

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2025

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΘΕΩΡΗΜΑ σχολικού βιβλίου σελ. 116

Α2. ΟΡΙΣΜΟΣ σχολικού βιβλίου σελ. 104

Α3. i) ΘΕΩΡΗΜΑ σχολικού βιβλίου σελ. 142

ii) Σελ 74 , σχήμα 64

Α4. (α) Λάθος (β) Σωστό (γ) Λάθος (δ) Σωστό (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$ και

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + |x|} = \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + |x|} = \frac{(|x| - 1)(|x| + 1)}{|x| \cdot (|x| + 1)} = \frac{|x| - 1}{|x|} = 1 - \frac{1}{|x|} = g(x)$$

Άρα $f = g$ Β2. Για το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ πρέπει:

$$x \in D_f \cap D_g = \mathbb{R}^* \text{ και } g(x) \neq 0 \Leftrightarrow 1 \neq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow |x| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$$

$$\text{Άρα } D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \text{ με } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{f(x)} = 1$$

Για το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ πρέπει:

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \text{ δηλ } D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$$

$$g(f(x)) = g(g(x)) = 1 - \frac{1}{|g(x)|} = 1 - \frac{1}{\left|1 - \frac{1}{|x|}\right|} = 1 - \frac{|x|}{||x| - 1|}$$

$$\text{Β3. } f(x) = g(x) = 1 - \frac{1}{|x|} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 1 + \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases} \text{ με } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x > 0 \\ -\frac{1}{x^2}, & x < 0 \end{cases}$$

Δηλαδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x < 0$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Οπότε f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x^3}, & x > 0 \\ \frac{2}{x^3}, & x < 0 \end{cases}$$

Επομένως για κάθε $x > 0 \Rightarrow x^3 > 0 \Rightarrow -\frac{2}{x^3} < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$

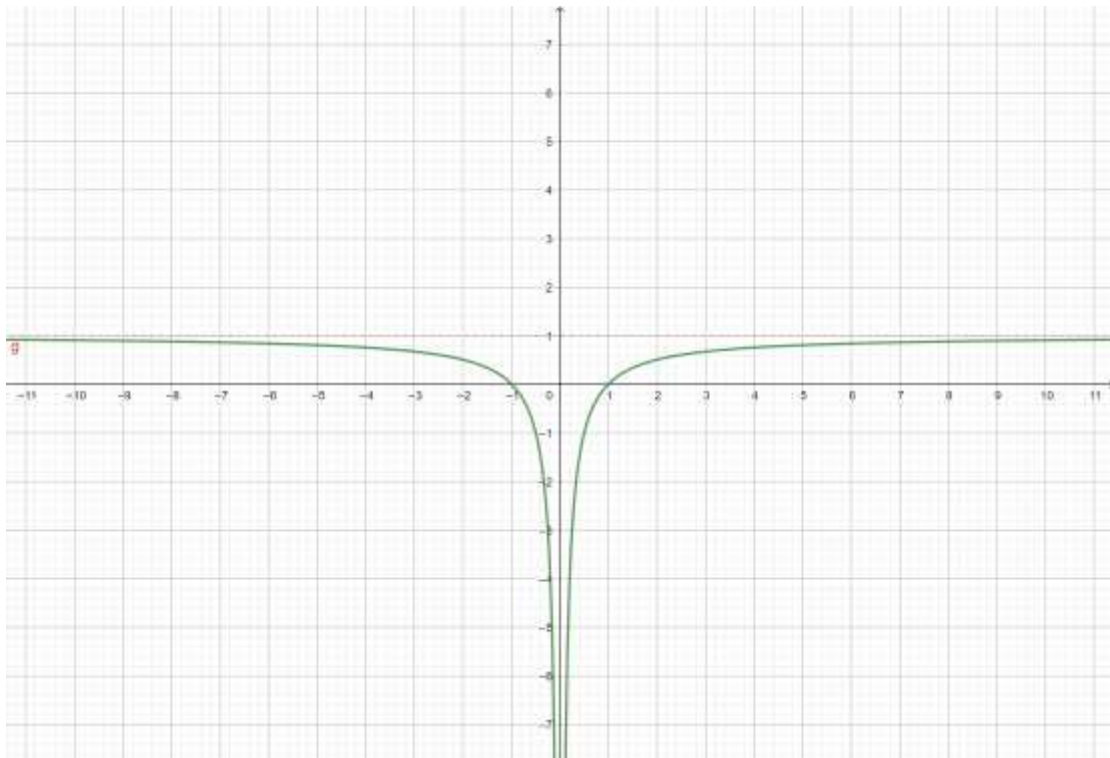
Ενώ για κάθε $x < 0 \Rightarrow x^3 < 0 \Rightarrow \frac{2}{x^3} < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$

Άρα f κοίλη στο $(-\infty, 0)$ και f κοίλη στο $(0, +\infty)$

$$\text{B4. } f(x) = g(x) = 1 - \frac{1}{|x|} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 1 + \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

για $x < 0$ η C_f προκύπτει από την μετατόπιση της $\frac{1}{x}$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω,

ενώ για $x > 0$ η C_f προκύπτει από τη μετατόπιση της $-\frac{1}{x}$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω



ΘΕΜΑ Γ**Γ1.**

$$(f'(x))^2 - 2f'(x) = -\frac{16}{x^2+16} \Leftrightarrow (f'(x))^2 - 2f'(x) + 1 = 1 - \frac{16}{x^2+16} \Leftrightarrow (f'(x)-1)^2 = \frac{x^2}{x^2+16}$$

$$\text{θέτω } g(x) = f'(x) - 1 \text{ η οποία είναι συνεχής στο } \mathbb{R} \text{ με } g^2(x) = \frac{x^2}{x^2+16}$$

και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \neq 0$. Άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

$$g(-3) = f'(-3) - 1 < 0 \text{ άρα } g(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 1 \text{ για κάθε } x < 0$$

$$g(3) = f'(3) - 1 > 0 \text{ άρα } g(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 1 \text{ για κάθε } x > 0$$

Γ2.

$$g^2(x) = \frac{x^2}{x^2+16} \Rightarrow |g(x)| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+16}}$$

$$\text{Για } x < 0 \text{ ισχύει } -g(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+16}} \Rightarrow f'(x) - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$$

$$\text{Για } x > 0 \text{ ισχύει } g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} \Rightarrow f'(x) - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$$

$$\text{και } g(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$$

$$\Delta\eta\lambda \quad f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ3.

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} \Leftrightarrow f'(x) = \left(x + \sqrt{x^2+16} \right)'$$

$$\text{Άρα } f(x) = x + \sqrt{x^2+16} + c \text{ με } f(0) = 4 \Leftrightarrow 4 = \sqrt{16} + c \Leftrightarrow c = 0$$

$$\delta\eta\lambda \quad f(x) = x + \sqrt{x^2+16} \text{ και } f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} = \frac{\sqrt{x^2+16} + x}{\sqrt{x^2+16}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+16}}$$

$$\text{οπότε } f(x) = f'(x)\sqrt{x^2+16}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Γ4. } \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+16}} dx = \int_0^3 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left[\ln |f(x)| \right]_0^3 = \ln f(3) - \ln f(0) = \ln \frac{f(3)}{f(0)} = \ln 2$$

ΘΕΜΑ Α

$$\Delta 1. \quad f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - 2x \cdot e^x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x-1)^2 e^x}{(x^2+1)^2} \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με την ισότητα να}$$

ισχύει μόνο για $x = 1$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

$$\text{αφού} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \frac{1}{x^2+1} = 0 \cdot 0 = 0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2+1} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Δ2. Η εξίσωση γίνεται:

$$f(e^{3-x}(x^2+1)) = f(2) \Leftrightarrow e^{3-x}(x^2+1) = 2 \Leftrightarrow \frac{e^3}{e^x}(x^2+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{x^2+1} = \frac{e^3}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{e^3}{2} \in f(\mathbb{R}) = (0, +\infty) \\ \text{και } f \text{ γν. αύξουσα στο } \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{υπάρχει μοναδικό } x_0 \in \mathbb{R} \text{ ώστε } f(x_0) = \frac{e^3}{2}.$$

Δ3. i) από ΘΜΤ για την f στο $[2x, 4x]$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (2x, 4x)$ ώστε:

$$F'(\xi) = \frac{F(4x) - F(2x)}{4x - 2x} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{F(4x) - F(2x)}{2x}$$

η f είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε:

$$\xi < 4x \Leftrightarrow f(\xi) < f(4x) \Leftrightarrow \frac{F(4x) - F(2x)}{2x} < f(4x) \Leftrightarrow F(4x) - F(2x) < 2x f(4x)$$

ii) Ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(4x) - F(2x)}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f(4x) - 2f(2x)}{x} = 4f(0) - 2f(0) = 2 = g(0)$$

Άρα η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

$$g'(x) = \frac{(4f(4x) - 2f(2x)) \cdot x - (F(4x) - F(2x))}{x^2}$$

$$= \frac{2x(f(4x) - 2f(2x)) + 2xf(4x) - F(4x) + F(2x)}{x^2}$$

από το Δ3 i) προκύπτει : $2xf(4x) - F(4x) + F(2x) > 0$

και επιπλέον $2x < 4x \xRightarrow{f \uparrow} f(2x) < f(4x) \xRightarrow{x > 0} 2x(f(4x) - f(2x)) > 0$

οπότε $g'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, δηλαδή g γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

iii) Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\int_4^8 f(x) dx > 2 \int_2^4 f(x) dx \Leftrightarrow F(8) - F(4) > 2(F(4) - F(2)) \Leftrightarrow F(8) - 3F(4) + 2F(2) > 0$$

επειδή g γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ ισχύει:

$$g(1) < g(2) \Leftrightarrow F(4) - F(2) < \frac{F(8) - F(4)}{2} \Leftrightarrow F(8) - 3F(4) + 2F(2) > 0$$

Πετρόπουλος Ι. Αθανάσιος,

Μαθηματικός M.Sc.