Ορισμοί

Ο 1 **Ορισμός συνάρτησης**

Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε *πραγματική συνάρτηση* με *πεδίο ορισμού το* Α μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται *τιμή της f στο x* και συμβολίζεται με $f(x)$.

Ο 2 **Σύνολο τιμών συνάρτησης**

Έστω συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο Α. Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f, σε όλα τα $x \in A$, λέγεται *σύνολο τιμών* της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή $f(A) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x),\ x \in A\}$.

Ο 3 **Ίσες συναρτήσεις**

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται *ίσες* όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Ο 4 **Σύνθεση συναρτήσεων**

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε *σύνθεση της f με την g*, και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Το πεδίο ορισμού της σύνθεσης είναι το σύνολο $\Gamma = \{x \in A : f(x) \in B\}$.

Ο 5 **Γνησίως μονότονη συνάρτηση**

Μια συνάρτηση f λέγεται:

- *γνησίως αύξουσα* σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$
- *γνησίως φθίνουσα* σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$.

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε η f λέγεται *γνησίως μονότονη στο Δ*.

Ο 6 **Μονότονη συνάρτηση**

Μια συνάρτηση f λέγεται, απλώς:

- *αύξουσα* σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \le f(x_2)$
- *φθίνουσα* σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Αν μια συνάρτηση f είναι αύξουσα ή φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε η f λέγεται *μονότονη στο Δ*.

Ο 7 **Ακρότατα συνάρτησης**

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) *μέγιστο*, το $f(x_0)$, όταν ισχύει

$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A$$

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) *ελάχιστο*, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \ge f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A$$

Ο 8 **Συνάρτηση 1 – 1**

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται *συνάρτηση 1–1*, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \ne x_2$, τότε $f(x_1) \ne f(x_2)$.

Ο 9 **Αντίστροφη συνάρτηση**

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση 1–1. Τότε ορίζεται η αντίστροφη της f, η οποία συμβολίζεται με f^{-1} και έχει πεδίο ορισμού το $f(A)$, σύνολο τιμών το Α και αντιστοιχίζει κάθε $y \in f(A)$ στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $y = f(x)$,

$$\text{δηλαδή } f^{-1}(y) = x \text{ για κάθε } y \in f(A).$$

Ο 10 **Συνέχεια συνάρτησης σε σημείο x_0**

- Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι *συνεχής στο x_0*, όταν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, *συνεχής συνάρτηση*.

Ο 11 **Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα**

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι *συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)*, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι *συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]*, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha) \text{ και } \lim_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta).$$

Ο 12 **Συνάρτηση παραγωγίσιμη σε σημείο**

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι *παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο* x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται *παράγωγος της f στο* x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Ο 13 **Εφαπτομένη γραφικής παράστασης συνάρτησης – κλίση της f στο x_0**

Έστω f συνάρτηση και $M(x_0,\ f(x_0))$ σημείο της C_f. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ορίζουμε ως *εφαπτομένη της* C_f *στο σημείο της M*, την ευθεία ε που διέρχεται από το M και έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = f(x_0)' = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε, στο $M(x_0,\ f(x_0))$ είναι

$$\boxed{y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)}.$$

Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $M(x_0,\ f(x_0))$ θα τη λέμε και *κλίση της* C_f *στο M* ή *κλίση της f στο* x_0.

Ο 14 **Παραγωγίσιμη συνάρτηση σε σύνολο**

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Θα λέμε ότι:

- Η f είναι *παραγωγίσιμη στο Α* ή, απλά, *παραγωγίσιμη,* όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.
- Η f είναι *παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)* του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.
- Η f είναι *παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]* του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-} \frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \in \mathbb{R}.$$

Ο 15 **Παράγωγος συνάρτηση**

- Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και A_1 το σύνολο των σημείων του Α στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f' : A_1 \to \mathbb{R}$, $x \to f'(x)$, η οποία ονομάζεται *πρώτη παράγωγος της f* ή απλά *παράγωγος της f.*

Ο 16 **Παράγωγος συνάρτηση μεγαλύτερης τάξης**

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $f' : A_1 \to \mathbb{R}$, όπου $A_1 \subseteq A$. Αν το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f', αν υπάρχει, λέγεται *δεύτερη παράγωγος της f* και συμβολίζεται με f''.

Επαγωγικά ορίζεται η *νιοστή παράγωγος της f*, με $\nu \geq 3$ και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$. Δηλαδή $f^{(\nu)} = \left[f^{(\nu-1)} \right]'$, $\nu \geq 3$.

Ο 17 **Ρυθμός μεταβολής**

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε *ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο* x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

Ο 18 **Τοπικά ακρότατα**

- Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ *τοπικό μέγιστο*, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \le f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

  Το x_0 λέγεται *θέση* ή *σημείο τοπικού μεγίστου*, ενώ το $f(x_0)$ *τοπικό μέγιστο της f*.

- Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ *τοπικό ελάχιστο*, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \ge f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

  Το x_0 λέγεται *θέση* ή *σημείο τοπικού ελαχίστου*, ενώ το $f(x_0)$ *τοπικό ελάχιστο της f*.

Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται *τοπικά ακρότατα* αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται *θέσεις τοπικών ακροτάτων*.

Ο 19 **Κρίσιμα σημεία**

Τα *εσωτερικά σημεία* ενός διαστήματος Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται *κρίσιμα σημεία* της f στο διάστημα Δ.

Ο 20 **Κυρτότητα συνάρτησης**

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f είναι *κυρτή* ή *στρέφει τα κοίλα προς τα άνω* στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.
- Η συνάρτηση f είναι *κοίλη* ή *στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω* στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Ο 21 **Σημεία καμπής συνάρτησης**

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ καλείται *σημείο καμπής* της γραφικής παράστασης της f.

Ο 22 **Κατακόρυφη ασύμπτωτη**

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$,

τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται *κατακόρυφη ασύμπτωτη* της γραφικής παράστασης της f.

Ο 23 **Οριζόντια ασύμπτωτη**

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται *οριζόντια ασύμπτωτη* της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

Ο 24 **Πλάγια ασύμπτωτη**

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$, $\lambda \neq 0$, λέγεται *πλάγια ασύμπτωτη* της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0.$$

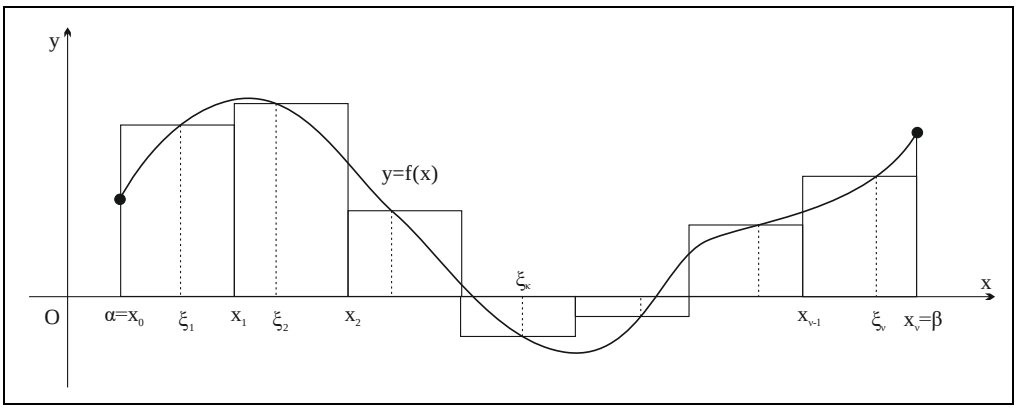
Ο 25 **Παράγουσα ή αρχική συνάρτηση**

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. *Αρχική συνάρτηση* ή *παράγουσα της f στο Δ* ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Ο 26 **Ορισμένο ολοκλήρωμα**

Έστω μια συνάρτηση f *συνεχής* στο $[\alpha,\beta]$. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη διαστήματα μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$.



Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1, 2, ..., \nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, με $S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$.

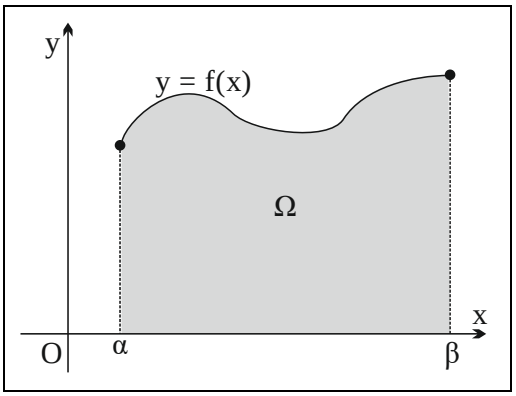
Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim_{\nu\to+\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ.

Το παραπάνω όριο ονομάζεται *ορισμένο ολοκλήρωμα* της συνεχούς συνάρτησης f, από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται *"ολοκλήρωμα της f από το α στο β"*. Δηλαδή,

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)}$$

Ο 27 **Εμβαδόν χωρίου**

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = α και x = β.



Δηλαδή, $\int_\alpha^\beta f(x)dx = E(\Omega)$.

Επομένως, αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Θ 1	Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, η οποία αντιστρέφεται. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1}, αντίστοιχα, είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο y = x.
Θ 2	Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$
Θ 3	Ισχύουν τα παρακάτω: • $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - \ell) = 0$ • $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \ell$
Θ 4	Με τη βοήθεια του ορισμού του ορίου αποδεικνύεται ότι: $$\lim_{x \to x_0} x = x_0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_0} c = c$$
Θ 5	• Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0. • Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.
Θ 6	Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x)$.

Θ 7	Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με τις ιδιότητες των ορίων, έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0\right) = \lim_{x \to x_0} \left(\alpha_\nu x^\nu\right) + \lim_{x \to x_0} \left(\alpha_{\nu-1} x^{\nu-1}\right) + \cdots + \lim_{x \to x_0} \alpha_0$$

$$= \alpha_\nu \left(\lim_{x \to x_0} x\right)^\nu + \alpha_{\nu-1} \left(\lim_{x \to x_0} x\right)^{\nu-1} + \cdots + \lim_{x \to x_0} \alpha_0 = \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1} x_0^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0 = P(x_0)$$

Επομένως, $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$. □

Θ 8	Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με τις ιδιότητες των ορίων, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$. □

Θ 9	***Κριτήριο* παρεμβολής.** Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν • $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και • $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$, Τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

Θ 10

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$						
το όριο της f είναι:	$\alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

Θ 11

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$,										
το όριο της f είναι:	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της f·g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Παρατήρηση: Στους πίνακες των παραπάνω θεωρημάτων, όπου υπάρχει ερωτηματικό, σημαίνει ότι το όριο (αν υπάρχει) εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που παίρνουμε. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε *απροσδιόριστη μορφή*. Δηλαδή, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty)+(-\infty) \quad \text{και} \quad 0\cdot(\pm\infty).$$

Επειδή $f-g=f+(-g)$ και $\dfrac{f}{g}=f\cdot\dfrac{1}{g}$, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια της διαφοράς και του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty)-(+\infty), \quad (-\infty)-(-\infty) \quad \text{και} \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Για παράδειγμα, αν πάρουμε τις συναρτήσεις f και g, με $f(x)=-\frac{1}{x^2}$ και $g(x)=\frac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty, \qquad \lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

Ενώ, αν πάρουμε τις συναρτήσεις f και g, με $f(x)=-\frac{1}{x^2}+1$ και $g(x)=\frac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)=-\infty, \qquad \lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}1=1.$$

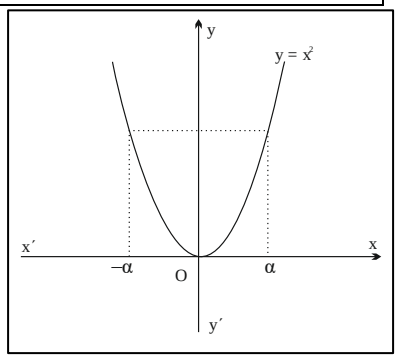
Θ 12	Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0$, με $\alpha_\nu\neq 0$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$ Επίσης, για τη ρητή συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa+\beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0}$, με $\alpha_\nu\neq 0$ και $\beta_\kappa\neq 0$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)$
Θ 13	Για την εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση ισχύει: • Αν $\alpha>1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$ $\lim\limits_{x\to 0}\log_\alpha x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_\alpha x=+\infty$ • Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=0$ $\lim\limits_{x\to 0}\log_\alpha x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_\alpha x=-\infty$

Θ 14	Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις: $$f+g,\quad c\cdot f\text{, όπου } c\in\mathbb{R},\quad f\cdot g,\quad \frac{f}{g},\quad \lvert f\rvert \quad \text{και} \quad \sqrt[\nu]{f},$$ με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

Θ 15	Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

Θ 16	***Θεώρημα Bolzano.*** Έστω συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν: ♦ η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει ♦ $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$. Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x_0)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Παρατήρηση: Το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano, γενικά, δεν ισχύει. Για παράδειγμα, θεωρούμε τη συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=x^2$. Η f είναι συνεχής στο $[-2,2]$ και έχει ρίζα το 0 που ανήκει στο $(-2,2)$. Παρ' όλα αυτά δεν ισχύει $f(-2)\cdot f(2)<0$.



Θ 17	***Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.*** Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν: ♦ η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ♦ $f(\alpha)\neq f(\beta)$, να αποδείξετε ότι, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\ \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$.

Απόδειξη. Υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)\cdot g(\beta) < 0$,αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$. □

Θ 18	Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Θ 19	Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.
Θ 20	Αν μία συνάρτηση f είναι *γνησίως αύξουσα* και *συνεχής* σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), (όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B), όπου $$A = \lim_{x\to\alpha^+} f(x) \quad \text{και} \quad B = \lim_{x\to\beta^-} f(x).$$ Αν, όμως, η f είναι *γνησίως φθίνουσα* και *συνεχής* στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B,A).

Θ 21	Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη. Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot(x - x_0)$, οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot(x - x_0)\right]$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x - x_0)$$

$$= f'(x_0)\cdot 0 = 0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Άρα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$,

δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0. □

Παρατήρηση

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο $x=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό. Πράγματι, ο τύπος της f γράφεται

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

Είναι

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0=f(0).$$

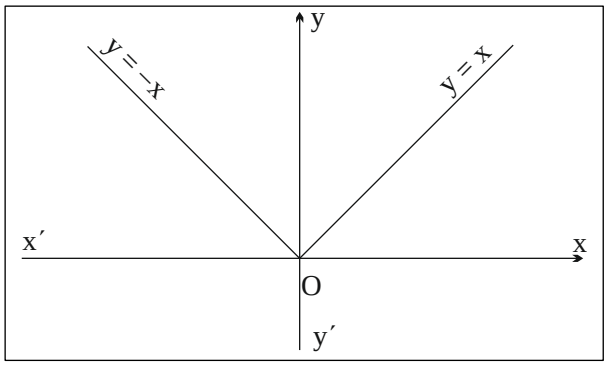
Εφόσον, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ η f είναι συνεχής στο 0. Όμως

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1.$$

Δηλαδή, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ και άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Η παράγωγος της f είναι η

$$f'(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της f:



Αν, όμως, μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x_0\in D_f$, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Θ 22	Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή $(c)'=0$.

Απόδειξη. Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0.$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$. Δηλαδή $(c)'=0$. □

Θ 23	Έστω η συνάρτηση $f(x)=x,\ x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

Απόδειξη. Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1.$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}1=1$, δηλαδή $(x)'=1$. □

Θ 24	Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή $\left(x^{\nu}\right)'=\nu x^{\nu-1}$.

Απόδειξη. Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1}\right)}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1}\right)=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\ldots+x_0^{\nu-1}=\nu\cdot x_0^{\nu-1}.$$

Δηλαδή $\left(x^{\nu}\right)'=\nu x^{\nu-1}$. □

Θ 25	Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Απόδειξη. Αν $x_0\in(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$, με $x\in(0,+\infty)$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}.$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. □

Θ 26	Αποδεικνύονται τα παρακάτω: $$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x,\ x \in \mathbb{R}$$ $$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x,\ x \in \mathbb{R}$$ $$\left(e^x\right)' = e^x,\ x \in \mathbb{R}$$ $$(\ln x)' = \frac{1}{x},\ x > 0$$

Θ 27	Αν οι συναρτήσεις $f,\ g$ είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Απόδειξη. Για $x \neq x_0$, έχουμε:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Δηλαδή $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. □

Παρατήρηση

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x) + g'(x).$$

Θ 28	Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Παρατήρηση: Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Ειδική περίπτωση:

$$\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x),\ c \in \mathbb{R}.$$

Θ 29	Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}.$$

Παρατήρηση: Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $g(x) \neq 0$, τότε για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Θ 30	Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $\left(x^{-\nu}\right)' = -\nu x^{-\nu-1}$.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε $\left(x^{-\nu}\right)' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^\nu - 1 \cdot \left(x^\nu\right)'}{\left(x^\nu\right)^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}$. □

Παρατήρηση

Είδαμε στο *Θ 15*, ότι $\left(x^\nu\right)' = \nu x^{\nu-1}$, για κάθε $\nu \geq 2$. Άρα, αν $\kappa \in \mathbb{Z} - \{0,1\}$, τότε $\left(x^\kappa\right)' = \kappa \cdot x^{\kappa-1}$.

Θ 31	Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $A = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in A$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\,\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\,(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \cdot \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}. \square$$

Θ 32	Αποδεικνύεται ότι $$(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : \eta\mu x = 0\}.$$

Θ 33	Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Παρατήρηση: Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$(f \circ g)'(x) = \left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Δηλαδή, αν $u = g(x)$, τότε

$$\left(f(u)\right)' = f'(u) \cdot u'.$$

Με το συμβολισμό του Leibnitz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε τον τύπο

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

που είναι γνωστός ως *κανόνας της αλυσίδας*.

Θ 34	Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$, δηλαδή $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$.

Απόδειξη. Αν $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \cdot \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \cdot \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = \left(e^u\right)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \cdot \ln x} \cdot (\alpha \cdot \ln x)' = e^{\alpha \cdot \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}. \square$$

Θ 35	Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 1$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \cdot \ln \alpha$, δηλαδή $\left(\alpha^x\right)' = \alpha^x \cdot \ln \alpha$.

Απόδειξη. Αν $y = \alpha^x = e^{x \cdot \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \cdot \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = \left(e^u\right)' = e^u \cdot u' = e^{x \cdot \ln \alpha} \cdot (x \ln \alpha)' = e^{x \cdot \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \cdot \ln \alpha. \square$$

Θ 36	Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$, δηλαδή $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$.

Απόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- αν $x > 0$, τότε $\left(\ln|x|\right)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$,

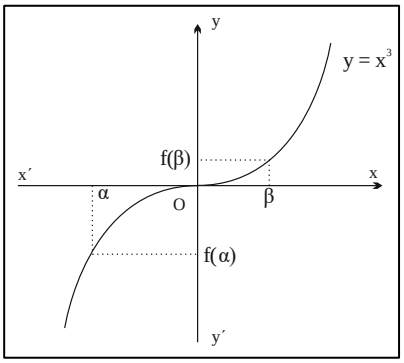
- αν $x < 0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$. Θέτουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, άρα $y = \ln u$. Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x}(-x)' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Συνεπώς, $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \neq 0$. □

Θ 37	***Θεώρημα Rolle.*** Αν μια συνάρτηση f είναι: ♦ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ ♦ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και ♦ $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Παρατήρηση: Το αντίστροφο του θεωρήματος Rolle δεν ισχύει, Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = x^3$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 3x^2$. Παρατηρούμε ότι $f'(0) = 0$. Όμως δεν μπορούμε να βρούμε διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $\alpha < 0 < \beta$, στο οποίο να ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$, αφού $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$.



Θ 38	***Θεώρημα Μέσης Τιμής.*** Αν μια συνάρτηση f είναι: ♦ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ♦ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

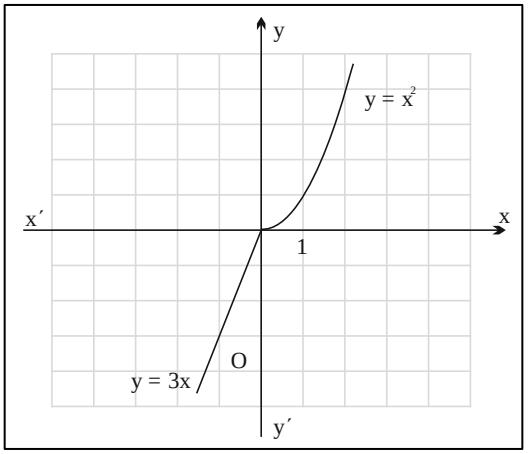
Παρατήρηση: Το αντίστροφο του ΘΜΤ, γενικά δεν ισχύει. Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 3x, & x < 0 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο 0, αλλά όχι παραγωγίσιμη σ' αυτό. Είναι

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ 3, & x < 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι



$$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{9+3}{4}=3.$$

Όποιο ξ και να επιλέξουμε στο διάστημα $(-1,0)$ έχουμε ότι

$$f'(\xi)=3=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}.$$

Η συνάρτηση όμως δεν είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,3)$, αφού δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Θ 39	Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν ♦ η f είναι συνεχής στο Δ και ♦ $f'(x)=0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$, οπότε, λόγω της σχέσης (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$. □

Παρατήρηση

Το αντίστροφο του Θ 28 δεν ισχύει. Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση f, με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη, με

$$f'(x)=\begin{cases}0, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}=0,\ x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

Δηλαδή η f έχει παράγωγο ίση με το 0, αλλά δεν είναι σταθερή. Αυτό συμβαίνει διότι η f δεν έχει μηδενική παράγωγο σε διάστημα, αλλά σε ένωση διαστημάτων.

Θ 40	Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν ♦ οι f, g είναι *συνεχείς* στο Δ και ♦ $f'(x) = g'(x)$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $$f(x) = g(x) + c.$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, απ' όπου προκύπτει $f(x) = g(x) + c$. □

Παρατήρηση

Προσοχή, το θεώρημα εφαρμόζεται μόνο σε διάστημα.

Θ 41	Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι σ υ ν ε χ ή ς σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι: ♦ Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ. ♦ Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ τέτοια, ώστε $x_1 < x_2$. Θα αποδείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του ΘΜΤ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$. Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως. □

Παρατήρηση

Το αντίστροφο του Θ 32, γενικά δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η συνάρτηση f, με $f(x)=x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει παράγωγο $f(x)=3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0)=0$. Ισχύει όμως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θ 42	***Θεώρημα Fermat.*** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0)=0$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει δ > 0 τέτοιο, ώστε

$$(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq\Delta \text{ και } f(x)\leq f(x_0), \text{ για κάθε } x\in(x_0-\delta, x_0+\delta). \qquad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

- αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0 \qquad (2)$$

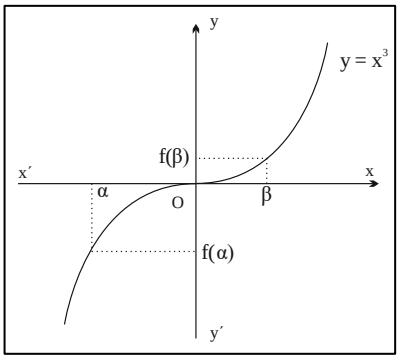
- αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. □

Παρατήρηση

Το αντίστροφο του θεωρήματος Fermat, γενικά δεν ισχύει. Πράγματι, η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=x^3$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x)=3x^2$. Παρατηρούμε ότι $f'(0)=0$ και το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$. Όμως η f δεν παρουσιάζει στο 0 ακρότατο, αφού είναι $f'(x)\geq 0$, με το '=' να ισχύει μόνο για x =0 και άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.



Θ 43	***Κριτήριο 1ης παραγώγου.*** Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. (α) Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. (β) Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f. (γ) Αν η f' διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Απόδειξη. (α) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ x\in(\alpha,x_0] \qquad (1).$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ x\in[x_0,\beta) \qquad (2).$$

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

(β) Εργαζόμαστε αναλόγως.

(γ) Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για κάθε $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

- Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.
- Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.
- Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, και συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$. □

Θ 44	Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα *Δ* και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. • Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ. • Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

Παρατήρηση: Το αντίστροφο του Θ 35, γενικά δεν ισχύει. Για παράδειγμα, θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)=x^4$. Η f είναι παραγωγίσιμη, με $f'(x)=4x^3$. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η $f''(x)=12x^2$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$, αφού $f''(0)=0$. Είναι όμως $f''(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θ 45	Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0)=0$.

Παρατήρηση: Το αντίστροφο, γενικά δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=x^4$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με $f''(x)=12x^2\geq 0$, με το '=' να ισχύει μόνο στο 0. Εντούτοις το σημείο $(0, f(0))$ δεν είναι σημείο καμπής, αφού η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Αν, όμως για κάποια συνάρτηση f είναι $f''(x_0)\neq 0$, για κάποιο x_0 εσωτερικό ενός διαστήματος Δ, τότε στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ η C_f δεν παρουσιάζει καμπή.

Θ 46	Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α,β) και $x_0\in(\alpha,\beta)$. Αν ♦ η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και ♦ ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.
Θ 47	Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in\mathbb{R}$, αντιστοίχως, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in\mathbb{R}$.

Θ 48	**Θεώρημα de l' Hospital 1 (Μορφή $\frac{0}{0}$).** Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ με $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
Θ 49	**Θεώρημα de l' Hospital 2 (Μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$).** Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ με $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Παρατήρηση: το Θ 49 ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty},\frac{-\infty}{+\infty},\frac{-\infty}{-\infty}$. Επίσης, τα Θ 48 και Θ 49 ισχύουν και για πλευρικά όρια στο $x_0\in\mathbb{R}$ και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

Θ 50	Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι: ♦ όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ, και ♦ κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη.

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.
- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$. Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

Θ 51	Έστω f συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $$\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0.$$ Αν επιπλέον η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha,\beta]$, τότε $$\int_\alpha^\beta f(x)dx>0.$$

Θ 52	Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση $$F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt,\ x\in\Delta,$$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει: $$\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)'=f(x),\ \text{για κάθε } x\in\Delta.$$

Θ 53	***Θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού.*** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι $$\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha).$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x)=F(x)+c. \quad (1)$$

Από την (1), για $x=\alpha$ έχουμε

$$G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_\alpha^\alpha f(t)dt+c=c,$$

οπότε $c=G(\alpha)$. Άρα,

$$G(x)=F(x)+G(\alpha).$$

Συνεπώς, από την (1), για $x=\beta$ έχουμε:

$$G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)\Rightarrow G(\beta)=\int_\alpha^\beta f(t)dt+G(\alpha)$$

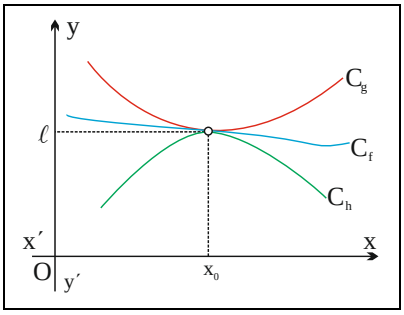
και άρα

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha).\ \square$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΡΜΗΝΕΙΕΣ

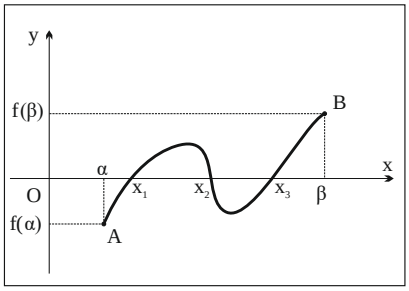
Γεωμετρική ερμηνεία του κριτηρίου παρεμβολής

Υποθέτουμε ότι "κοντά στο x_0" η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f "εγκλωβίζεται" ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις h και g. Αν, καθώς το x τείνει στο x_0, οι g και h έχουν κοινό όριο ℓ, τότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα η f θα έχει το ίδιο όριο ℓ.



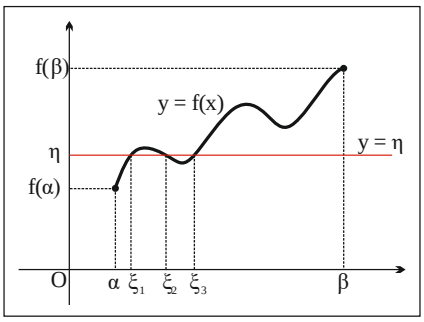
Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε, τουλάχιστον, ένα σημείο.



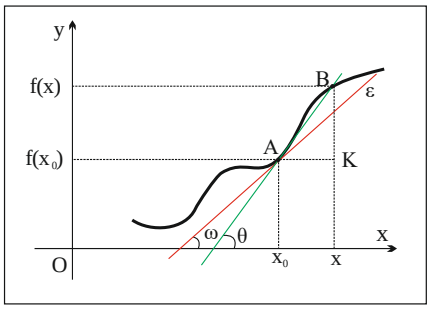
Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας μη σταθερής και συνεχούς συνάρτησης στο $[\alpha,\beta]$. Οποιαδήποτε οριζόντια ευθεία y = η, με το η να βρίσκεται ανάμεσα στα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, θα έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της f, του οποίου η τετμημένη βρίσκεται στο διάστημα (α,β).



Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου σε σημείο x_0

Έστω μια συνεχής συνάρτηση f και $A(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f. Θεωρούμε τυχαίο σημείο B της C_f διαφορετικό του A. Καθώς το B πλησιάζει το A, δηλαδή καθώς $x \to x_0$, η ευθεία AB φαίνεται να παίρνει μια οριακή θέση ε η οποία λέγεται εφαπτομένη της C_f στο A. Ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι



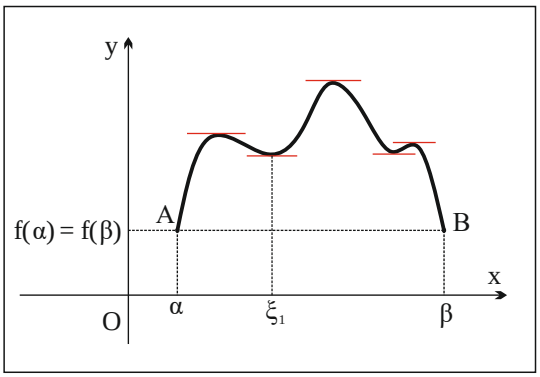
$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{BK}{AK} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο Α γίνεται:

$$\varepsilon\varphi\omega = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

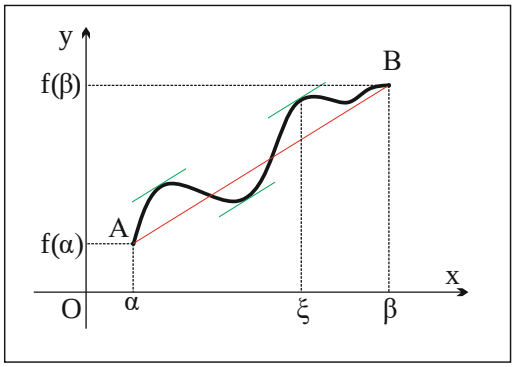
Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle

Εφόσον τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται στην ίδια οριζόντια ευθεία και η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι οριζόντια. Δηλαδή είναι παράλληλη με τον άξονα x΄x.



Γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ.

Ο αριθμός $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε, η οποία διέρχεται από τα σημεία Α και Β της C_f με τετμημένες αντίστοιχα τα άκρα α και β του διαστήματος $[\alpha,\beta]$. Ο αριθμός $f'(\xi)$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη ξ. Δηλαδή αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα,



τουλάχιστον σημείο Μ της C_f με τετμημένη $\xi \in (\alpha,\beta)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη προς την ευθεία ε.