

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{x^3}{1+x^4},$

ii) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x},$

iii) $f(x) = \eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x), x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$

iv) $f(x) = \frac{4x^2 + 6x + 5}{4x^2 + 1},$

v) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3},$

2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{2x}{\ln x},$

ii) $f(x) = \frac{x^3}{e^x},$

iii) $f(x) = x^{2x}, x > 0,$

iv) $f(x) = \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right).$

3. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \begin{cases} -x^4 + 2x^2 + 1 & , \text{αν } x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 1 & , \text{αν } x > 2 \end{cases},$

ii) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1 & , \text{αν } x < 0 \\ \frac{x^2 - e^x}{e^x} & , \text{αν } x \geq 0 \end{cases}.$

4. Για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $|f'(x) + \eta\mu x| < 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \sigma\upsilon\nu x - 2x$ είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ η συνάρτηση $h(x) = f(x) - \sigma\upsilon\nu x + 2x + c, c \in \mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα.
5. Δίνεται η συνάρτηση $f: (e, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(x) + \ln(g(x)) = 0$ με $g(x) = xf'(x)$ για κάθε $x > e$ και $f(e^2) = 0$.

- i) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f ,
 ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα,
 iii) Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της f .
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{27-x}$.
 i) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f ,
 ii) Να αποδείξετε ότι $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{25} < \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{22}$.
7. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = f(1) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(x_0) \leq f'(x_0)$.
8. Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(\alpha) \leq 0$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, να αποδείξετε ότι $f(\beta) < f(\alpha)$.
9. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 1)$ και τέτοια ώστε να είναι $f(0) = 0$ και $f'(x) > 2x$, για κάθε $x \in (0, 1)$. Να αποδείξετε ότι $f(x) > x^2$, για κάθε $x \in (0, 1]$.
10. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και 2 φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f''(x) > 0$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .
11. Αν $\alpha > \beta > -1$, να δείξετε ότι $\frac{e^\alpha}{e^\beta} > \frac{\alpha + 2}{\beta + 2}$.
12. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha + e^\alpha = \beta + e^\beta$ τότε $\alpha = \beta$.
13. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 + \alpha x^2 - 6x + 7$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
14. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:
 i) $f(x) = x^2 - 4x$, $x \in [0, 2)$,
 ii) $f(x) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\eta\mu x\right)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
 iii) $f(x) = \eta\mu x + \varepsilon\varphi x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\text{iv)} f(x) = \frac{1}{|x+1|}, x \in [0, 2],$$

15. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x - x^3 + 2, x \in [1, 2]$.

- i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της,
- ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

16. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = 1 + \sin x$ έχει μοναδική ρίζα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

17. Να αποδείξετε ότι κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις έχει ακριβώς μία ρίζα:

- i) $e^x + 2x = 0,$
- ii) $\ln x + 3x = 0.$

18. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \alpha^x + \alpha^{3x} = 2, \text{ με } 0 < \alpha < 1, \quad \text{ii)} 3x^2 + 2x + \ln x = 5, \quad \text{iii)} 4^x + 5^x = \frac{9}{20}.$$

19. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^7 + 7x = \kappa$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $[0, 1]$, με $\kappa \in [0, 8]$.

20. i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + \alpha$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, 2]$.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[1, 2]$.

iii) Αν $4 < \alpha < 5$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $-2x^3 + 9x^2 - 12x + \alpha = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

21. i) Να δειχθεί ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ (1)

ii) Να δειχθεί ότι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \geq e^{\alpha-\beta}$ όπου $\alpha > 0$ και $\beta > 0$.

22. Να αποδείξετε ότι: i) $\frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha} > \ln \alpha$, για κάθε $\alpha > 1$, ii) $\alpha^2 - 1 \geq 2\alpha \ln \alpha$ για κάθε $\alpha \geq 1$.

23. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2e^x - 2$ και $g(x) = 2\ln(x + 1)$.

- i) Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.
- ii) Να αποδείξετε ότι στο κοινό σημείο τους έχουν κοινή εφαπτομένη.

iii) Να βρεθεί η κοινή τους εφαπτομένη.

24. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f(0) = 1$ και $f'(x) < f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x) < e^x$ για κάθε $x > 0$.

ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ M.Sc.