

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΘΜΤ (ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ)

1. Αν $f'(x) = f(x) \ln f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = e$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο τύπος της f .
2. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει $(f(x) - e^x)(f'(x) - e^x) = 2x^3 + 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$. Να βρεθεί ο τύπος της.
3. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι 2 φορές παρ/μη στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τις συνθήκες: $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = \frac{e}{2}$ και $f'(1) = \frac{3e}{2}$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x - \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f

4. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι 2 φορές παρ/μη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$ και $f''(x) - 2xf'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f'(0) = 0$ και $f(2) = e$, να βρείτε τον τύπο της f .
5. Έστω συνάρτηση f με $f'(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 0 \\ 3x^2-1, & x \geq 0 \end{cases}$. Αν $f(1) = 2$ να βρείτε την f .
6. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x^3 + x) = 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = 2$, να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f στο $x_0 = 2$.
7. Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο συναρτήσεις παρ/μες για τις οποίες ισχύει:

- $f(0) = g(0) = 1$
- $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)}$, $g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τις f και g .

8. Έστω παρ/μη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = e$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ και } f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε την f .