

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

1. Να βρείτε τα σημεία καμπής των συναρτήσεων:
 - i) $f(x) = e^x \eta \mu x$, στο $[0, \pi]$,
 - ii) $f(x) = \ln(1 + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$
 - iii) $f(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Δίνεται ο θετικός πραγματικός αριθμός α και η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 - 2 \ell n x$, με $x > 0$.
 - i) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.
 - ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να προσδιορίσετε το α , ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

3. Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπο $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{\alpha x^3}{3} + 2x^2$. Να βρεθούν οι ακέραιες τιμές του α , ώστε κάθε συνάρτηση από τις παραπάνω να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Πόσα τοπικά ακρότατα διαθέτει καθεμιά απ' αυτές τις συναρτήσεις;

4. Έστω συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \left(\alpha - \frac{2}{3}\right)x^3 - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)x^2 - 10x + 7$. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής στο $x_0 = \frac{3}{2}$. Στη συνέχεια και για την τιμή αυτή του α να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^{\lambda x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ και εφαπτομένη στο A την ευθεία με εξίσωση $y = \sqrt{\frac{2}{e}}x + 2\sqrt{\frac{1}{e}}$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2x^3 - (\alpha + 1)x - \alpha$

- i) Να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f
- ii) Για ποια τιμή του $a \in \mathbb{R}$ οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία καμπής είναι κάθετες; Ποιες είναι οι εξισώσεις των εφαπτόμενων στην περίπτωση αυτή;
7. Έστω συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \lambda e^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- i) Να μελετήσετε, για τις διάφορες τιμές του λ , την κυρτότητα της f .
- ii) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων καμπής σε κάθε περίπτωση.
8. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(\ln x)$.
- i) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(e, f(e))$.
- ii) Να δείξετε ότι $\ln(\ln x) \leq \frac{x}{e} - 1$ για κάθε $x > 1$
9. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $(f(x))^2 - xf(x) + x^2 - 3 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- i) Αν το $x = a$ είναι κρίσιμο σημείο της f , να αποδείξετε ότι $a = -1$ ή $a = 1$.
- ii) Να εξετάσετε αν η C_f έχει σημεία καμπής.
10. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε $f(0) = f'(0) = 1$. Αν η f είναι κυρτή ή κοίλη στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x + 1$ έχει μοναδική ρίζα το 0.
11. Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με δεύτερη παράγωγο στο (α, β) και $f(\gamma) = 0$ για κάποιο $\gamma \in (\alpha, \beta)$, Αν επιπλέον η f στο $[\alpha, \beta]$ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, δείξτε ότι: $\frac{f(\alpha)}{\gamma - \alpha} + \frac{f(\beta)}{\beta - \gamma} > 0$.
12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x$, $x > 0$.
- i) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.
- ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, 0)$.
- iii) Να αποδείξετε ότι $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$.
- iv) Αν για τους θετικούς α, β, γ ισχύει η σχέση $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$ να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 3$$