

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΚΡΟΤΑΤΑ – FERMAT

- 1) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f^2(x) + 1 \leq 2f(x^2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - α) Να βρείτε τα $f(0)$ και $f(1)$.
 - β) Να δείξετε ότι υπάρχει $a \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(a, f(a))$, να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
 - γ) Να δείξετε ότι η f' δεν είναι 1-1 και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x = 1$.
- 2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^6 + 6x + 7$.
 - i) Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης.
 - ii) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{f(x) - 2}$.
 - iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + (x+1)^2 = 2$.
 - iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x)) = 83$.
 - v) Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $3f(\alpha) + 2f(\ln \beta) = 10$.
- 3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-2} - x^2 + 2x - 2$.
 - α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 - β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = 2e^{x-2}$ και $h(x) = x^2 - 2x + 2$, δέχονται κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο.
- 4) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, η f' είναι γνησίως αύξουσα και η $y = 2$ εφάπτεται της C_f στο $x_0 = 1$. Να δείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$. Να δείξετε ότι:
 - α) Υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .
 - β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(1)$ στο διάστημα (x_1, x_2) .
- 6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ και ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $A, B \in C_f$, $\Gamma, \Delta \in x'x$ και $\Gamma(x, 0)$, $x > 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του ορθογωνίου, ώστε να έχει μέγιστο εμβαδόν.
- 7) Μια δεξαμενή νερού έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με τις δύο έδρες του να είναι τετράγωνα πλευράς x . Το επάνω μέρος της δεξαμενής είναι ανοιχτό και είναι κατασκευασμένη από λαμαρίνα εμβαδού 27m^2 . Να βρείτε τις διαστάσεις της δεξαμενής, έτσι, ώστε αυτή να χωράει τη μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα νερού.
- 8) Από όλους τους κυλίνδρους με όγκο $16\pi \text{ cm}^3$, να βρείτε την ακτίνα και το ύψος εκείνου που έχει τη μικρότερη επιφάνεια.