχει  $\xi \in (α, β)$  έτσι ώστε  $f'(\xi) = 2\xi$ .
15. Έστω  $f, g$  δυο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  και τέτοιες ώστε  $g(x) = (x - 1)f(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Αν η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε  $\frac{f(\xi)}{\xi - 1} + f'(\xi) = 0$ .
16. Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής στο διάστημα  $[α, β]$  και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(α, β)$  με  $f(α) = f(β)$ . Αν η συνάρτηση  $f'$  είναι 1-1 και  $f'(0) = 0$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha < 0 < \beta$ .
17. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x + \ln(\sin x)$ ,  $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$  τέτοιο ώστε, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(\xi, f(\xi))$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = x$ .
18. Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$  και παραγωγίσιμη στο  $(α, β)$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (α, β)$  με  $f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(α)}{\beta - x_0}$ .
19. Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι συνεχείς στο διάστημα  $[α, β]$ , παραγωγίσιμες στο  $(α, β)$  και  $g'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (α, β)$ , να αποδείξετε ότι:
- α)  $g(x) \neq g(β)$  για κάθε  $x \in [α, β)$ ,
- β) υπάρχει  $x_0 \in (α, β)$  τέτοιο, ώστε  $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0) - f(α)}{g(β) - g(x_0)}$ .
20. Έστω  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους για

τις οποίες ισχύει  $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης  $g(x) = 0$  υπάρχει ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

21. α) Να λυθεί η εξίσωση  $x = e \ln x$ ,  $x > 0$ .

β) Να βρεθεί το  $a \in \mathbb{R}$ , έτσι ώστε η ευθεία  $y = ax$  να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της  $f(x) = a^x$ .

### ΘΜΤ

22. Να βρείτε τους  $a, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο

$$\text{διάστημα } [1,5] \text{ για την συνάρτηση } f \text{ με τύπο } f(x) = \begin{cases} (\ln x)^2 & , \text{αν } 1 \leq x < e \\ ax - \beta & , \text{αν } e \leq x \leq 5 \end{cases}$$

23. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, 3]$ ,  $f(0) = 2$  και  $3 \leq f'(x) \leq 6$  για κάθε  $x \in (0, 3)$ , να αποδείξετε ότι  $11 \leq f(3) \leq 20$ .

24. Αν η συνάρτηση  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής με  $f(-1) = -2$ ,  $f(1) = 2$  και  $|f'(x)| \leq 2$  για κάθε  $x \in (-1, 1)$ , να υπολογίσετε το  $f(0)$ .

25. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  και παραγωγίσιμη στο  $(a, \beta)$  με  $f(a) = \beta\sqrt{3}$  και  $f(\beta) = a\sqrt{3}$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  να σχηματίζει με τον  $x'x$  γωνία  $\omega = \frac{2\pi}{3}$ .

26. Έστω η συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $[a, \beta]$  και παραγωγίσιμη στο  $(a, \beta)$  για την οποία ισχύουν  $f(a) = \beta$  και  $f(\beta) = a$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (a, \beta)$  τέτοιο ώστε, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(\xi, f(\xi))$  είναι κάθετη στην ευθεία  $y = x$ .

27. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu^2 x$ ,  $x \in [a, \beta]$ . Να αποδείξετε ότι:

$$|\eta\mu^2 a - \eta\mu^2 \beta| \leq 2|a - \beta|.$$

28. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \ln x$ ,  $x \in [a, \beta]$  ( $a, \beta > 0$ ). Να αποδείξετε ότι:

$$1 - \frac{a}{\beta} < \ln \beta - \ln a < \frac{\beta}{a} - 1.$$

29. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \sigma\phi\beta < \frac{\ln(\eta\mu\beta) - \ln(\eta\mu\alpha)}{\beta - \alpha} < \sigma\phi\alpha, \text{ αν } 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2},$$

$$\beta) \nu\beta^{\nu-1}(\alpha - \beta) \leq \alpha^\nu - \beta^\nu \leq \nu\alpha^{\nu-1}(\alpha - \beta), \text{ με } \alpha \geq \beta > 0 \text{ και } \nu \in \mathbb{N}^*,$$

$$\gamma) \frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x, \text{ } x > 0,$$

30. Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f'(x) \leq M < 0$ , να αποδείξετε ότι:

$$i) f(x) \leq xM + f(0), \text{ αν } x > 0,$$

$$ii) f(x) \geq xM + f(0), \text{ αν } x < 0,$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$iv) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

v) η  $f$  είναι αντιστρέψιμη.

31. Η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη και η  $f'$  είναι φθίνουσα. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) (\beta - \alpha)f'(\beta) + f(\alpha) < f(\beta) < (\beta - \alpha)f'(\alpha) + f(\alpha), \text{ με } \alpha < \beta,$$

$$\beta) f(x+2) - f(x) < 2f'(x) < f(x) - f(x-2).$$

32. Έστω μία συνάρτηση  $f$  η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και  $f'$  γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι  $f(\alpha+1) + f(\alpha+2) > f(\alpha) + f(\alpha+3) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

33. Η συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , με  $f(\beta) < 0$  και  $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε  $f''(\xi) < 0$ .

34. Έστω μια συνάρτηση  $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι συνεχής και δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $(1, 2)$ . Αν  $f(1) > 0$  και  $f(2) = f'(2) = 0$ , να αποδείξετε:

$$\alpha) \text{ Υπάρχει ένα τουλάχιστον } \kappa \in (1, 2) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\kappa) = -f(1).$$

$$\beta) \text{ Υπάρχει ένα τουλάχιστον } \xi \in (1, 2) \text{ τέτοιο ώστε } f''(\xi) > 0.$$

35. Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$  και τέτοια ώστε να είναι  $f'(x) \leq 1$  για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$ . Αν  $f(\alpha) = \alpha$

$$\text{και } f(\beta) = \beta \text{ να αποδείξετε ότι } f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

36. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  στο  $[0, +\infty)$  για την οποία ισχύουν:

Η συνάρτηση  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1821$ . Να αποδείξετε

ότι:

α)  $f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$  για κάθε  $x \geq 1$

β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .

37. Η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη και ισχύει  $f(\beta) + \beta = f(\alpha) + \alpha$ , με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $\alpha < \beta$ .

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε  $f'(x_0) = -1$ .

β) Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι υπάρχουν δύο σημεία  $M(x_1, f(x_1))$  και  $N(x_2, f(x_2))$  της  $C_f$  με  $x_1 \neq x_2 \neq x_0 \neq x_1$  τέτοια, ώστε οι εφαπτόμενες της  $C_f$  στα  $M$  και  $N$  να είναι παράλληλες με την ευθεία  $y = -x$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f^{(3)}(x) = 0$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

38. Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$ . Αν οι αριθμοί  $f(\alpha)$ ,  $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$  και  $f(\beta)$  είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  με  $f''(x_0) = 0$ .

39. Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, 2\alpha]$  και παρ/μη στο  $(0, 2\alpha)$  να αποδείξετε ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in (0, 2\alpha)$  τέτοια, ώστε  $0 < \xi_1 < \alpha < \xi_2 < 2\alpha$  και  $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = \frac{f(2\alpha) - f(0)}{\alpha}$ .

40. Αν  $f$  συνεχής στο  $[-1, 1]$ , παραγωγίσιμη στο  $(-1, 1)$  να δειχθεί ότι υπάρχει  $x_1, x_2, \xi \in (-1, 1)$  τέτοιο ώστε  $f'(x_1) + f'(x_2) = 2f'(\xi)$

41. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, v]$ ,  $v \in \mathbb{N}$ ,  $v \geq 2$  και παραγωγίσιμη στο  $(0, v)$ , να αποδείξετε ότι υπάρχουν  $x_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_v \in (0, v)$  τέτοια, ώστε  $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + \dots + f'(\xi_v) = v \cdot f'(x_0)$

42. Μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ , παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$ . Να δείξετε ότι υπάρχει  $x_1, x_2, \xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοια, ώστε να είναι  $f'(x_1) + 4f'(x_2) = 5f'(\xi)$ .

43. Η συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$  και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ . Αν  $f'(\alpha) = \alpha f(\alpha)$  και  $f'(\beta) = \beta f(\beta)$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε  $f''(x_0)f(x_0) = (f'(x_0))^2 + (f(x_0))^2$ .

44. Για τη συνάρτηση  $f$  ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο  $[\alpha, \beta]$  και επιπλέον  $f(\alpha) = \alpha$ ,  $f(\beta) = \beta$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = \alpha + \beta - x_0$ .

β) Υπάρχει  $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$  τέτοια ώστε  $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = 1$ .

45. Αν η συνάρτηση  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow (0, +\infty)$  είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι

υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε  $\frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = e^{(\beta-\alpha) \cdot \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$ .

46. Έστω μια συνάρτηση  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής με  $f(\alpha) \neq f(\beta)$  και  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$ . Ναο:

i) Υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $5 \cdot f(x_0) = 2f(\alpha) + 3f(\beta)$ .

ii) Υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2, \xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοια ώστε  $\frac{3}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} = \frac{5}{f'(\xi)}$ .

Πετρόπουλος Ι. Αθανάσιος  
Μαθηματικός M.Sc.